Introducción a la teoría de campos IV

11.2. ENERGÍA POTENCIAL

Las variaciones de la energía potencial son similares a las del potencial, dado que $Ep = A .V$, para una determinada cantidad de magnitud activa A

En el campo gravitatorio (A=M), $Ep = -GMm/r$ (32)

En el eléctrico $A = Q$ $Ep = kQq/r$. (33)

Como el W es igual a (- variación de la energía potencial entre dos puntos A y B) ; $W = -A (V_B - V_A) = A (V_A - V_B)$, y si se aplican para cada campo las magnitudes activas y potenciales respectivos, se tendrá que :

a) En el campo eléctrico: $W = kqQ[1/r_A - 1/r_B]$ (34)

b) En el campo gravitatorio: $W = -GmM[1/r_A - 1/r_B]$[1]

En el campo gravitatorio si $g_A = g_B = g$, esto si la intensidad del campo se considera constante en una determinada distancia, se puede tomar como $mg (r_A - r_B)$, que sería el aumento de energía potencial gravitatoria, siendo el trabajo negativo; esto un aumento de energía potencial implica que hay que realizar un trabajo sobre el campo mientras que una disminución, el campo haría el trabajo.

En las expresiones anteriores, dado que $r_A < r_B$, tendremos que $W > 0$, es evidente que si se lleva una carga positiva q (carga de prueba) desde A hasta B, el trabajo lo realiza el campo (la carga Q rechaza a la otra q del mismo signo, alejándola), criterio semejante al aplicado en termodinámica. En este caso, se recuerda la transformación adiabática (Q=0), en la que $dU = -dW$, esto es el trabajo es igual a la variación de la energía interna, con el signo cambiado.

En el caso del campo gravitatorio, si se traslada una masa m desde A hasta B, se aleja del campo, y como es atractivo, se deberá hacer un trabajo contra el campo, mientras que si la masa fuera desde B hasta A, el trabajo lo haría el campo.
En el primer caso, el trabajo será negativo $W<0$, $W = -GmM[1/r_A - 1/r_B]$, $r_A < r_B$.
En cambio en el segundo, $W= -GmM[1/r_B - 1/r_A]$, y $r_A < r_B$, por lo que el trabajo será positivo (lo hace el campo).
Generalizando, la expresión de la energía potencial en un campo conservativo sería $Ep = k AA'/r$, siendo A la magnitud activa que crea el campo y A', la magnitud activa de prueba, o la que se traslada en el campo.

a) Para un campo divergente (eléctrico):

$A=Q$, $A'=q$;$k= k$; $Ep = kQq/r$ (35)

b) Para un campo convergente (gravitatorio):

$A=M$, $A'=m$, $k=G$, y el signo correspondiente, $Ep= -GMm/r$ (36)

---

[1] Se recuerda que el signo menos, que aparece en la intensidad del campo, surge debido a que el campo gravitatorio es CONVERGENTE o sea atractivo

11.3. CÁLCULO DEL TRABAJO A PARTIR DE LAS LÍNEAS EQUIPOTENCIALES APLICACIÓN.

En campos radiales, conociendo las superficies equipotenciales, o las líneas de nivel, es muy fácil determinar por el camino que convenga, el trabajo a realizar para trasladar una determinada magnitud activa.

Ej.24. En la figuras 58 y 59, calcular el trabajo para llevar una magnitud activa de 2 unidades desde A hasta D'

FÓRMULA A EMPLEAR: $W = A\ (V_A - V_B)$

PASOS A SEGUIR:
Dado que el trabajo a lo largo de las líneas equipotenciales es nulo (fuerza central y desplazamiento forman un ángulo de 90º), se escoge el salto entre superficies equipotenciales, se restan los potenciales y se multiplica por la magnitud activa a trasladar. Se toman las líneas equipotenciales de las figuras anteriores, suponiendo cada división del potencial, 10 unidades.

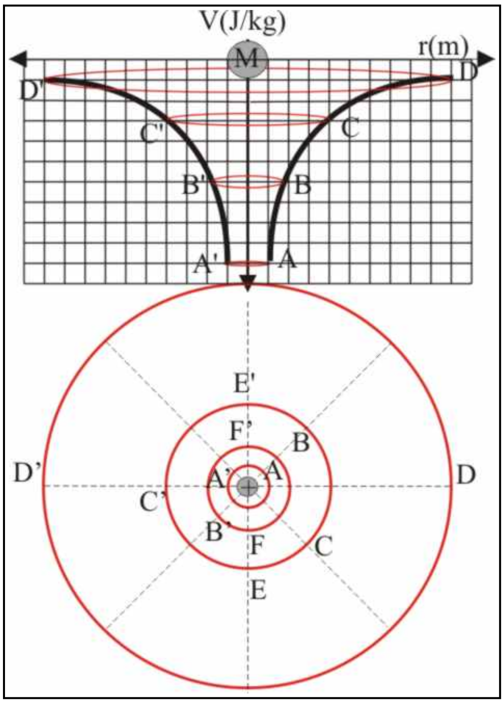


Fig.57

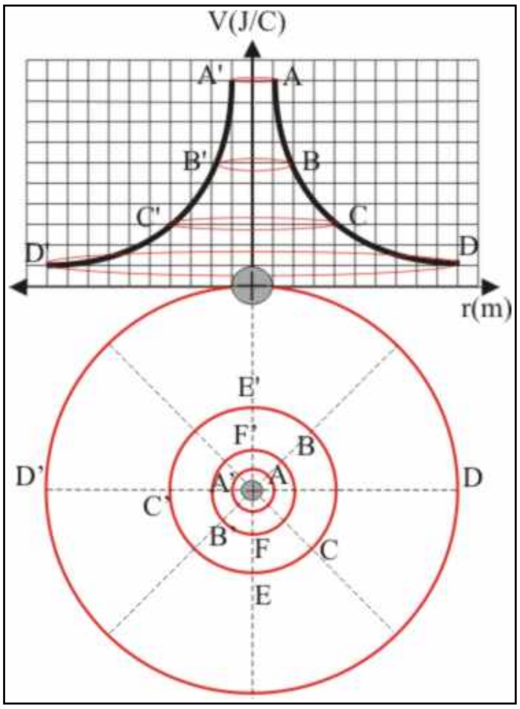


Fig.58

a) Cálculo del trabajo para llevar una masa de 2kg desde A hasta D', pasando por E' (fig.57)
Se elige un camino: Desde A hasta C, de C a E', de E' a C' y desde C' a D' .
$W_{A\text{-}C} = 2\ (V_A - V_C) = 2kg\ [-100J/kg - (-30J/kg)] = -140J$.
$W_{C\text{-}E'} = 2\ (V_C - V_{E'}) = 0 = W_{E'\text{-}C'}$.
$W_{C'\text{-}D'} = 2\ (V_{C'} - V_{D'}) = 2kg\ [-30J/kg - (-10J/kg)] = -40J$. TRABAJO TOTAL = -180J.
El trabajo no lo ha hecho el campo, si no es externo al elevar la masa de 2 kg, desde una distancia 1 a 10 metros = mgh = 2kg . $10m/s^2$ (1 - 10)m = -180J

b) Cálculo del trabajo para llevar una carga de 2C desde A hasta D', pasando por E' (fig.58)
Se elige un camino: Desde A hasta C, de C a E', de E' a C' y desde C' a D' .
$W_{A\text{-}C} = 2\ (V_A - V_C) = 2C\ [80V - 40V] = 80J$.
$W_{C\text{-}E''} = 2\ (V_C - V_{E'}) = 0 = W_{E'\text{-}C'}$.
$W_{C'\text{-}D'} = 2\ (V_{C'} - V_{D'}) = 2C\ [40V - 20V] = 40J$. TRABAJO TOTAL = 120j.
El trabajo lo ha hecho el campo, al rechazar la carga de 2 culombios, desde una distancia 2 a 8 metros.

11.4. CÁLCULO DEL TRABAJO A PARTIR DE CONSIDERACIONES TEÓRICAS.

APLICACIÓN

Ej25. Calcular el campo de fuerzas asociada a la función potencial $V= 2xy + 3z^2 - yz^2$, así como el trabajo necesario para llevar una masa puntual desde $P_1(0,0,7)$ a P_2 (0,0,4).

CONSIDERACIONES PREVIAS: El campo es conservativo dado que su intensidad deriva de una función potencial

PASOS A SEGUIR:

a) Dado que $\vec{I} = -\vec{\nabla} V$ se aplica el nabla a la función potencial y se cambia de signo. Así $\vec{I} = -2y\vec{i} - (2x - z^2)\vec{j} - (6z - 2yz)\vec{k}$.

b) Como W = A (V_A-V_B) = 1 (V_7-V_4). El potencial en cada punto se encuentra sustituyendo los valores dados en la función.
W = 1[(3.7^2 - 0.7^2) - (3.4^2 - 0.4^2)] = 147 - 48 = 99 J. (El trabajo lo ha hecho el campo al acercar la masa desde 7 hasta 4, este trabajo que realizó el campo se convertirá en energía cinética de dicha unidad de magnitud activa, pudiéndose calcular la velocidad de la misma).

11.5. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN POTENCIAL DE UN CAMPO CONSERVATIVO, Y SU APLICACIÓN A LA DETERMINACIÓN DEL TRABAJO.

Se ha calculado el potencial o la función potencial, para campos radiales. Esto es partiendo de que $V = -\int \vec{I} \bullet d\vec{r}$ Si lo hacemos por componentes, realizando el producto escalar, se tendría: $V = -\int I_x dx - \int I_y dy - \int I_z dz$ y considerando que todo lo que no hace referencia a la variable dada, es constante, podríamos resolverlo fácilmente.

APLICACIÓN

Ej26. Supuesto el campo $\vec{I} = (4xy - 3x^2z^2)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - 2x^3 z\vec{k}$, conservativo , calcula su función potencial, así como el trabajo realizado al trasladar 10 unidades de magnitud activa, desde el punto (0,0,0) al punto (1,1,1).

PASOS A SEGUIR:

a) Como $I_x = 4xy- 3x^2z^2$, $V = - \int (4xy- 3x^2z^2)dx = -2x^2y + x^3z^2 + C_1 (y,z)$ (La cte. de integración dependerá de y y de z), y se evalúa a partir de dichas componentes por comparación.

b) Se deriva la función anterior con el signo cambiado, respecto a y , y se compara con $I_y = 2x^2$.
Ya que $\vec{I} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \right)$
Así: $-dV/dy = 2x^2 + dC_1 (y,z)/dy$, y por otra parte $I_y = 2x^2$, por lo tanto $dC_1 (y,z)/dy = 0$, lo que implica que la constante C_1, sólo dependerá de z. $C_1 (y,z) = C_1 (z)$.

c) Se deriva la función potencial obtenida con el signo cambiado, respecto a z, y se compara con la $I_z = - 2x^3 z$
Así: $-dV/dz = -2x^3 z + dC_1 (z)/dz$. Por lo tanto $dC_1 (z)/dz = 0$, lo que indica que C_1 (z) no depende de z, luego es una constante K.

d) Se obtiene la función potencial que será: $V = -2x^2y + x^3z^2 + K$

e) El trabajo será: W = A (V_A-V_B) = 10 [$(-2x^2y + x^3z^2 + K)_{0,0,0}$ - $(-2x^2y + x^3z^2 + K)_{1,1,1}$] = 10 [(0 + K)- (-2+ 1 + K)] = 10J.

11.6. CÁLCULO DE POTENCIALES DE CAMPOS YA DETERMINADOS.

a) Potencial debido al campo eléctrico en la superficie de un cuerpo conductor electrizado y en equilibrio

Se tenía que en superficie: $\vec{E}_{\sup} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\vec{u}_S$, cerca, $\vec{E}_{c\sup} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{u}_S$ mientras que en su interior era 0.

Como $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$; Por lo tanto empleando el campo cerca de la superficie $\vec{E}_{c\sup} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon|\vec{r}|^2}\vec{u}_r$.

Si $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, $V = -\int \vec{E} \bullet d\vec{r}$, e integrando desde el infinito hasta el punto R (superficie)

$$V = -\int_{\infty}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon|\vec{r}|^2}\vec{u}_r \bullet dr\,\vec{u} \;;$$

$$V = -\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\right)\left[\frac{|\vec{r}|^{-2+1}}{-1}\right]_{\infty}^{R}, \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R},$$

mientras que en su interior, al ser la intensidad del campo nula, V será constante, manteniéndose dicho valor.

Gráficamente (fig.59 y 60, según sea Q>0 , o Q<0)

Fig.59

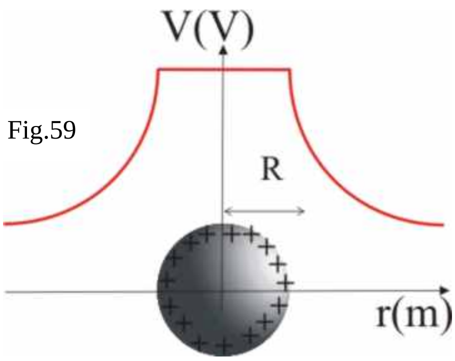
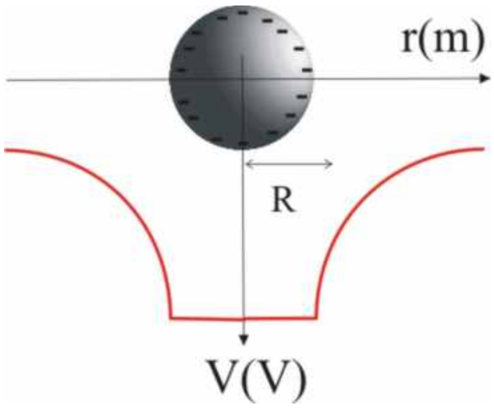


Fig.60



Por lo tanto el potencial a diferencia de la intensidad del campo no presenta discontinuidades.

b) POTENCIAL EN UN PUNTO A UNA DISTANCIA a, DEBIDO AL CAMPO CREADO POR UNA DISTRIBUCIÓN HOMOGÉNEA DE MAGNITUD ACTIVA EN FORMA DE UN CILINDRO (véase fig.26)

Siguiendo la consideración del Ej.8, teníamos que $|\vec{I}| = \frac{2kA}{aL}$, teniendo en cuenta que A/L es la densidad lineal de magnitud activa **8**, la expresión final será: $|\vec{I}| = \frac{2k\lambda}{a}$.

Para el campo gravitatorio $|\vec{g}| = \frac{2G\lambda}{a}$

Para el campo eléctrico (+), $|\vec{E}| = \frac{2k\lambda}{a} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\, a}$

Por lo tanto dado que $\vec{I} = -\vec{\nabla}V$; $V = -\int \vec{I} \bullet d\vec{r}$:

PASOS A SEGUIR.

Aplicando la consideración anterior $V = \int \frac{2k\lambda}{a}\vec{u}_r \bullet d\vec{a}$, teniendo en cuenta los sentidos de las intensidades de los campos, el $\cos\varphi$ será 1 o -1 según se trate del campo eléctrico (divergente) o gravitatorio (convergente), por lo que la expresión general nos daría variando el signo en cada caso

$V = -\int \frac{2k\lambda da}{a} = 2k\lambda \ln a + C$, constante que se puede determinar en las condiciones dadas en el problema de tal forma que sea 0.

De esta forma y para el campo eléctrico: $V = -2k\lambda \ln a$

mientras que para el campo gravitatorio: $V = 2G\lambda \ln a$.

Como lo que nos interesa realmente es la diferencia de potencial, para así calcular el trabajo, la constante no tiene importancia ya que se anularía. Así por ejemplo si queremos determinar el trabajo a realizar para trasladar en el campo anterior una cantidad de carga q, o una carga de prueba desde a hasta b, siendo b > a, tendríamos que W = q (V_a-V_b).

Como $V_a = -2k\lambda \ln a$ y $V_b = -2k\lambda \ln b$, $W_{ab} = 2k\lambda q(\ln b - \ln a) = 2k\lambda q \ln\frac{b}{a}$

Como $b > a$, $W > 0$, esto es el campo aleja la carga positiva "empujándola" desde a hasta b. El trabajo lo hace el campo, y la energía potencial de q disminuirá.

c) POTENCIAL EN UN PUNTO A UNA DISTANCIA PEQUEÑA a, DEBIDO AL CAMPO CREADO POR UNA DISTRIBUCIÓN HOMOGÉNEA DE MAGNITUD ACTIVA A EN UNA LÁMINA (véase fig.32).

Operando como en el caso anterior, aunque se partirá del ejemplo 9.
El campo creado por una distribución de magnitud activa A en forma de lámina muy fina de superficie S: $\left|\vec{I}\right| = \frac{2\pi kA}{S}$

Se tenía para el caso del campo eléctrico (lámina con carga positiva) $\left|\vec{E}\right| = \frac{2\pi kq}{S}$

Teniendo en cuenta que q/S es la densidad superficial de carga **F**;

$\left|\vec{E}\right| = 2\pi k\sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$. Como $V = -\int \vec{I} \bullet d\vec{r}$. y r=a

$$V = -\int_0^a \frac{\sigma}{2\varepsilon} da = -\frac{\sigma}{2\varepsilon} a$$

Esto es, sólo depende de la distancia, pues los demás términos son constantes.
Esto permitirá calcular el trabajo realizado para llevar una carga de un punto a otro en dicho campo, e incluso puesto que se trata de un campo conservativo, determinar la velocidad que alcanza dicha carga.

$W_{ab} = A(V_A - V_B) = A\frac{\sigma}{2\varepsilon}(b-a)$, siendo b el punto más lejano y a, el más próximo. El trabajo lo hace el campo (W>0) si A es q+, mientras que se hará sobre el campo si A es q- . Este trabajo será igual a $mv^2/2$, si se trata de una partícula atómica con carga y masa , ya que se desprecia la interacción gravitatoria (en partículas atómicas, la masa es muy pequeña) . Así se podrá calcular la velocidad.

d) POTENCIAL EN UN PUNTO A r<R, DEBIDO AL CAMPO CREADO POR UNA DISTRIBUCIÓN DE MAGNITUD ACTIVA HOMOGÉNEA (MASA, O CARGA EN UN CUERPO AISLANTE, ESTO ES CON NULA MOVILIDAD DE LAS CARGAS) DE FORMA ESFÉRICA.

Se ha visto (Ej10 y Ej11) que el campo creado por una distribución homogénea de magnitud activa en forma esférica de radio R para distancias de r<R, seguía una relación lineal $\vec{I} = \frac{4}{3}\pi k\rho|\vec{r}|\vec{u}_r$, teniendo en cuenta el concepto de densidad de magnitud activa **D** y en este caso aplicado a una esfera $\rho = \frac{A}{V} = \frac{3A}{4\pi R^3}$

generalizando, se tendría que $\vec{I} = \frac{kA}{R^3}|\vec{r}|\vec{u}_r$ con el signo correspondiente según sea el campo convergente (-) o divergente (+). La gráfica de la variación de la intensidad de ambos campos con la distancia, se da en la figura 61, observándose que para r> R, o sea desde B hasta D, la variación sigue la ley del inverso del cuadrado de la distancia, mientras que para r<R, la variación es lineal.

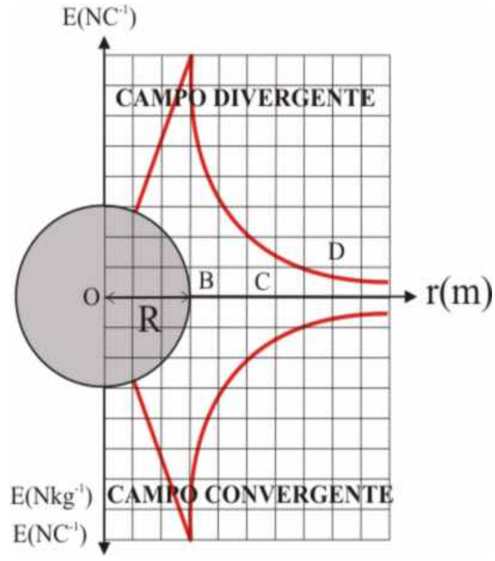


Fig.61

Para determinar la variación del potencial, tendríamos que

$V = -\int \vec{I} \bullet d\vec{r}$. Sustituyendo $V = -\int \frac{kA}{R^3}|\vec{r}|\vec{u}_r \bullet d\vec{r}$

De lo que $V = \frac{kA|\vec{r}|^2}{2R^3} + C$, teniendo en cuenta claro está, los signos debidos al producto escalar, según sea el campo convergente (A=M, -) o divergente (A=Q, +), la constante de integración se determinaría, partiendo de que en B, o sea cuando r=R, $V = \frac{kA}{R}$.

Por lo tanto sustituyendo: $\frac{kA}{R} = \frac{kAR^2}{2R^3} + C$, $C = \frac{3kA}{2R}$, reemplazando en V, $V = \frac{kA}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

O sea, dado que R es constante, el potencial dentro del cuerpo tendría una dependencia cuadrática de la distancia, o sea una parábola, como se puede apreciar en el dibujo (fig.62)

a) Para el campo eléctrico. A = Q, $V = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

b) Para el campo gravitatorio A=M , k=G , e introduciendo el signo - , procedente del producto escalar al ser campo convergente:

$$V = -\frac{GM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

La energía potencial da lugar a las mismas gráficas como se ha dicho, dado que corresponden a multiplicar el potencial por la magnitud activa.

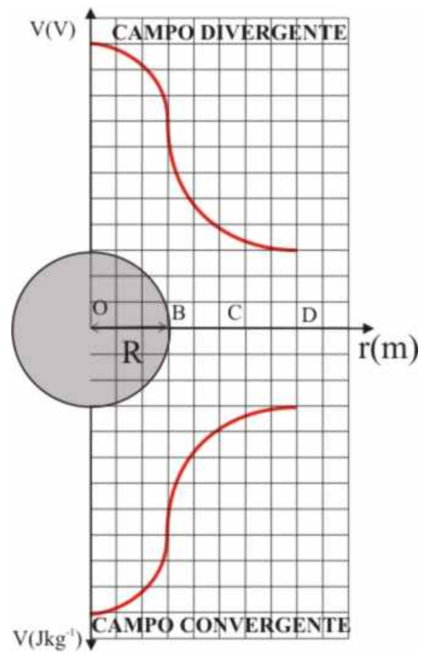


Fig.62

CASOS PARTICULARES

a) ¿Como variaría la energía potencial en el campo gravitatorio terrestre?

b) ¿Dentro de la Tierra como la altura es 0 o negativa, la energía potencial también lo es?

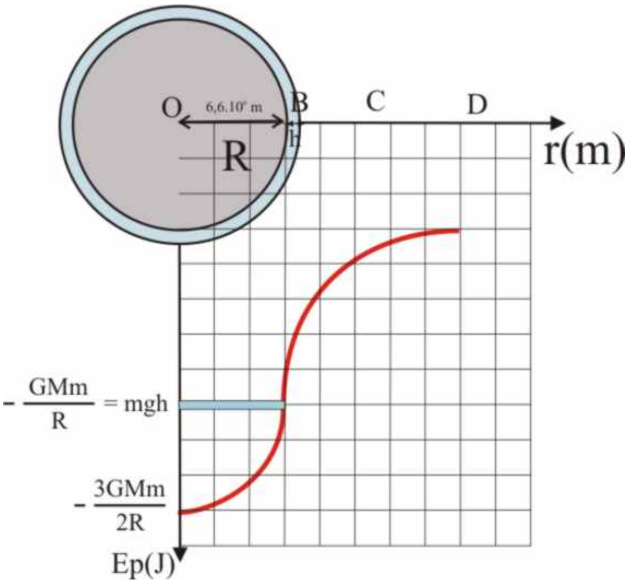


Fig.63

Para r>R, seguirá la ley normal, esto es $Ep = -\frac{GMm}{r}$

siendo r = R+h.

Para h << R, en una distancia en la que $\vec{g} = -\frac{GM}{|\vec{r}|^2}\vec{u}_r$

se puede considerar constante, y se puede tomar la variación de energía potencial como mgh aplicada generalmente en los cursos de física elementales

Para r< R, la energía potencial gravitatoria, variaría como

$Ep = -\frac{GMm}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, y en las condiciones en las que

r= 0, $Ep = -\frac{3GMm}{2R}$ (fig 63)

c) Campo y potencial del sistema Tierra-Luna

El campo gravitatorio formado por la Tierra y la Luna, la masa actuará como un SUMIDERO DE LÍNEAS DE FUERZA, y habrá zonas del espacio en las cuales la intensidad del campo sea 0 (punto P del campo entre la Tierra y la Luna); que representarían un vacío de líneas de fuerza. El lugar geométrico de dichos puntos se puede determinar igualando las intensidades de los campos producidos por dichas masas de forma que la Intensidad total sea 0.

Perpendiculares a las líneas de fuerzas actúan las superficies equipotenciales (líneas de puntos).

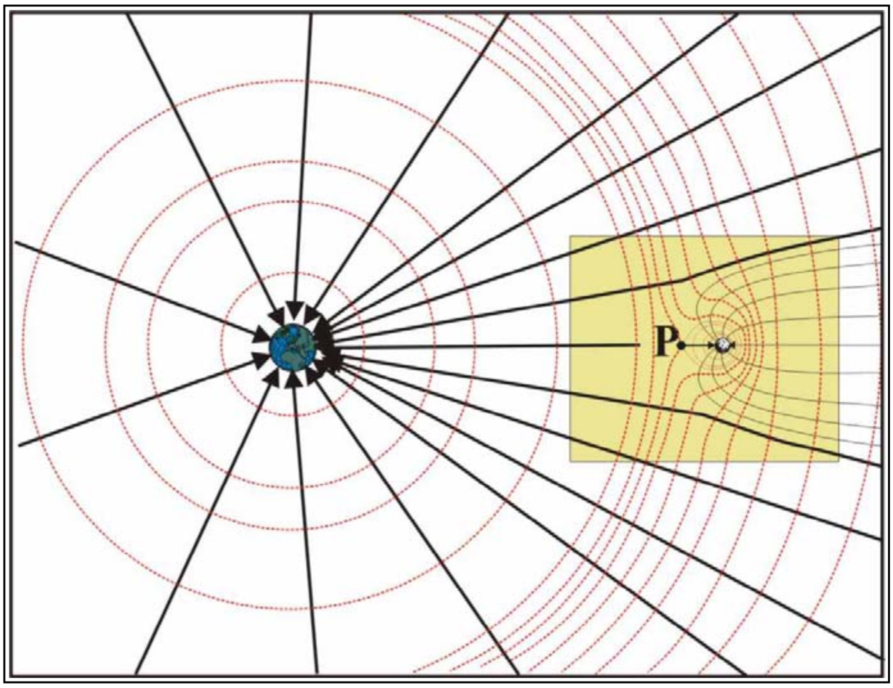


Fig.64

Dado que los potenciales son escalares, los creados por las masas de la Tierra y la Luna se sumarían por lo que aunque no existan líneas de fuerza si existen líneas de potencial (fig.64).

Obsérvese la zona conflictiva en el dibujo, como se curvan las superficies equipotenciales (recuadro amarillo), en función de su perpendicularidad con las líneas de fuerza.

11.7. Aplicaciones de la variación de la energía potencial:

a) Cálculo de la velocidad de escape de la Tierra.

La condición de escape del la acción gravitatoria, es que un cuerpo tenga la velocidad suficiente, para alejarse de la Tierra y alcanzar un punto donde no exista dicha acción. A partir de la fórmula de interacción de los campos de fuerzas, es fácil de ver que ese punto sería el infinito. Como el campo gravitatorio es conservativo, la energía potencial y cinética que deberá tener la magnitud activa (masa) que escape, deberá ser igual a la que tenga en el infinito, o sea 0.

Por lo tanto: Energía en la superficie de la Tierra = energía en el infinito =0

$$\frac{mv^2}{2}+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=0, \quad \text{de lo que} \quad v=\sqrt{\frac{2GMm}{R}}$$

Como modularmente, g en la superficie de la Tierra es $|\vec{g}|=\frac{GM}{R^2}$, sustituyendo tendríamos que el módulo de la velocidad de escape sería $v=\sqrt{2gR}$. Esta velocidad es para la Tierra, de 11km/s. La energía potencial gravitatoria en la luna, es aproximadamente 20 veces inferior que en la Tierra. Este concepto es muy interesante, porque la velocidad molecular depende de la temperatura y de la masa de las moléculas, por eso la velocidad a una determinada temperatura de las moléculas de hidrógeno es mucho mayor que las de oxígeno, por este motivo, no existe hidrógeno en la atmósfera de la Tierra, ya que no ha sido capaz de retenerla. Incluso la Tierra, no pudo retener la atmósfera que fue produciendo durante mil millones de años, hasta que la lluvia de meteoritos recibido fue tal que su masa aumentó hasta alcanzar las condiciones necesarias. Por ese motivo la luna no tiene atmósfera, al igual que cualquier planetoide de poca masa.

En la fig.65 pudo observarse la variación de las líneas equipotenciales y de fuerza en el sistema TIERRA-LUNA. Mientras que en el punto P, la intensidad del campo sería 0, pues las intensidades de los respectivos campos serían iguales y opuestas y por lo tanto un cuerpo de masa m se mantendría en equilibrio, en cambio, el potencial al ser escalar y sumarse siempre, irá aumentando, abarcando a todo el sistema TIERRA-LUNA.

b) Cálculo de la velocidad necesaria para poner un sistema en órbita estacionaria de la Tierra a una altura h.

Se operaría de la firma forma que en el caso anterior. Argumento: El campo gravitatorio es un campo conservativo

Energía en la superficie de la Tierra = Energía en la órbita dada a una altura h

$$\frac{mv_{lanzamiento}{}^2}{2}+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=\frac{mv_{órbita}{}^2}{2}+\left(-\frac{GMm}{R+h}\right)$$

Simplificando m, multiplicando por 2, y despejando la velocidad de lanzamiento característica, se tendría que :

$$v_{lanzamiento}=\sqrt{\left[v_{órbita}{}^2+\left(-\frac{2GM}{R+h}\right)-\left(-\frac{2GM}{R}\right)\right]}$$

La velocidad en órbita se denomina velocidad de inyección y dependerá de la altura de la órbita, puesto que en dicha órbita estacionaria $\frac{mv_{órbita}{}^2}{R+h}=\frac{GMm}{(R+h)^2}$, según la fuerza que actúa sobre m.

Así: $v_{órbita}{}^2=\frac{GM}{R+h}$,con lo que sustituyendo y simplificando:

$$v_{lanzamiento} = \sqrt{\left[\left(-\frac{GM}{R+h}\right)+\left(\frac{2GM}{R}\right)\right]}$$

c) Cálculo de la velocidad de una magnitud activa A' (masa m), en reposo abandonada en un campo de fuerzas conservativo y atractivo, creado por dos magnitudes activas iguales A (masa M) y a igual distancia de aquella, en otro punto b (fig.65)

Si se abandona en a, estando en reposo, la única energía que posee es la potencial, mientras que en b, tendrá energía potencial y cinética. Puesto que el campo es conservativo, la energía deberá mantenerse constante. Por lo tanto dado que modularmente, $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$ y $|\vec{r}_1{}'| = |\vec{r}_2{}'|$:

$$E_a = -\frac{kAA'}{|\vec{r}_1|} + \left(-\frac{kAA'}{|\vec{r}_2|}\right) = -kAA'\left(\frac{1}{|\vec{r}_1|}+\frac{1}{|\vec{r}_2|}\right) = -\frac{2kAA'}{|\vec{r}_1|}$$

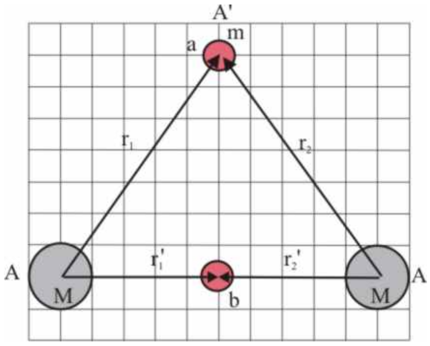


Fig.65

$$E_b = \frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{kAA'}{|\vec{r}_1{}'|}\right) + \left(-\frac{kAA'}{|\vec{r}_2{}'|}\right) = \frac{mv^2}{2} - \frac{2kAA'}{|\vec{r}_1{}'|}$$

Igualando y despejando: $\frac{mv^2}{2} = 2kAA'\left(\frac{1}{|\vec{r}_1{}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_1|}\right)$

$$v = \sqrt{\frac{4kAA'}{m}\left(\frac{1}{|\vec{r}_1{}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_1|}\right)}$$

Si se trata de masa, A =M , A' = m , k= G $v = \sqrt{4GM\left(\frac{1}{|\vec{r}_1{}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_1|}\right)}$

Si se trata de carga y masa, A=Q- , A' =q+, y m, k=k y despreciando la acción gravitatoria y considerando sólo la acción eléctrica atractiva; $v = \sqrt{\frac{4kQq}{m}\left(\frac{1}{|\vec{r}_1{}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_1|}\right)}$

d) POTENCIAL Y CAMPO DE UN DIPOLO

Un dipolo constituye un sistema con dos cargas iguales q y de signo contrario separadas una distancia d muy pequeña, en comparación con la distancia r en la que se calculará el campo y el potencial. Tiene enorme importancia en el campo de la interacción química, y determina las propiedades de numerosos compuestos. Si se observan las dos figuras, la determinación del potencial en un punto P, a una distancia r_1 de q+ y r_2 de q- , daría lugar a una expresión:

$$V = kq\left(\frac{1}{|\vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}_2|}\right) = \frac{kq(|\vec{r}_2| - |\vec{r}_1|)}{|\vec{r}_2||\vec{r}_1|}$$

Si tenemos en cuenta que prácticamente: $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = |\vec{r}|$ y que

Si se toma la figura 66 a $|\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| = -AC = -|\vec{d}|\cos CAB$.

Para P alejado, el cosCAB, tendiendo a 0, y el cos a 1.

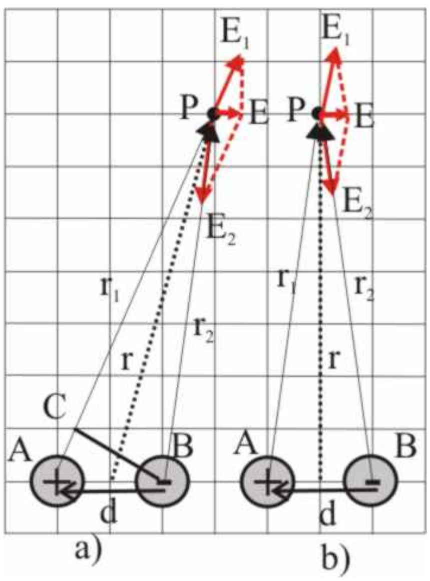


Fig.66

$|\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| = -|\vec{d}|$ y $|\vec{r}_1||\vec{r}_2| = |\vec{r}|^2$ por lo que $V = -\dfrac{kq|\vec{d}|}{|\vec{r}|^2}$

La intensidad del campo se obtendría a partir de $\vec{I} = -\vec{\nabla} V$, $\vec{E} = -\dfrac{dV}{dr}\vec{u}_d$

De lo que $\vec{E} = -\left(-kq|\vec{d}|\right)\left(\dfrac{-2|\vec{r}|}{|\vec{r}|^4}\right)\vec{u}_d = -\dfrac{2kq\,\vec{d}}{|\vec{r}|^3}$

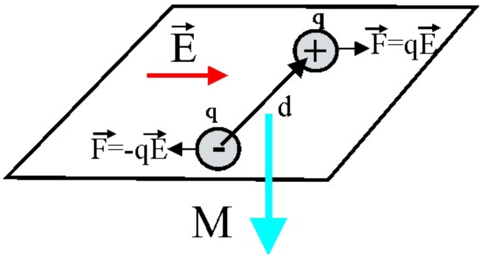


Fig.67

El momento dipolar, se define como $\vec{\mu} = q\,\vec{d}$, y es una magnitud vectorial que se dirige de la carga negativa a la positiva, como se indica en el dibujo (fig.67). Por lo tanto la intensidad del campo creado por un dipolo en P:

$$\vec{E} = -\frac{2k\vec{\mu}}{|\vec{r}|^3}$$

el signo - indica que el sentido del campo es contrario al del momento dipolar.

Si un dipolo se encuentra en un campo eléctrico, las fuerzas del campo forman un par, cuyo momento tenderá a orientarlo en el mismo, como se observa en el dibujo, de forma que el momento de las fuerzas que tienden a alinearlo, será: $\vec{M} = \vec{d} \wedge \vec{F} = \vec{d} \wedge q\vec{E} = q\vec{d} \wedge \vec{E} = \vec{\mu} \wedge \vec{E}$.