INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CAMPOS III

10. CIRCULACIÓN DEL VECTOR CAMPO: CAMPOS CONSERVATIVOS.

CONCEPTOS.

Cuando hacemos recorrer el vector campo (intensidad de un campo), a lo largo de una línea (un camino, con elemento infinitesimal $d\vec{r}$), se define la CIRCULACIÓN DE DICHO VECTOR como:

$$C = \int \vec{I} \bullet d\vec{r} \qquad (19)$$

o sea la integral a lo largo del recorrido efectuado, del producto escalar de la intensidad del campo por el vector desplazamiento. Es una magnitud escalar por proceder de un producto escalar.

Entre dos puntos a y b sería: $Cab = \int_a^b \vec{I} \bullet d\vec{r} \quad (20)$

Si el recorrido se efectúa sobre una línea cerrada la expresión sería: $C = \oint \vec{I} \bullet d\vec{r}$ (muchas veces se reserva el nombre de CIRCULACIÓN específicamente para este recorrido, aplicando el de PROCESIÓN, cuando es abierto).

Dado que por definición $\vec{I} = \frac{\vec{F}}{A}$, al sustituir en la expresión $C = \int \frac{\vec{F}}{A} \bullet d\vec{r}$. Al definirse el trabajo W como $W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r}$, tendremos que la circulación del vector campo no es más que:

EL TRABAJO POR UNIDAD DE MAGNITUD ACTIVA

Vamos a aplicar los conceptos anteriores y calcular la circulación de $\vec{I}$ desde A hasta B, y luego desde B hasta A en el dibujo dado (fig.42)

Si la intensidad es tal, que se mantiene constante, es evidente que al ir de A hasta B, el desplazamiento $d\vec{r}$, tendrá sentido contrario al efectuado al regresar a A, y por lo tanto siendo un producto escalar, el ángulo será suplementario, y el coseno, de signo contrario Como su módulo es el mismo, ocurrirá que al sumarlo se anularán, siendo la circulación total nula. Los campos vectoriales en los que la circulación del vector campo a lo largo de un recorrido cerrado es nula, se denominan CAMPOS CONSERVATIVOS[1].

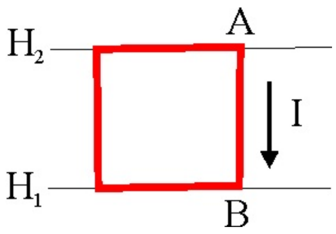


Fig.42

Si consideramos un campo de gradientes, como podría ser el de alturas esto es aquél en que $\vec{I} = \vec{\nabla} H$ y lo hacemos circular a lo largo de una línea cerrada, tendríamos que $C = \oint (\vec{\nabla} H) \bullet d\vec{r} = H_2 - H_1$, como coincide la altura final con la inicial, al ser el recorrido cerrado, C= 0, y el campo será CONSERVATIVO. Por lo tanto todo campo cuya intensidad sea el gradiente de una función (llamada función potencial), será siempre CONSERVATIVO.

¿Cómo sabremos cuándo un campo es conservativo?

a) Si su intensidad deriva de una función potencial a través de su gradiente.
b) Si la circulación de su intensidad no depende del camino
c) Si la circulación de su intensidad en un recorrido cerrado es 0.

---

[1] Faraday atribuía a las líneas de fuerza un movimiento continuo en el espacio y en el tiempo y creía que la fuerza se conservaba, puesto que conservaba su identidad a través de dichos cambios en el espacio y en el tiempo, ya que en su época el concepto de energía no estaba todavía desarrollado (lo haría en la segunda mitad del siglo XIX), y así los llamó de "fuerza conservativa". Naturalmente la idea de Faraday de un campo de fuerza conservativa, no tiene nada que ver con el concepto actual. Helmholtz, en su trabajo de 1847 "On the Conservation of Force", basó su principio de conservación de la energía, en el de conservación de la fuerza de Faraday. En él demostró que el trabajo que ejerce un sistema de fuerzas centrales es igual a la variación de la "tensión" (después Young la llamará energía potencial), y que cualquier pérdida de "vis viva" (masa por el cuadrado de su velocidad, cuya mitad la llamará mas tarde Kelvin, energía cinética) de un cuerpo deberá ser compensada por un aumento de la tensión).

10.1. APLICACIÓN: DETERMINACIÓN DE UN CAMPO CONSERVATIVO

La circulación se calcularía exactamente igual que el trabajo, si la magnitud activa que crea el campo es la unidad o sea a través del proceso de integración de un producto escalar, considerando que:

$C = \int \vec{I} \bullet d\vec{r}$ y que $\vec{I} = I_x \vec{i} + I_y \vec{j} + I_z \vec{k}$,mientras que $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

Si se realiza el producto escalar, y se separa en integrales tendremos que:

$$C = \int I_x dx + \int I_y dy + \int I_z dz \qquad (21)$$

Al resolver cada integración, todo lo que no sea la variable será considerado constante.

APLICACIÓN

Ej14. Dado el campo vectorial $\vec{I} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, determina su circulación en el paralelepípedo de la figura 43, desde O hasta A, a través de los siguientes caminos
1) OCBA 2) OGFA. 3) OEDA.
Verificando si se trata o no de un campo conservativo.

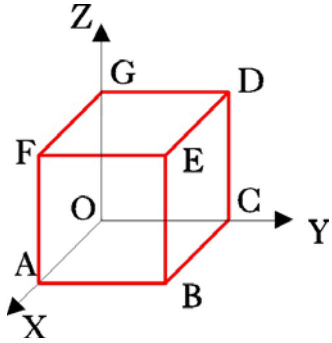


Fig.43

FÓRMULA A APLICAR: $C = \int I_x dx + \int I_y dy + \int I_z dz$

PASOS A SEGUIR:

a) Se efectúa el producto escalar, con lo que la expresión de la circulación es
$C = \int xdx + \int ydy + \int zdz$

b) Se lleva la expresión al camino tratado, y puesto que las aristas sobre los ejes X (a), Y (b) y Z(c), al integrar para estos valores produciría una circulación, para cualquiera de los recorridos dados C = $a^2/2 + b^2/2 + c^2/2$.

c) Conclusión: SE TRATA DE UN CAMPO CONSERVATIVO (la circulación no depende del camino)

Ej15 Un cierto campo de fuerzas viene dado por la expresión $\vec{F} = -4y\,\vec{i} + 4x\,\vec{j}$. Determina el trabajo desarrollado por la fuerza al desplazarse desde el punto (0,0) al (2,2), por el camino OAB y por el OCB, justificando su carácter conservativo o no conservativo (fig.44)

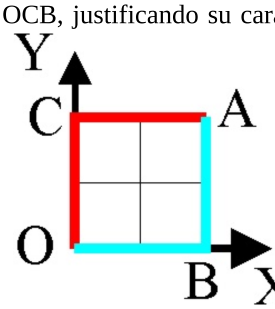


Fig.44

FÓRMULA A APLICAR: $C = \int I_x dx + \int I_y dy + \int I_z dz$.

PASOS A SEGUIR:

a) Se efectúa el producto escalar, con lo que la expresión de la circulación es
$C = \int -4ydx + \int 4xdy$. Se lleva la expresión a cada camino.

b) En OBA. Primero, en OB, x varía entre 0 y 2 y y = 0, por lo que $C_{OB} = 0$.
En BA, x es constante = 2, e y varía entre 0 y 2, por lo que
$C_{BA} = \int_0^2 4xdy = 4.2.2 = 16u\ de\ W$

c) En OCA. Primero, en OC, x= 0 , e y varía entre 0 y 2, por lo que $C_{OC} = 0$.
En CA, y es constante = 2 , y x varía entre 0 y 2, por lo que
$C_{CA} = \int_0^2 -4ydx = -4.2.2 = -16u\ de\ W$

d) Conclusión: EL CAMPO NO ES CONSERVATIVO porque la circulación entre O y A no es la misma por caminos distintos, o sea depende del camino

10.2. MÉTODOS GRÁFICOS PARA CONOCER SI UN CAMPO ES O NO CONSERVATIVO.

Se puede calcular a través de métodos gráficos si un campo es o no conservativo, si se conoce el dibujo de la intensidad o las líneas de fuerza. Para ello se elige un recorrido cerrado, y se efectúa a lo largo de ese recorrido, la circulación del vector campo, si es nula, se tratará de un campo conservativo

Ej16 Dadas las líneas de fuerza y los vectores campos, de la figura 45, justifica si se trata o no de un campo conservativo.
PASOS A SEGUIR:

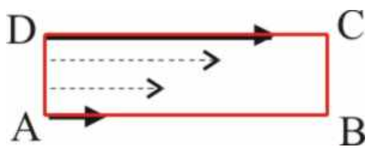


Fig.45

a) Siguiendo los ejemplos anteriores, se realizan las circulaciones parciales, eliminando las que se anulan, por ser perpendiculares intensidades y desplazamientos.
b) Si los caminos son iguales, observaríamos que la circulación total nunca sería nula, por lo que el campo NO SERÍA CONSERVATIVO.

Ej17. ¿Será conservativo un campo radial divergente creado por una magnitud activa puntual, como el dado por la figura 46?

PASOS A SEGUIR:

a) Se busca un itinerario para hacer circular el vector campo, en este caso al ser radial es conveniente elegir circunferencias, para eliminar la circulación en dichos tramos, ya que al ser radial , $\vec{I}$ y $d\vec{r}$ son perpendiculares en esos tramos (BC y DA) y su producto escalar es nulo.
b) La circulación sólo no se anula en los tramos AB y CD. En AB, el vector campo y el desplazamiento forman un ángulo de 0º, mientras que en CD, el ángulo es de 180º, y su coseno -1. Por este motivo, la circulación total es nula, y el campo CONSERVATIVO.

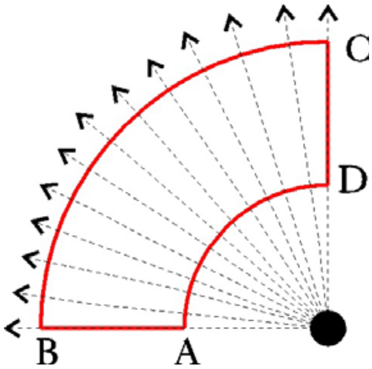


Fig.46

Ej18 Comprobar que el campo gravitatorio es conservativo, a través de la constancia de la circulación entre O (0,0) y B(2,2), por los dos caminos dados (fig.47).

PASOS A SEGUIR:

a) Dado que la intensidad del campo gravitatorio es -g **j** .
   Por el camino inferior OAB: $C_1 = -g\,\vec{j} \bullet \left(2\vec{i} + 2\vec{j}\right) = -2g$
b) Por el camino superior OB: $C_2 = -g\,\vec{j} \bullet \left(2\vec{i} + 2\vec{j}\right) = -2g$, tendremos el mismo resultado anterior.
c) Conclusión el campo es CONSERVATIVO.

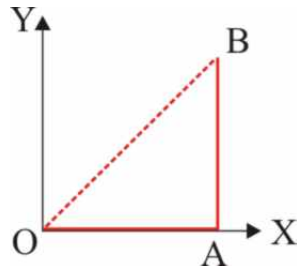


Fig.47

Cuando un campo es conservativo ¿Qué se conserva? Sencillamente la energía mecánica, que sólo se va transformando, de tal forma que no dependa del camino empleado en dicha transformación, las fuerzas del campo son FUERZAS CONSERVATIVAS. Es evidente que en la realidad existen fuerzas que disipan la energía: FUERZAS DISIPATIVAS, en este caso si se consideraran no se comportaría como campo conservativo. En la realidad el campo gravitatorio, debido al rozamiento con fluidos, no sería conservativo; sólo en el vacío. Conviene tener en cuenta que la energía térmica, es una forma de energía mecánica, pues se debe al movimiento caótico de las moléculas, y por lo tanto la conversión en energía interna de un sistema, o energía cinética interna, no produce efectos disipativos, actuando el campo de forma conservativa.

Es el caso de una catarata en un río. Las moléculas de agua poseen una velocidad (energía cinética), y una energía potencial, en la parte alta de la catarata. En la inferior, al producirse la caída del agua, con el consabido calentamiento, no ha habido pérdida teórica de energía, salvo la que se produzca por disipación a causa del rozamiento por aumento de velocidad, con el propio cauce. De esta forma, se conservaría la energía como se aprecia en el dibujo (fig.48), y el campo pese al desplazamiento que ha habido de las moléculas de agua ha actuado de forma conservativa.

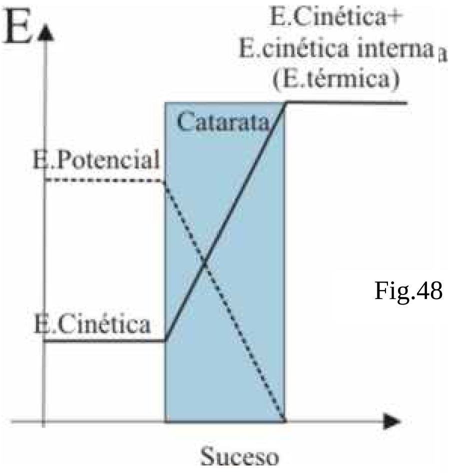


Fig.48

Ej19. ¿Las fuerzas centrales son conservativas?

CONSIDERACIONES

Un cuerpo sometido a fuerza centrales, y por lo tanto con una aceleración centrípeta, puede describir un movimiento circular (simplificado), o elíptico, como ocurre con el electrón en el átomo de hidrógeno, o la Tierra alrededor del Sol (fig.49)

PASOS A SEGUIR

a) Se dibuja la trayectoria circular, y la aceleración normal. La fuerza actuante es perpendicular por dicho motivo en cada instante a la trayectoria.
b) El desplazamiento infinitesimal a lo largo de dicha trayectoria, $d\vec{r}$ tangente a la trayectoria, en cada instante, es perpendicular a dicha fuerza central.
c) Como $W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r}$, y el ángulo formado por los vectores es de 90º, su coseno es 0, con lo cual W=0. Por lo tanto las fuerzas centrales no hacen trabajo, la circulación a lo largo de la circunferencia es nula y las fuerzas serán conservativas.

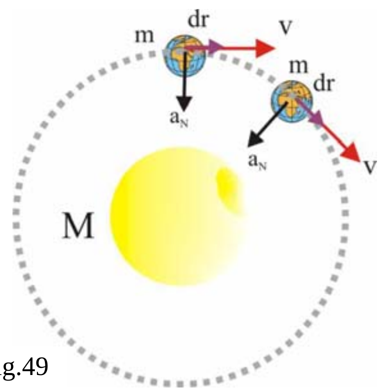


Fig.49

10.3. OTROS PROCEDIMIENTOS PARA CONOCER SI UN CAMPO ES CONSERVATIVO: EL ROTACIONAL DE UN CAMPO

La determinación del carácter conservativo de un campo, implica el cálculo de la circulación o del trabajo, por dos caminos diferentes o en una trayectoria cerrada, lo cual implica si la intensidad es variable, un desarrollo integral. Ahora bien, existe un operador matemático denominado ROTACIONAL, que lo simplifica: El ROTACIONAL DE UN CAMPO[2] se define como:

$$ROT\ \vec{I} = \vec{\nabla} \wedge \vec{I} \qquad (22)$$

esto es el producto vectorial del nabla por la intensidad del campo.

Por otra parte, el rotacional hace referencia a la circulación del vector campo a lo largo de una trayectoria cerrada que encierra determinada superficie, por lo que

$$C = \int \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{I}\right) \bullet d\vec{S} \qquad (23)$$

Esta es la expresión más simple del teorema de Stokes, que permite calcular la circulación de otra forma. Lo interesante es que si la circulación es 0 (campo conservativo), el ROTACIONAL TAMBIÉN LO SERÁ, por lo que se puede definir un campo conservativo como aquél cuyo ROTACIONAL ES NULO; $\vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$ (24), también llamada irrotacional.

Al hacer el producto vectorial del nabla $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{k}$ por la intensidad del campo

$\vec{I} = I_x\ \vec{i} + I_y\ \vec{j} + I_z\ \vec{k}$ e igualar a 0 cada componente, nos queda como condición de CAMPO CONSERVATIVO que:

$$\frac{\partial I_z}{\partial y} = \frac{\partial I_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial I_x}{\partial z} = \frac{\partial I_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial I_x}{\partial y} = \frac{\partial I_y}{\partial x} \qquad (25)$$

Dicho en otras palabras las "derivadas cruzadas deben ser iguales". Para que se cumpla esta condición de conservativo, deberán darse las tres igualdades, en el caso de existir 3 componentes. Por todo lo dicho los campos CONSERVATIVOS, también reciben el nombre de IRROTACIONALES, mientras que los NO CONSERVATIVOS, lo son ROTACIONALES, como el magnético. En estos campos, la intensidad depende del llamado potencial vector A[3], de forma que $\vec{I} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ [4]

APLICACIÓN

Ej20. Dado el campo $\vec{A} = \left(4xy - 3x^2z^2\right)\vec{i} + 2x^2\ \vec{j} - 2x^3z\,\vec{k}$, demuestra que es conservativo

CONSIDERACIÓN PREVIA: Todo lo que no sea la variable respecto a la que se deriva SE CONSIDERARÁ CONSTANTE

PASOS A SEGUIR:

a) Se aislan las componentes del campo: $I_x = (4xy - 3x^2z^2)$; $I_y = 2x^2$; $I_z = -2x^3z$
b) Derivada de la componente x del campo respecto a y, será igual a la derivada de la componente y del campo respecto a x, o sea $4x = 4x$
c) Derivada de la componente x del campo respecto a z, será igual a la derivada de la componente z del campo respecto a x, o sea $-6x^2z = -6x^2z$
d) Derivada de la componente y del campo respecto a z, será igual a la derivada de la componente z del campo respecto a y, o sea $0 = 0$
e) Por lo tanto como se producen las tres igualdades, el campo SERÁ CONSERVATIVO.

---

[2] Para Maxwell, lo que llamaba *"curl"* (bucle, rizo o rotor) de un campo de fuerzas, expresaba *"el par de rotación que se ejercía sobre las bolas eléctricas situadas en un punto del campo"*, suponiendo que había $1/2\pi$ bolas eléctricas por unidad de superficie de los remolinos magnéticos. Sin embargo no lo llama rotacional. En el mismo trabajo en el que define la convergencia del cuaternión σ =it+ju+kv, al efectuar la operación $\nabla\sigma = S\,\nabla\sigma + V\,\nabla\sigma$, como el primer término cambiado de signo. El segundo término que implica la operación: $i\left(\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dz}\right) + j\left(\frac{dt}{dz} - \frac{dv}{dx}\right) + k\left(\frac{du}{dx} - \frac{dt}{dy}\right)$, lo llama *"curl"* o *"version"*, que se podría traducir por rotor o vuelta. En carta al profesor Tait, le dice : *"La parte escalar la llamaría convergencia del vector función, y la parte vectorial la llamaría el "curl" (bucle) del vector función. Aquí el término bucle no tiene nada que ver con un tornillo o hélice. La palabra "turn" o "version" (vuelta) a su vez sería mejor que la palabra "twist" (giro), porque giro sugiere un tornillo. La palabra "curl" (bucle o rotor) está libre de la noción de rosca y es suficientemente clásica, aunque demasiado moderna para los matemáticos puros, así que por el bien de Cayley* (matemático de la época de Maxwell) *podría decir "curl" (rotor) (en la costumbre de enrollarse)"*

[3] El potencial vector **A** inicialmente fue definido por el alemán Neumann en 1845, y surge para poder aplicar la función potencial a un elemento de corriente arbitrario situado en el campo creado por otro circuito. Como tenía módulo y dirección de ahí lo de "vector".

[4] Maxwell lo había definido en la ecuación $\mu\mathbf{H}$ = rot **A**

En el caso de no hacerlo así, se tendría que hacer circular el vector campo, por dos caminos diferentes y determinar que la circulación no depende del camino, esto es como en el ejemplo 12.

Ej21. Dado el campo $\vec{F} = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$, determinar los valores de a,b y c, para que el campo sea conservativo.

PASOS A SEGUIR:

a) Se aislan las componentes del campo: $F_x = x + 2y + az$; $F_y = bx - 3y - z$ $F_z = 4x + cy + 2z$

b) Se derivan parcialmente de forma "cruzada", tal como en el caso anterior, igualando las expresiones. Así : a = 4 b = 2 c = -1

c) Se podría sustituir y comprobar si se trata o no de un campo conservativo:

$$\vec{F} = (x + 2y + 4z)\vec{i} + (2x - 3y - z)\vec{j} + (4x - y + 2z)\vec{k}$$

Calculando el trabajo por dos caminos diferentes, siguiendo el esquema del ejemplo 12. Por ejemplo, calculando el trabajo para ir de O hasta E, supuesto el lado del cubo igual a 1 (fig.50)

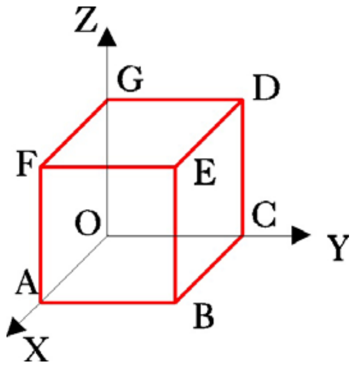


Fig.50

Como

$$W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz = \int (x + 2y + 4z)\,dz + \int (2x - 3y - z)dy + \int (4x - y + 2z)dz$$

Camino 1 : OCDE

En OC , x=0 , z= 0 e y varía entre 0 y 1; por lo que $W = \int_0^1 (2x - 3y - z)dy = \left[-\frac{3y^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

En CD , y=1 = cte ; (dy=0), x=0 y z varía entre 0 y 1, por lo que $W = \int_0^1 (4x - y + 2z)dz = \int_0^1 (2z - 1)dz = \left[z^2 - z\right]_0^1 = 0$

En DE, y=1= cte (dy=0) , z=1= cte (dz=0) , y x varía entre 0 y 1, por lo que: $W = \int_0^1 (x + 2y + z)dx = \int_0^1 (x + 6)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^1 = 6{,}5$. El trabajo total será -1,5 + 6,5 + 0 = 5 u. de trabajo.

Camino 2 : OABE

En OA, y=0 , z=0 , y x varía entre 0 y 1 por lo que $W = \int_0^1 (x + 2y + z)dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0{,}5$

En AB , x=1= cte (dx=0) , z= 0 e y varía entre 0 y 1; por lo que $W = \int_0^1 (2x - 3y - z)dy = \left[2y - \frac{3y^2}{2}\right]_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = 0{,}5$

En BE , y=1 = cte ; (dy=0), x=1 (dx=0) y z varía entre 0 y 1, por lo que

$$W = \int_0^1 (4x - y + 2z)dz = \int_0^1 (2z + 3)dz = \left[z^2 + 3z\right]_0^1 = 4$$

El trabajo total será 0,5 + 0,5 + 3 = 5 u. de trabajo. EL CAMPO ES CONSERVATIVO.

Hemos visto que todo campo cuya intensidad sea el gradiente de una función escalar, denominada función potencial o simplemente potencial V, es un campo conservativo. Por lo tanto si $\vec{I} = -\vec{\nabla}V$, vamos a demostrar que este campo cumple que $\vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$

a) Desde el punto de vista del producto vectorial $\vec{\nabla} \wedge \left(-\vec{\nabla}V\right) = 0$. Porque el nabla y el -nabla de V, forman un ángulo de 180º, cuyo seno vale 0.

b) Si se realiza el producto vectorial a través del determinante respectivo, se observará que tiene dos filas iguales, por lo que también debe valer 0.

En consecuencia : TODO CAMPO CONSERVATIVO TIENE UNA INTENSIDAD QUE ES EL GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN POTENCIAL CON EL SIGNO CONTRARIO (convenio de signos).

10.4. EL OPERADOR DIVERGENCIA Y LOS CAMPOS CONSERVATIVOS

Si en un campo conservativo $\vec{I} = -\vec{\nabla} V$ ¿Cuánto vale su divergencia y qué significado tiene?

La operación $\vec{\nabla} \bullet \vec{I} = \vec{\nabla} \bullet \left(-\vec{\nabla} V \right) = -\nabla^2 V$. Esta operación, prescindiendo del signo, se denomina actualmente laplaciana[5] y se puede expresar como : $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Se ha visto que

a) Para campos divergentes (ELÉCTRICO) $\vec{\nabla} \bullet \vec{I} = 4\pi k\rho$ o $\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 4\pi k\rho$

b) Para campos convergentes (GRAVITATORIO) $\vec{\nabla} \bullet \vec{I} = -4\pi G\rho$ o $\vec{\nabla} \bullet \vec{g} = -4\pi G\rho$

Al aplicar el concepto de laplaciana, y sustituyendo k:

Para campos divergentes, como el creado por la carga positiva, $\nabla^2 V = -4\pi\, k\rho = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ [6]

Teniendo en cuenta que

Si lo creara la carga negativa, cambiaría de signo

Para campos divergentes, como el creado por la masa, $\nabla^2 V = 4\pi\, G\rho$

Estas ecuaciones se denominan de Poisson.

En regiones donde no existe magnitud activa, y por lo tanto la densidad volúmica ρ, es nula, las ecuaciones anteriores de Poisson, se transforman en $\nabla^2 V = 0$, que se conoce como ecuación de Laplace.

Actualmente el operador laplaciano, $\nabla^2 V$ o divergencia del gradiente $\vec{\nabla} \bullet \left(\vec{\nabla} V \right)$, se puede simbolizar por Δ, aunque pueda confundirse con el de incremento.

---

5 La derivada segunda de una magnitud ya fue definida por Hamilton en 1846 y 47, como $-\triangleleft^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2$. Maxwell, en 1870, en el documento "Clasificación matemática de las cantidades físicas", lo expone así: $\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)$, y la bautiza como "*concentración de la función*" a la que se aplica (Maxwell había empleado nombres curiosos para los operadores matemáticos, así a la expresión ∇P , siendo P una función escalar de la posición, la denominó "*pendiente*" de P). Sin embargo Heaviside, en 1884, lo usa como $\nabla^2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)$. La polémica del signo aplicado a ∇^2 , aparece en varios autores como Tait, y Thomson (Lord Kelvin), y todavía sigue en 1890, entre los profesores Knott , Macfarlane y Cayley, prolongándose hasta bien entrado el siglo XX.

6 Esta ecuación fue formulada por Poisson en 1812, de ahí que lleve su nombre, aunque sin emplear el simbolismo nabla, creado mucho mas tarde. Para su demostración parte de la ecuación del potencial de Laplace, formulada con anterioridad $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$

11. POTENCIAL[7] DE UN CAMPO CONSERVATIVO

Hemos visto que $\vec{I} = -\vec{\nabla}V$, lo que en campos radiales, esto es, aquellos creados por magnitudes activas puntuales, se podría disponer $V = -\int_0^r \vec{I} \bullet d\vec{r}$, lo cual nos dará la diferencia de potencial entre dos puntos, uno de ellos el de referencia O.

Como $\vec{I} = \dfrac{\vec{F}}{A}$ y $V = -\int \dfrac{\vec{F}}{A} \bullet d\vec{r}$, pero como $W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r}$, la diferencia de potencial entre dos puntos a y b sería el TRABAJO PARA LLEVAR LA UNIDAD DE MAGNITUD ACTIVA DE UN PUNTO DE REFERENCIA O a OTRO, PERO CON EL SIGNO CONTRARIO. (A = 1).

Para determinar el potencial en un punto, conviene tomar una referencia 0, esto es un punto en el que el potencial sea 0, o donde las interacciones sean nulas; este punto es el infinito. Por este motivo y teniendo en cuenta que tiene un signo menos delante, supone una inversión en los límites de la integración, se podría definir el potencial en un punto como:

EL TRABAJO PARA LLEVAR LA UNIDAD DE MAGNITUD ACTIVA DESDE EL INFINITO AL PUNTO y coincide con la energía potencial en ese punto

LA ENERGÍA POTENCIAL ES IGUAL AL POTENCIAL por la CANTIDAD DE MAGNITUD ACTIVA (Ep = A.V).

Por lo tanto el trabajo para llevar una determinada cantidad de magnitud activa desde A hasta B, correspondería a $W_{A\rightarrow B} = -A\cdot(V_B - V_A)$.

Cambiando los signos: W = $AV_A - AV_B$ = *Energía potencial inicial – Energía potencial final*. (26)

Por lo general esa cantidad de magnitud activa que se sitúa en un campo, para comprobar sus efectos, y que es independiente de la creadora del campo, es lo que se denomina MAGNITUD ACTIVA DE PRUEBA, y que en el campo eléctrico sería la CARGA DE PRUEBA (siempre refiriéndose a carga positiva). Suele ser pequeña, y en el límite hace referencia a la unidad de magnitud activa.

Las líneas y superficies en las que el potencial del campo es constante, se denominan LÍNEAS DE POTENCIAL y SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES, respectivamente.

En los campos newtonianos (fuerza de interacción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), es muy fácil determinar la función potencial, debido a su simetría radial (magnitudes activas puntuales o consideradas como puntuales). Así $V = -\int \vec{I} \bullet d\vec{r}$, como $\vec{I} = k\dfrac{A}{(|\vec{r}|)^2}\vec{u}_r$,

$$V = -\int k\frac{A}{(|\vec{r}|)^2}\vec{u}_r \bullet d\vec{r} \quad (28)$$

que producirá, una vez realizado el producto escalar y la integral una expresión del potencial:

$$V = k\frac{A}{|\vec{r}|} \quad (29)$$

a) Si el campo es DIVERGENTE, como el ELÉCTRICO, (A= q>0),$V = k\dfrac{q}{|\vec{r}|}$ (30) en Voltio o J C^{-1}

b) Si el campo es CONVERGENTE, como el GRAVITATORIO, (A= m, k = -G) ,
$V = -G\dfrac{m}{|\vec{r}|}$ (31) en N.m kg^{-1} o J kg^{-1}

---

[7] El término potencial, es relativamente moderno, dado que tampoco existía el de energía potencial, que Helmholtz, denominaba tensión. Fue Rankine el que en 1842 (algunos historiadores de la ciencia, creen que Young se anticipó en su nombramiento), la bautizó como energía potencial y de ahí potencial. La diferencia de potencial inherente a la ley de Ohm, de 1826, se la había llamado "*fuerza electroscópica*". No llegó a demostrarse que eran lo mismo hasta que Kirchhoff, lo hizo en 1849.

c) Si el campo es CONVERGENTE, como el ELÉCTRICO (A = q<0), $V = -k\dfrac{q}{|\vec{r}|}$

En todo caso para una determinada cantidad de magnitud activa la expresión $V.|\vec{r}|$ = cte, lo cual en gráficas (V, r) , corresponde a una HIPÉRBOLA EQUILÁTERA (fig. 51 y 52)

Fig.51

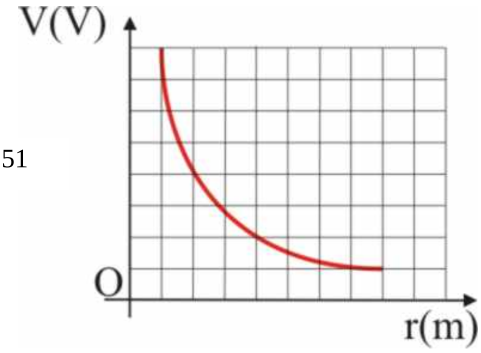
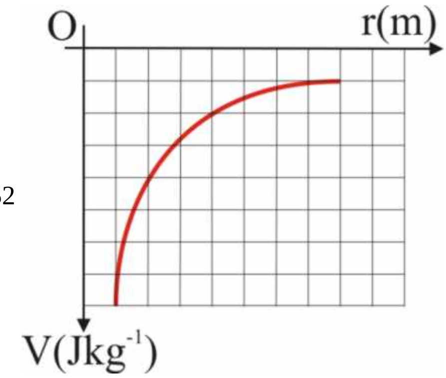


Fig.52



Como únicamente dependen del radio, las líneas de igual potencial o líneas de potencial (líneas isotímicas) serán CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS.

¿Qué diferencias hay entre las variaciones del potencial y las del campo respecto a la distancia en el campo eléctrico para distribuciones de magnitudes activas puntuales o esféricas?
Se podrían determinar las pendientes respectivas a partir de las expresiones $V|\vec{r}| = kq$ *y* $Er^2=kq$
En la gráfica (V, r) $Vdr + rdV = 0$ *, de lo que* $dV/dr = - V/r$ *(que sería la pendiente)*
En la gráfica (E, r) $r^2dE + 2rdrE=0$*, de lo que* $dE/dr = - 2 E/r$ *(que sería la pendiente).*
como $E=-dV/dr$*,* $dE/dr = 2/r(dV/dr)$*, que sería la relación entre ambas pendientes.*

11.1. DIFERENCIA DE POTENCIAL. CÁLCULO GRÁFICO

La diferencia de potencial entre dos puntos A y B, para distribuciones de magnitudes activas puntuales o esféricas se podría calcular fácilmente a partir de las propias gráficas:

APLICACIÓN
Ej.22. En las gráficas dadas calcula la diferencia de potencial entre los puntos A y B, separados una distancia de 2m.
Para la gráfica 53 (potencial creado por un conductor con carga positiva q, de radio R), la diferencia de potencial entre los puntos A y B, separados 2 metros será: V_B-V_A=20-40=-20V
Mientras que en la gráfica 54 (potencial creado por una masa M, o una carga negativa q), la diferencia de potencial ente los puntos A y B, separados 2m, será: -20-(-40)=20V o 20Jkg^{-1}.

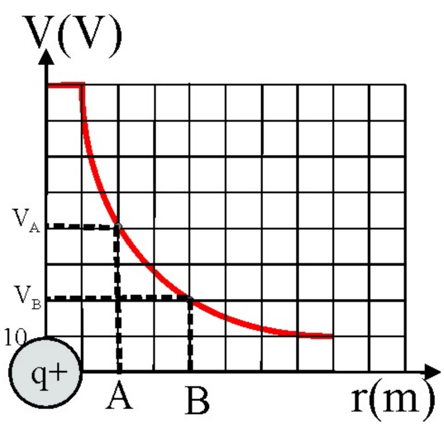


Fig.53

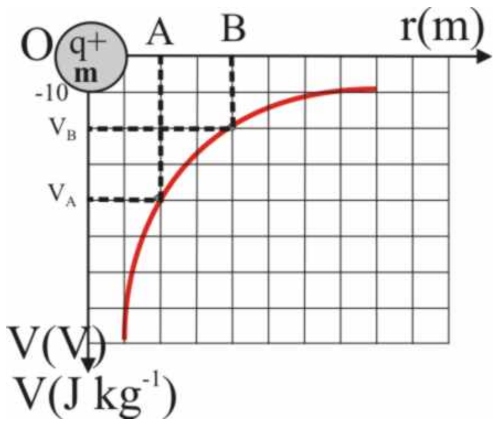


Fig.54

Ej. 23. Relación entre las gráficas (V, r) y (E, r), para el campo eléctrico creado por un conductor esférico de radio R=2m , con carga superficial q. Comprobar su relación y determinar gráficamente el campo y el potencial a los 4m.

En la gráfica (V, r) debido al campo creado por un conductor esférico de radio R=2m con carga superficial q, la pendiente para r>R dV/dr, nos daría la intensidad del campo con el signo cambiado, al ser un campo conservativo, E=- dV/dr.

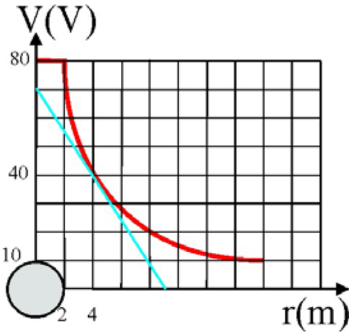


Fig.55

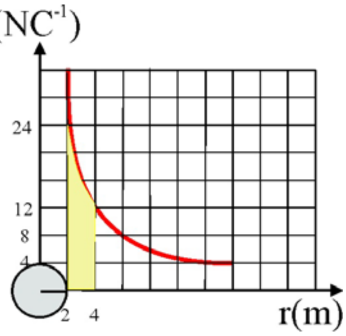


Fig.56

Por lo tanto trazando la tangente en un punto (4m), (fig.55) podríamos conocer la intensidad del campo en dicho punto: -(-70J/C/9m)= 7,8N/C.
En la gráfica (E, r), dado que V = -∫ E dr , la diferencia de potencial entre dos puntos sería el área abarcada entre ellos, en este caso, entre 2 y 4m, es de 40V (fig.56) que coincide con la diferencia de potencial entre 2 y 4 metros en la gráfica (V, r) de la fig.55.