INTRODUCCIÓN A LOS CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

1. QUÉ ES UN CAMPO.

Se denomina CAMPO en general, a toda magnitud física cuyo valor depende del punto del plano o del espacio, y del instante que se considere. Si la magnitud definida así en un punto del espacio es escalar, el campo es escalar; si fuera vectorial, sería un campo vectorial.

Ahora en invierno, si se tomara la temperatura en diferentes puntos del aula de Física, se observaría que en cada instante, la temperatura de ciertos puntos, los que se encuentran próximos a los radiadores, sería diferente de la que tomamos junto a la puerta o ventanas. El aula se convertiría así en un CAMPO ESCALAR DE LA TEMPERATURA.

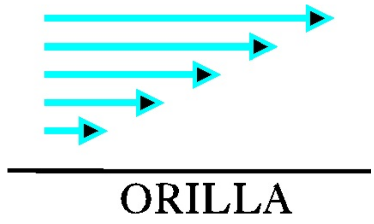


Fig.1

Si en un río echamos corchos a diferente distancia de la orilla, observaríamos que la velocidad con que se moverían debido a la corriente, sería distinta, mayor hacia el centro e inferior cerca de la orilla. Estas velocidades variables con la distancia a la orilla, representarían el CAMPO VECTORIAL DE LAS VELOCIDADES.

Esta misma operación la podríamos realizar en casa, llenando un lavabo de agua, disponiendo un corcho, cerca del borde, y sacando el tapón. El régimen turbillonario del fluido al desaguar, produciría una velocidad en el corcho que según la aproximación al desagüe sería mayor. Si tomáramos las velocidades en distintas líneas, observaríamos la distribución dada (fig.2).

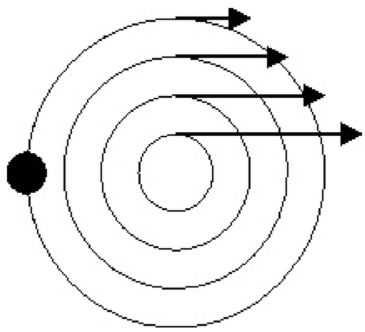


Fig.2

De forma más específica un CAMPO estaría constituido por una distribución de magnitudes escalares, vectoriales definidas en función de las coordenadas espaciales y del tiempo. Se debe recordar que una magnitud escalar requiere un único número para su descripción completa, la vectorial 3[1] (las tres componentes, o el módulo, dirección y sentido).

2. CAMPOS ESCALARES.

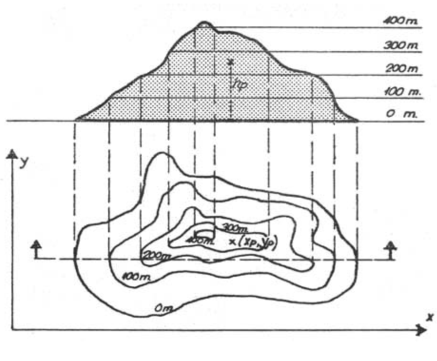


Fig.3

Un ejemplo de campo escalar muy sencillo, es el de alturas en un plano topográfico (fig.3). Cuando observamos esos planos, apreciamos las curvas de nivel o lugares geométricos en los que la altura es la misma. En el plano XY de la "isla misteriosa", a cada punto del plano dado, le corresponde una determinada altura, dado que es una magnitud escalar, el dibujo realizado corresponde al CAMPO ESCALAR DE LA FUNCIÓN ALTURA. Las curvas de nivel, o lugares geométricos en los que la magnitud representada es la misma, se denominan con carácter general LÍNEAS ISOTÍMICAS (En los campos llamados CONSERVATIVOS, se denominarían LÍNEAS DE POTENCIAL).

La superficie encerrada por ellas sería una SUPERFICIE ISOTÍMICA (lugar geométrico en que H(x,y) = cte.).

Si la magnitud medida es la temperatura, serían ISOTERMAS, en el caso de tratarse de la presión, serían ISOBARAS (las líneas que se aprecian en los mapas del tiempo que aparecen en los informativos de televisión y que cuando están muy juntas anuncian fuertes vientos). Otros campos escalares importantes, son los densidad de población, y los de densidad electrónica.

---

[1] Los términos escalar y vectorial, surgen por primera vez en el trabajo del matemático irlandés Hamilton sobre quaterniones (números complejos multidimensionales), de 1844. El escalar procede de la escala de progresión de los números desde negativo hasta infinito. A la parte imaginaria de los quaterniones, que se construía con un radio y el ángulo, lo denominó, parte vectorial, o simplemente vector.

3. GRADIENTE.

Estamos acostumbrados a escuchar en la información televisiva del tiempo, que cuando las isobaras están muy juntas, los vientos son fuertes, debido a las alteraciones bruscas de presión. Igualmente sabemos que en un mapa topográfico, cuando las curvas de nivel están próximas, el desnivel es mayor, y la zona se supone abrupta. Pues bien, la magnitud que mide la máxima variación de la función escalar considerada, con la variación de la posición, se denomina GRADIENTE[2], siendo su sentido hacia los valores crecientes de la magnitud escalar que sufre la variación. En el caso de un campo escalar de alturas, el gradiente nos indicaría la línea de máxima pendiente, dato muy importante porque nos permitiría saber por donde discurriría el agua de un manantial en una montaña, o por donde se debe efectuar el tendido de una línea eléctrica si se pretende ahorrar material. Naturalmente, el agua en un manantial en la montaña no discurre libremente hacia abajo, sino siguiendo una dirección y sentido determinado, por eso el gradiente es una magnitud vectorial que opera sobre otra escalar.

Así, utilizando coordenadas cartesianas, si tenemos una función escalar F(x,y,z) , siendo F (presión, temperatura, altura, potencial, densidad electrónica etc.), el gradiente de dicha función sería:

$$\overrightarrow{\mathrm{GRAD}}\ \mathrm{F} = \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}\right)\vec{\mathrm{i}} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}\right)\vec{\mathrm{j}} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{z}}\right)\vec{\mathrm{k}} \quad ^{3}(1)$$

Por lo tanto, el gradiente representa las derivadas parciales de una función escalar en un espacio vectorial, lo que va a producir una derivada vectorial. Existe un operador vectorial o símbolo matemático que representa dicha operación, consiste en el triángulo (delta) significativo del incremento[4] pero invertido, o sea con el vértice hacia abajo: $\vec{\nabla}$[5]. Por su forma, se le denominó NABLA (el nabla era un instrumento musical de cuerda, tal como el arpa, empleado por sirios y persas), o ATLED (delta al revés). Este operador fue creado por Hamilton a mediados del siglo XIX.
De esta forma, el NABLA como operador matemático en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{k} \quad (2)$$

Por este motivo $\vec{\nabla}\mathrm{F} = \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}\right)\vec{\mathrm{i}} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}\right)\vec{\mathrm{j}} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{z}}\right)\vec{\mathrm{k}}$ es un vector:

cuyo módulo es $\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$ y (3)

Su dirección será tal que suponga la máxima variación de la función.
Como sentido de dicha variación siempre se tomará el creciente

---

[2] El término gradiente, significa tal como grado, escalón, o escala, aunque originalmente, procede del latín gradiens-entis "el que anda", refiriéndose al camino por una pendiente.

[3] Los vectores unitarios i, j y k, fueron introducidos por Hamilton. Al mismo tiempo se emplearon las letras ",$ y (para representarlos. Por lo general los vectores se simbolizaron por letras griegas (Tait, Hamilton y Gibbs), e incluso por letras góticas (Maxwell y Heaviside. Tait y Gibbs, comenzaron a incluir un segmento encima de las letras que lo simbolizaron. El uso del símbolo de vector encima del representado es un convenio actual y personal que pretende reforzar dicho carácter, pero que no aparece en el libro verde de la IUPAP (el libro verde engloba todos los convenios, en unidades y símbolos de la unión internacional de física pura y aplicada, como primera opción. En éste los vectores se simbolizan en negrita de tal forma que **r**=x**i**+y**j**+z**k**. Sólo como segunda opción y en sentido del reforzamiento se emplearía dicho símbolo, que se podría confundir con el que indica la tendencia.

[4] Realmente no es el triángulo el representativo del incremento, sino la letra griega delta, que indica un elemento diferencial, o sea una diferencia infinitesimal, pues corresponde a la d (diferencia) en griego (delta).

[5] En el trabajo de Hamilton de 1846, esta operación se representó por primera vez por un simple triángulo con un vértice dirigido hacia la izquierda (no hacia abajo), $\triangleleft = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$, y no recibía el nombre de nabla (ya que no se parecería a un arpa), nombre que fue propuesto por Robertson Smith, al físico matemático escocés Tait que lo publicó en sus libros, y se generalizó a partir de 1870. También en 1852, el inglés O'Brien, representó una operación similar en el contexto de la traslación de vectores, que representó por **S**, de tal forma que siendo los vectores unitarios, **",$** y **(**, $\Omega = \alpha\frac{d}{dx} + \beta\frac{d}{dy} + \gamma\frac{d}{dz}$ .El uso del vector encima del símbolo nabla es prescindible (no aparece en el libro verde de la IUPAP); sólo se emplea para reforzar el carácter vectorial.

APLICACIÓN

Ej1. Cálculo de un gradiente.

Dada la función escalar V = $2x^2 + 3y^2 + z^2$. Determine el gradiente en el punto P (1,1,1): $\vec{\nabla} V = 2{\cdot}2x\,\vec{i} + 2{\cdot}3y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$

Se deriva la función respecto a x , y , z y después se sustituyen los valores dados: $\vec{\nabla} V = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$

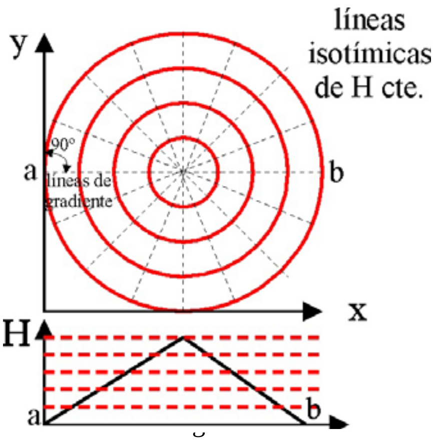
Ej2 Calcule el gradiente del campo escalar U = sen(xy/2) .

Observación: Al derivar la función respecto a x, todo lo que no sea x se considera constante, y así en las sucesivas derivaciones (respecto a y).

SOLUCIÓN: $\vec{\nabla}$ U = (y/2)cos (xy/2) $\vec{i}$ + (x/2)cos(xy/2) $\vec{j}$

En un campo de alturas como el que se presenta (fig.1, mapa topográfico en unos ejes x/y), el gradiente:

$$\vec{\nabla} H = \frac{\partial H}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial H}{\partial y}\vec{j} = \frac{dH}{dr}\vec{u}_r \quad (4)$$



permitiría conocer en cada punto del terreno, la máxima variación de la altura con la distancia. Siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario en la dirección radial.

Multiplicando escalarmente por $\vec{u}_r$ los dos miembros.

$$\frac{dH}{dr}\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = \vec{\nabla} H \cdot \vec{u}_r \, ; \qquad dH = \vec{\nabla} H \cdot \vec{u}\, dr = \vec{\nabla} H \cdot d\vec{r}$$

(Producto escalar[6] del gradiente por su desplazamiento).

Si H=cte. dH=0

Por lo tanto el gradiente de una función a lo largo de una curva de nivel o línea isotímica (circunferencias en la fig.4, H= cte.), deberá ser perpendicular a dicho desplazamiento ya que dH=0 , al ser el diferencial de una constante y puesto que se trata de un producto escalar (coseno del ángulo formado por curva de nivel y el gradiente =0 , por lo que dicho ángulo = 90º).

Una propiedad del gradiente, es ser *perpendicular a cualquier superficie isotímica en todos sus puntos y con sentido hacia los valores crecientes de las superficies isotímicas.*

¿Qué importancia tiene esta propiedad?.

Si se quiere calcular el vector unitario perpendicular a una superficie en un punto de la misma, bastaría con calcular el gradiente, y después aplicar el concepto de vector unitario (llamado a veces versor).

APLICACIÓN

Ej3. Dada la superficie S= $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 0$, calcule un vector unitario normal a dicha superficie por el punto (2,0,-2).

PASOS A SEGUIR:

a) Determinación del $\vec{\nabla} S$, derivando la función superficie respecto a x, y, y z.

$$\vec{\nabla} S = 2x\vec{i} + 2(y-2)\vec{j} + 2(z+1)\vec{k}$$

b) Se calcula su valor numérico, sustituyendo las coordenadas del punto:

$$\vec{\nabla} S = 2{\cdot}2\vec{i} + 2(0-2)\vec{j} + 2(-2+1)\vec{k} = 2{\cdot}2\vec{i} + 2(0-2)\vec{j} + 2(-2+1)\vec{k} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

c) Se determina el módulo del gradiente, aplicando la fórmula (3) : 6

d) Se divide el vector, por el módulo de dicho vector : $\vec{u} = \frac{4}{6}\vec{i} - \frac{4}{6}\vec{j} - \frac{2}{6}\vec{k}$

---

[6] Las operaciones producto escalar y producto vectorial, no se llamaron así inicialmente sino producto directo y producto sesgado. Después una vez denominados tal como en la actualidad, se representaron con la inicial S (escalar) y la V(vectorial), sin ningún símbolo y delante de los vectores dados (así aparecen en todos los trabajos de Maxwell). Tait, en su tratado sobre cuaterniones de 1867, definió el producto escalar de los vectores **"** y **$**, que forman un ángulo **1** como S**"$**=-T**"**T**$** cos**1** mientras que el vectorial V**"$**=T**"**T**$**sen**1**.**0**, siendo T el módulo de cada vector y **0**, un vector unitario perpendicular a **"** y **$**. Fue el ingeniero norteamericano Gibbs, el que introdujo en su libro de "Elementos de análisis vectorial" de 1881, el **.** y la **x** , para representarlos.

¿Cuál sería la unidad del gradiente?
Sería la de la magnitud escalar medida / unidad de longitud.

Si en cada punto del campo escalar, calculáramos el gradiente, e incluso pudiéramos dibujarlo, tendríamos un CAMPO DE GRADIENTES, que sería naturalmente un CAMPO VECTORIAL. La propiedad del gradiente citada anteriormente, permite trazar en un campo escalar una serie de líneas perpendiculares (ortogonales) a las superficies de nivel, tales que los vectores gradiente sean tangentes a dichas líneas. En este caso, dichas líneas serían las LÍNEAS DEL CAMPO DE GRADIENTES.

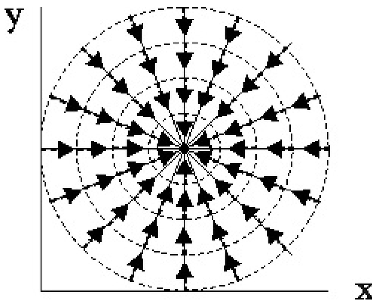


Fig.5

En el campo escalar de alturas H(x,y) de la figura 5 se puede apreciar, al proyectar los gradientes sobre el plano XY, el aspecto de un campo de gradientes, en el cual $\vec{I} = \vec{\nabla} H$. Los vectores tendrían un sentido hacia la cúspide (sentido creciente), siguiendo la dirección de la máxima variación. Este hecho podría servir para resolver los siguientes problemas:

APLICACIÓN

Ej4. Calcular la dirección y el sentido según el cual, se produce la máxima variación de la función $F=2xz-y^2$, en el punto (1,2,3). ¿Cuál es el módulo de este máximo valor?
PASOS A SEGUIR:
a) Se calcula el gradiente en dicho punto. $\vec{\nabla} F = 2z\vec{i} - 2y\vec{j} + 2x\vec{k} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$
b) Se determina el módulo del vector gradiente = $\sqrt{56} = 7{,}48$

En un campo escalar de temperaturas, si se establecen las curvas de nivel térmico (ISOTERMAS), entre los focos caliente y frío, y se dibujan los gradientes perpendiculares en cada punto a la curva. El campo de gradientes estaría constituido por todo el espacio donde se establecen los diferentes gradientes. Esto se podría elaborar en invierno en el aula de física (fig.6), con un termómetro sensible, dejando alguna ventana abierta (foco a menor temperatura), trazando las isotermas que se acercan al foco caliente (radiador), y en la que cada alumno podría ser el punto de aplicación del vector gradiente, estableciendo el campo de gradientes.

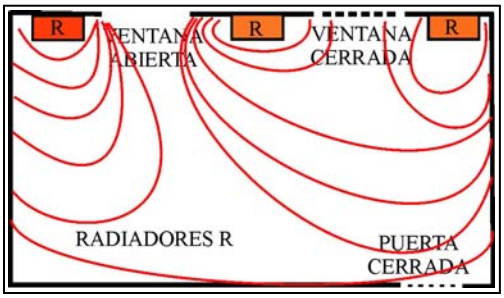


Fig.6

En un aula de 8 por 4,5 m, como la de la figura 5, las isotermas presentadas variarian en un grado celsius y el gradiente sería aproximadamente de 1ºC/m.

Cuando se dan campos escalares que son conservativos, la función escalar que los engendró se denomina FUNCIÓN POTENCIAL V, y la INTENSIDAD $\bar{I}$ del campo de gradientes es <u>EL GRADIENTE DE DICHA FUNCIÓN:</u> $\vec{I} = -\vec{\nabla} V$. (5)
De esta forma dada la función potencial de un campo, se podría determinar la intensidad del campo de gradientes. Así mismo si V es constante, $\vec{I} = 0$

¿Por qué el signo menos?
El signo menos surge en virtud de la igualdad vectorial, dado que el gradiente por convenio tiene siempre sentido creciente, mientras que la intensidad de un campo lo tiene al contrario.

APLICACIÓN

Ej5. Dada la función potencial $U = x^3 + y^3 + z^3$, calcular la intensidad de su campo de gradientes en el punto (1, 1, 1) Siguiendo la mecánica aplicada en los ejercicios anteriores:

a) $\vec{I} = -\vec{\nabla} U = -(3x^2\vec{i} + 3y^2\vec{j} + 3z^2\vec{k}) = -3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$

5. CAMPOS VECTORIALES.

Los campos más estudiados son los vectoriales[7], puesto que vivimos inmersos en ellos, interaccionado a través de dichos campos toda la materia. Los campos que marcan las interacciones que ocurren en la naturaleza, son CAMPOS DE FUERZAS[8], entre los que tenemos: EL CAMPO GRAVITATORIO, creado por la interacción entre masas, EL CAMPO ELECTROMAGNETICO, originado por la interacción entre cargas (eléctrico si las cargas están en reposo, y magnético si están en movimiento). En estos campos las fuerzas surgen sin soporte material, y tienen un alcance infinito. Existen otros campos de fuerzas en los que es necesario dicho soporte, y son de corto alcance: EL CAMPO NUCLEAR, responsable de la interacción nuclear, y el CAMPO DÉBIL, que regula la interacción entre diferentes tipos de partículas nucleares.

¿Cuál es el origen[9] de los campos de fuerzas?

Antiguamente se justificaban a través de la acción de la magnitud creadora del campo, llamada FUENTE DE CAMPO o MAGNITUD ACTIVA A, a través del espacio. Así para explicar por qué una masa (La Tierra), atraía a otra masa (una piedra), se razona diciendo que la piedra se encontraba dentro del campo creado por la Tierra, y por lo tanto experimentaba unos efectos particulares, denominados GRAVITATORIOS (derivado del latín gravis, pesado).[10]

Actualmente la idea del origen de la acción de los campos de fuerza es diferente. La magnitud activa que actúa como fuente u origen del campo, crea una perturbación en el espacio que la rodea que se propaga con o sin soporte material hasta alcanzar a otras magnitudes de su misma naturaleza[11]. Por ejemplo, si se imagina una tela tensa (sería el espacio del campo vectorial). Si sobre ella se dispone una bolita de cristal, permanecerá en reposo, como su masa es muy pequeña es incapaz de deformar la tela.

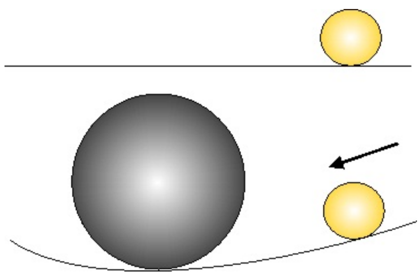


Fig.7

Sin embargo si en otro punto de la tela se sitúa una bola de acero, ésta sí la deformará, y la bola de cristal se acercará a ella. Por lo tanto, la bola de acero actuará como fuente de un campo que perturbando el medio en que se encuentra y deformando su espacio, es capaz de actuar sobre la otra bola (fig.7).

Se define la intensidad de un campo de fuerza $\vec{I}$ como la fuerza/ unidad de magnitud activa: $\vec{I} = \vec{F}/A$.
Según esto en los tres campos macroscópicos: **GRAVITATORIO, ELÉCTRICO y MAGNÉTICO**, de alcance infinito, las características generales serían (tabla 1)[12]:

---

7 Einstein en su libro:"La evolución de la Física" de 1961, escribe que:"El concepto de campo es el invento físico mas importante desde los tiempos de Newton".

8 La acción a distancia ya fue postulada por Newton, pero la teoría de los campos vectoriales se puede atribuir a Faraday, entre 1830-60. Después de estudiar los experimentos de Oersted y de Ampère, y apoyándose en las ideas metafísicas de Boscovich y Kant, supone que dichas acciones implican campos de puntos de fuerza, cuya sucesión forman las "*líneas de fuerza móviles*", unificando las acciones gravitatorias, eléctricas y magnéticas, aunque no fuera partidario de la acción a distancia, sino a través de los puntos de fuerza, ya que según él las líneas de fuerza curvadas, características del campo magnético se oponían a la acción a distancia, que presuponía líneas rectas.

9 La teoría de los campos de fuerza evolucionó mucho desde Faraday, Thomson, Maxwell, Heaviside, Lorentz hasta Einstein. Para Faraday, el campo estaba lleno de líneas de fuerza, cuya distribución dependía de la de los cuerpos situados en su seno, de forma que la acción mecánica y eléctrica sobre cada cuerpo venía determinada por las líneas que convergían en él. Maxwell, rechaza la teoría de los campos de fuerza de Faraday aplicada a los cuerpos, adoptando una teoría de la carga y de la corriente fundamentada en el concepto de campo. Explicaba los campos eléctricos y magnéticos como materia en movimiento. Estos campos eran independientes aunque se impenetraban. Según Maxwell, la materia ordinaria se cargaba al desplazar el material de las bolas eléctricas que contiene en su interior (debe recordarse que el electrón se descubriría casi 50 años después). Estas bolas eléctricas inmateriales arrastraban unos remolinos materiales magnéticos en forma de tubos hexagonales, como si fuera un engranaje, siendo las aristas de los hexágonos las correas de transmisión. Cuando las bolas eléctricas saltaban de un remolino a otro, producían calor. En su "Treatise on Electricity and Magnetism", de 1865, decía lo siguiente: "*La fuerza magnética es el efecto de la fuerza centrífuga de los remolinos. La inducción magnética es el efecto de las fuerzas cuando varía la velocidad de los remolinos*".Lorentz, adaptó la teoría de campos, a los electrones que ya se habían descubierto, y Einstein, introduce el espacio curvo y la relación masa energía en la teoría de campos.

10 La palabra GRAVEDAD, se empleó en castellano, mucho antes del descubrimiento de la Gravitación Universal, como GRAVEZA, en el sentido de molestia, pesantez.

11 Inicialmente se creía que el medio donde se producía la interacción era lo que se denominaba éter, transmitido de la filosofía griega

12 Un cuadro mas completo de relaciones vectoriales se presenta en esta web, en la sección"Cuadros de conceptos relacionables". Título: *Campos vectoriales.*

Tabla 1

CAMPO	MAGNITUD ACTIVA A	INTENSIDAD $\vec{I} = \vec{F}/A$	UNIDADES	INTERACCIÓN $\vec{F} = k\frac{AA'}{\lvert\vec{r}\rvert^3}\vec{r}$	k (u.S.I.)	TIPO (magnitudes semejantes)
Gravitatorio	Masa m	$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$	N/kg o m/s^2	$\vec{F} = -k\frac{mm'}{\lvert\vec{r}\rvert^3}\vec{r}$	$6{,}67.10^{-11}$	ATRACTIVA
Eléctrico	Carga, q	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	N/C o V/m	$\vec{F} = k\frac{qq'}{\lvert\vec{r}\rvert^3}\vec{r}$	9.10^9	REPULSIVA O ATRACTIVA
Magnético	Carga en movimiento, $q\vec{v}$	$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{q\vec{v}\wedge\vec{u}_r}{\lvert\vec{r}\rvert^2}$	N.s/C.m (Tesla, T)	$\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$	10^{-7}	REPULSIVA O ATRACTIVA

a) En el campo eléctrico $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ (siendo ε el coeficiente dieléctrico o permitividad del medio), mientras que en el campo magnético es $\frac{\mu}{4\pi}$, siendo **:** la permeabilidad magnética del medio.

b) En el campo gravitatorio y eléctrico, la intensidad del campo tiene la misma dirección que la fuerza, dado que la magnitud activa es escalar, sin embargo no ocurre lo mismo en el magnético, pues la velocidad $\vec{v}$ es un vector y la fuerza sobre una carga en un campo $\vec{B}$ responde a un producto vectorial $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$ [13]

c) Si los campos vectoriales estuvieran integrados por varias magnitudes activas, sus efectos o intensidades se sumarían vectorialmente, a partir de un principio llamado de superposición de campos, de tal modo que la presencia de cada uno no perturba la acción de los demás de modo individual.

6. **LÍNEAS DE FUERZA**

En 1838, Faraday, a través de los experimentos realizados con los campos magnéticos y visualizar como se orientaba el polvillo de hierro en tales campos, sugirió una forma de visualizar los campos de fuerzas, surgiendo lo que denominó LÍNEA DE FUERZA (“*línea de fuerza móvil*”)[14]. Las líneas de fuerza de un campo vectorial, deben cumplir estas condiciones:

a) En cualquier punto del campo, su intensidad deberá ser tangente a dicha línea, lo que matemáticamente se puede expresar de forma que el producto vectorial de la intensidad del campo por un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la línea del campo será nulo.
$\int \vec{I}\wedge d\vec{r} = 0$ (como el producto vectorial depende del seno del ángulo formado, si es 0, por ser tangente, sen 0° =0)

b) En los campos eléctricos y gravitatorios, la línea de fuerza corresponderá aproximadamente a la trayectoria que seguiría la unidad de magnitud activa abandonada en dicho campo, si se moviera a

[13] Maxwell, a la intensidad del campo magnético, la representó por la letra H, y medía la velocidad de los remolinos magnéticos en su superficie, de forma que la dirección de H se tomaba a lo largo del eje del remolino.

[14] En 1845, William Thomson, mas tarde Lord Kelvin, proporcionaría a Faraday el tratamiento matemático de las líneas de fuerza. Faraday atribuía a las líneas de fuerza un movimiento continuo en el espacio y en el tiempo, estableciendo el principio de conservación de la fuerza y llegando a explicar la radiación y la luz, como un estado de vibración de las líneas de fuerza. El desarrollo de la teoría de las líneas de fuerza fue completado por Maxwell, a través de sus trabajos de 1855 (“*On Faraday’s Lines of Force*”) y 1861 (“*On Physical Lines of Force*”), aunque a diferencia de las de Faraday, éstas tenían masa, siendo como “*barras flexibles con superficies rugosas*” dependientes de la permeabilidad del medio μ. Einstein, no era partidario de las líneas de fuerza.

velocidad constante[15] o si su magnitud activa fuera despreciable. El vector campo existente en ese punto es siempre tangente a la línea de fuerza.

c) A efectos de visualizar el campo se dibujan las líneas de fuerza[16] de un determinado campo más o menos apretadas. Allí donde sea más intenso van más juntas mientras que donde es menos intenso van más separadas. Por lo tanto no es arbitrario sino que está relacionado con la intensidad de dicho campo, de tal forma que el número de líneas de fuerza que atraviesa perpendicularmente un elemento de superficie, deberá ser proporcional a su intensidad. Este conjunto de líneas de fuerza se denomina flujo Φ, de tal forma que:

$$\Phi = \int \vec{I} \bullet d\vec{S} \qquad (6) \qquad (\bullet \text{ producto escalar}).$$ [17]

Así, por ejemplo para visualizar el campo creado por la carga eléctrica positiva, de una carga de 10C deberán salir 10 veces más líneas de fuerza que de otra de 1 culombio.

6.1. LÍNEAS DE FUERZA Y DE POTENCIAL EN EL CAMPO GRAVITATORIO

En los campos gravitatorios creados por masas aisladas, dado que dichos campos son atractivos, las líneas de fuerza deberán ser entrantes, en la magnitud activa, coincidiendo su dirección con la de los radios (fig.8). Si se abandona por lo tanto una unidad de masa m en uno de los puntos dados, A, B, o C, seguiría aproximadamente la trayectoria indicada por la línea de fuerza hasta terminar en M (ver nota al pie 12).

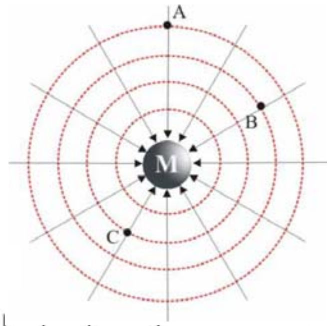


Fig.8

Si el campo se originara por la acción de varias masas, éstas se curvarían, de forma que en cada punto la intensidad del campo resultante fuera TANGENTE a la línea de fuerza.

En la fig.9, los campos gravitatorios creados por cada masa M, en el punto P, $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$, que individualmente son radiales y dirigidos a las masas respectivas se suman vectorialmente, y la intensidad resultante $\vec{g}_t$, es tangente a la línea de fuerza que pasa por P.

Las líneas isotímicas de potencial (curvas rojas punteadas), se cortan perpendicularmente con las líneas de fuerza en cada punto del campo.

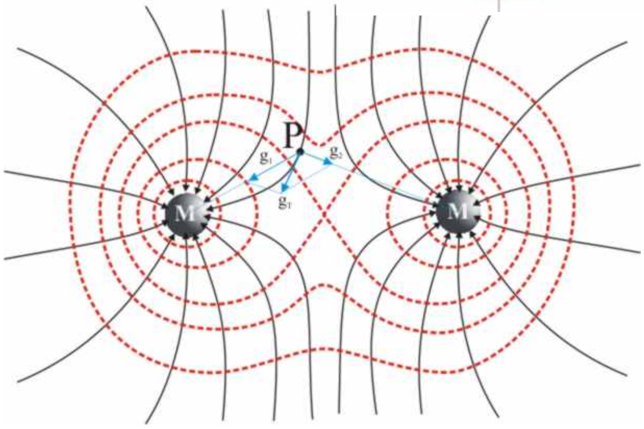


Fig.9

---

[15] Lo que ocurre es que al acelerarse la magnitud activa por efecto de la fuerza, se sale de dicha trayectoria. Sólo cuando dicha fuerza es despreciable y la aceleración tiende a cero, la sigue.

[16] En 1845, William Thomson, mas tarde Lord Kelvin, proporcionaría a Faraday el tratamiento matemático de las líneas de fuerza. Faraday atribuía a las líneas de fuerza un movimiento continuo en el espacio y en el tiempo, estableciendo el principio de conservación de la fuerza y llegando a explicar la radiación y la luz, como un estado de vibración de las líneas de fuerza. El desarrollo de la teoría de las líneas de fuerza fue completado por Maxwell, a través de sus trabajos de 1855 (“*On Faraday’s Lines of Force*”) y 1861 (“*On Physical Lines of Force*”), aunque a diferencia de las de Faraday, éstas tenían masa, siendo como “*barras flexibles con superficies rugosas*” dependientes de la permeabilidad del medio μ. Einstein, no era partidario de las líneas de fuerza.

[17] Una definición mas general del flujo, fuera del nivel de esta introducción a los campos vectoriales sería, “la integral de superficie de la componente normal del vector a que hace referencia el campo”

6.2. LÍNEAS DE FUERZA Y DE POTENCIAL EN EL CAMPO ELÉCTRICO.

En los campos eléctricos podremos considerar dos casos, según sean creados por la carga positiva que se toma como patrón desde los experimentos de Benjamín Franklin a mediados del siglo XVIII ("los cuerpos adquirían electricidad cuando se cargaban positivamente"), o por la carga negativa[18]. En el primer caso las líneas de fuerza son salientes, y la magnitud activa actúa como una FUENTE DE LÍNEAS DE FUERZA, coincidiendo con los radios cuando se trata de cargas aisladas (fig.10).
Si la magnitud activa fuera la carga negativa, el campo eléctrico actuaría como el gravitatorio (fig.11).

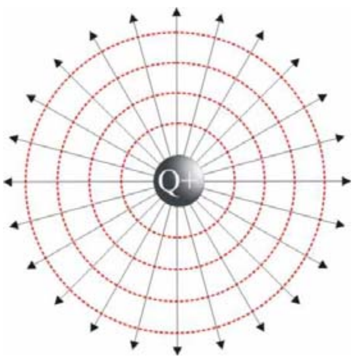


Fig.10

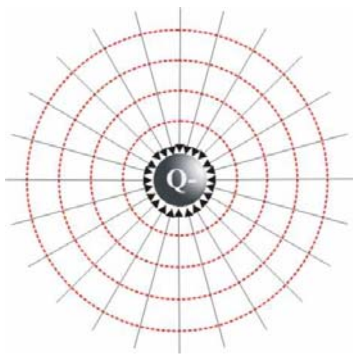


Fig.11

Si el campo se origina por superposición de efectos de varias cargas de igual o diferente signo, las líneas de fuerza se curvarán de forman que salgan de las positivas y entren las negativas. Obsérvese la figura 12 con líneas de fuerza saliendo de la carga + y entrando en la -. La intensidad del campo debido a cada carga Q, $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, son radiales, respecto a las mismas. La intensidad resultante $\mathbf{E_T}$, la suma vectorial de ambas, será tangente a la línea de fuerza en ese punto(fig.12 y 13).
En cualquier caso por un mismo punto del espacio SÓLO PODRÁ PASAR UNA ÚNICA LÍNEA DE FUERZA, dado que el principio de superposición de los campos individuales impediría lo contrario; sólo el campo resultante de la acción de varias magnitudes activas, será el tangente a la línea de fuerza que será ÚNICA.

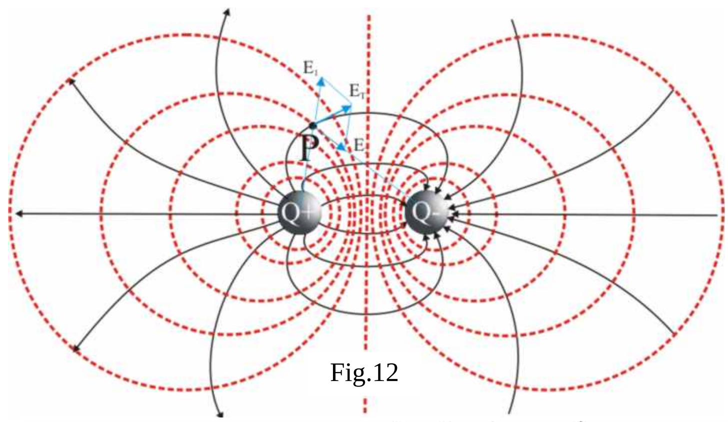


Fig.12

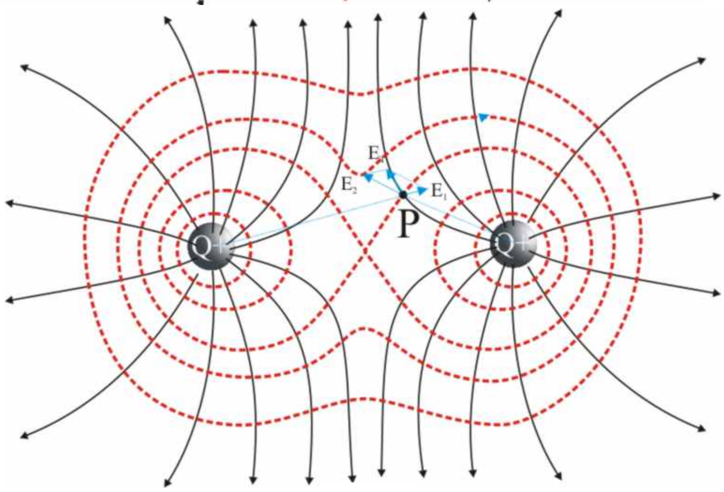


Fig.13

[18] Benjamín Franklin creía que durante la descarga eléctrica solamente circulaba un fluido cuyas partículas se repelían entre sí y atraían a las de la materia ordinaria. La ley de la interacción eléctrica entre cargas (inversa del cuadrado de la distancia, fue explicada por el químico Priestley, antes que por Coulomb, que realizó la parte experimental, mientras que la de la interacción magnética, también inversa a dicho cuadrado, fue enunciada por Maxwell, que a través de 8 ecuaciones en su "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field", de 1864, dio el aporte matemático para explicar el comportamiento del campo electromagnético(al aplicarlas sobre los distintos ejes, algunas aparecían triplicadas). Estas ecuaciones fueron convertidas en 6 por Heaviside, que las desarrolló matemáticamente, y en 4, por Lorentz. Actualmente son: la divergencia del campo eléctrico es proporcional a la densidad de carga eléctrica: $\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; el rotacional de la intensidad del campo eléctrico es igual a - la variación de la intensidad del campo magnético con el tiempo, $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$. La divergencia de la intensidad del campo magnético es nula $\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$, por fin relaciona el rotacional de la intensidad del campo magnético con la variación del campo eléctrico con el tiempo, y con la densidad de la carga en movimiento: $c^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$. Si no se depende del tiempo, la segunda ecuación es nula, así como el término $\frac{d\vec{E}}{dt}$.

En caso de varias fuentes y sumideros se producirán zonas libres o espacios sin líneas en los que la intensidad resultante podrá ser nula. Obsérvese la figura con dos cargas positivas. Las líneas de puntos en los dibujos dados corresponden a líneas isotímicas, en este caso LÍNEAS DE POTENCIAL, perpendiculares en cada punto a la línea de fuerza (fig.10, 11, 12 y 13).

6.3. LÍNEAS DE FUERZA DEL CAMPO MAGNÉTICO.

En los campos magnéticos creados por cargas en movimiento que circulan por un conductor (corrientes eléctricas), las líneas de fuerza son circunferencias concéntricas cuyos centros serán los diferentes puntos del conductor por donde circulan (fig.14), debido a que se cumplirá el producto vectorial, los vectores campo magnético siempre serán tangentes a ella, y estarán en planos perpendiculares a dicho conductor, que deberá contener en cada instante a la carga en movimiento.

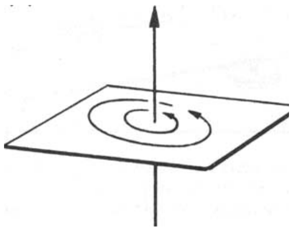


Fig.14

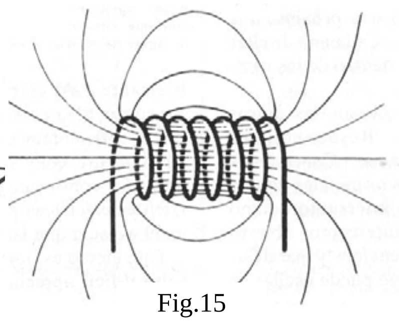


Fig.15

Si el elemento por donde circula la carga realice un movimiento circular o sucesivos movimientos circulares (un imán, o un solenoide, conductor en espiral de radio constante) (fig.15, 16, y 17), las líneas de fuerza ya no serán circunferencias concéntricas, como se aprecia en los dibujos. Pero son siempre líneas cerradas, a diferencia de las líneas de fuerza de los campos eléctricos y gravitatorios que son abiertas.

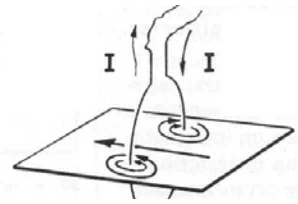


Fig.16

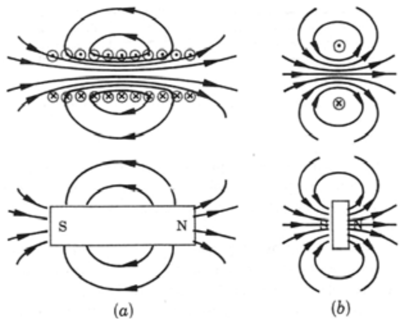


Fig.17

Si se difunde polvo de hierro, en el plano perpendicular a un conductor, la distribución de la granalla de hierro, marcará la trayectoria de las líneas de fuerza del campo magnético, para el caso de un conductor rectilíneo (fig.18), una espira circular (fig.19), un solenoide (fig.20) y un imán recto (fig 21)

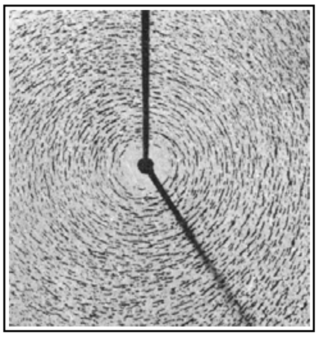


Fig.18

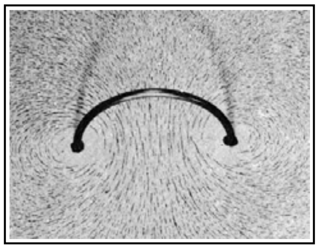


Fig.19

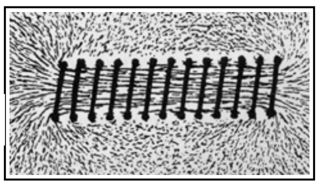


Fig.20

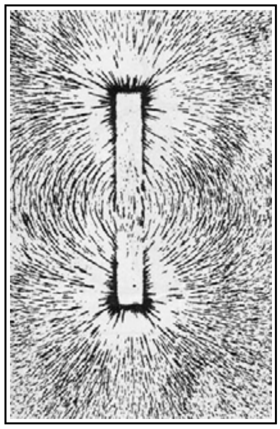


Fig.21

Conviene diferenciar las líneas cerradas que pasan a través de un imán o de un solenoide (conductor en espiral de radio constante), con las abiertas de un dipolo, que salen de la carga positiva y entran o mueren en la negativa. Se puede apreciar a través de los dibujos, la similitud entre las líneas de fuerza del campo magnético creado por un imán recto (fig.17 a y b), y las originadas por la corriente que circula por un solenoide. En la figura 17b superior, en el convenio del dibujo, un círculo con un punto indica que la corriente que circula por el conductor (de sección circular)se aproxima al lector que ve el dibujo, mientras que la cruz, expresa que se aleja. Este convenio se sigue en las espiras del solenoide de la figura 17 a superior.