Las derivadas en cinemática

1.7. Ejercicios de aplicación

1.7.1. Un automóvil recorre 300 m en 20 segundos , sometido a una aceleración constante de 0,8 $m.s^{-2}$.Calcular

a) su velocidad inicial
b) su velocidad a los 20 segundos
c) la longitud recorrida en los 10 primeros segundos

1.7.2. El movimiento de una partícula está definido por la ecuación

$$x = 2t^3 - 6t^2 + 28t - 10$$

Donde x se expresa en metros y t en segundos
Calcular la posición, velocidad y aceleración cuando t=10 s.

1.7.3. El movimiento de una partícula está definido por la ecuación

$$x = t^3 - 10t^2 - 20t - 16$$

x en metros y t en segundos.

Calcular la longitud recorrida por la partícula entre t=0s y t= 12 s.
Representar las gráficas v-t y a-t

1.7.4. La posición de una partícula está dada por la ecuación

$$x = t^3 - 6t^2 - 20t - 50$$

Calcular:

1) El intervalo de tiempo que transcurre para que su velocidad se anule y la longitud recorrida en ese tiempo.

2) La aceleración media en ese intervalo de tiempo y la instantánea cuando la velocidad sea nula.

3) Representar las gráficas x-t, v-t ; y a-t-

1.7.5. Desde una altura de 50 m se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s.

1) Determinar las ecuaciones de la posición y velocidad del cuerpo

2) Calcular las posiciones y los tiempos para los que el cuerpo tiene una velocidad absoluta que es la mitad de la inicial.

3) Calcular el tiempo que emplea la piedra en llegar al suelo

1.7.6. La posición de una partícula que oscila a lo largo del eje X viene dada por la ecuación

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Si x_o y v_o designan la posición y velocidad de la partícula en el instante t=0 s.

1) Encontrar una relación entre φ y las constantes características del movimiento x_o , v_o y ω .

2) Encontrar la expresión que relaciona A con x_o, v_o y ω.

1.7.7. Una partícula efectúa un movimiento vibratorio armónico definido por la ecuación

$$x = 2\cos\left(0{,}20\,t + \frac{\pi}{4}\right)$$

x en metros y t en segundos.

1) Determinar la elongación , velocidad y aceleración cuando t=18s.
2) La velocidad y aceleración cuando el móvil ocupe las posiciones x=+1,5 m y
x= -1,5 m

1.7.8. Un móvil efectúa un movimiento vibratorio armónico de amplitud A=0,5 m, ocupa la posición x=+0,25m cuando t=0 y se dirige hacia la posición x=-0,50 m.
Determinar utilizando la función coseno, las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración.
Repetir el apartado anterior usando la función seno

1.7.9. Desde una altura de 25 metros se lanza una piedra, designada con 1, con velocidad inicial vertical y hacia debajo de 10 m/s. Desde el suelo y en dirección vertical y hacia arriba se lanza otra piedra, designada con 2, con velocidad inicial de 50 m/s.
1) Calcular la posición cuando ambos móviles se cruzan y las velocidades de cada móvil en ese instante
2) Calcular los tiempos que tardan los móviles en llegar al suelo y sus velocidades
3) Calcular la distancia recorrida `por la segunda piedra

1.7.10. Un automóvil se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforma a una velocidad de 100 km/hora. El conductor observa un obstáculo en la carretera a 125 m y aplica los frenos con un tiempo de reacción de t segundos. Si los frenos imprimen al coche una aceleración negativa de – 4 m/s^2.Calcular el valor máximo de t para que el automóvil no choque con el obstáculo.

1.7.11. Desde una torre de 50 m se lanza verticalmente hacia arriba un proyectil con una velocidad inicial v_o= 100 m/s. En el origen de referencia situado en el suelo hay un observador que pone en marcha su cronómetro al ver el fogonazo producido por el disparo y él a su vez lanza un nuevo disparo con una velocidad $v_o^{'} = 100\,m/s$, cuando su cronómetro marca el duodécimo.

1) Ecuaciones de las posiciones y velocidades de cada proyectil en función del tiempo

2) Altura máxima alcanzada por cada proyectil

3) Instante en el que se cruzan

4) Posición y velocidad en el instante anterior

1.7.12. Dos motoristas A y B se encuentran en los extremos de una recta de longitud 2 km. El origen de referencia se toma donde se encuentra inicialmente el motorista A. y ahí está un observador con un cronómetro. La moto A sale con una aceleración de 3 m/s^2 que la mantiene durante 10 s para continuar después con movimiento uniforme. La moto B sale 20 segundos más tarde que A y se dirige al encuentro de A con una aceleración de 1 m/s^2 que mantiene siempre.

1) Ecuaciones de las posiciones de ambas motos

2) Instante en que se cruzan

3) Posición y velocidad en el instante anterior

1.8.- Solucionario de los ejercicios de aplicación

1.7.1.

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad ; \qquad v = v_o + a t$$

Si t = 20 s , a= 0,8 m/s^2

1) $300 = 0 + v_o \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 20^2 \Rightarrow v_0 = 7\frac{m}{s}$;

2) $v = v_o + a\,t = 7 + 0{,}8 \cdot 20 = 23\frac{m}{s}$

3) $x = 0 + v_o \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 10^2 = 110\,m$

Longitud recorrida: $x-x_0$ = 110 m

1.7.2.

$$x = 2t^3 - 6t^2 + 28t - 10 = 2.10^3 - 6 \cdot 10^2 + 28 \cdot 10 - 10 = 1670\,m$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 12t + 28 = 6.10^2 - 12 \cdot 10 + 28 = 508\frac{m}{s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 12 = 12 \cdot 10 - 12 = 108\frac{m}{s^2}$$

1.7.3.

Las posiciones del móvil cuando t=0 y t= 12 s son respectivamente:

x(0) = -16 m ; x(12) = 32 m

Entre esas dos posiciones el móvil ocupa otras intermedias; es necesario saber qué posiciones ha ocupado el móvil entre esos tiempos. Una forma de solucionarlo es dar valores a la función x(t) y hacer una representación gráfica. Pero antes vamos a obtener las funciones velocidad y aceleración que nos darán la solución de si existe un máximo, un mínimo.

$$x' = v = 3t^2 - 20t - 20 \;\; ; \;\; 3t^2 - 20t - 20 = 0; t = 7{,}55s \text{ y } t = -0{,}88s$$

$$x'' = v' = a = 6t - 20 \;\; ; \;\; 6t - 20 = 0;; t = 3{,}33 \text{ s}$$

$$x''' = 6 \neq 0$$

En t=3,33 s, existe un punto de inflexión.

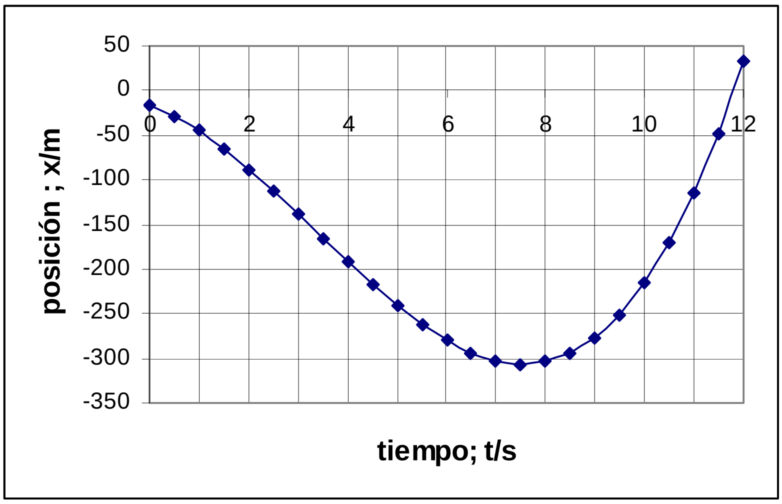
Sustituimos en x´´ , el valor de t=7,55 s

$$6 \cdot 7{,}55 - 20 > 0$$

Resulta que t=7,55 s es un mínimo.

Representamos la función dando valores a t

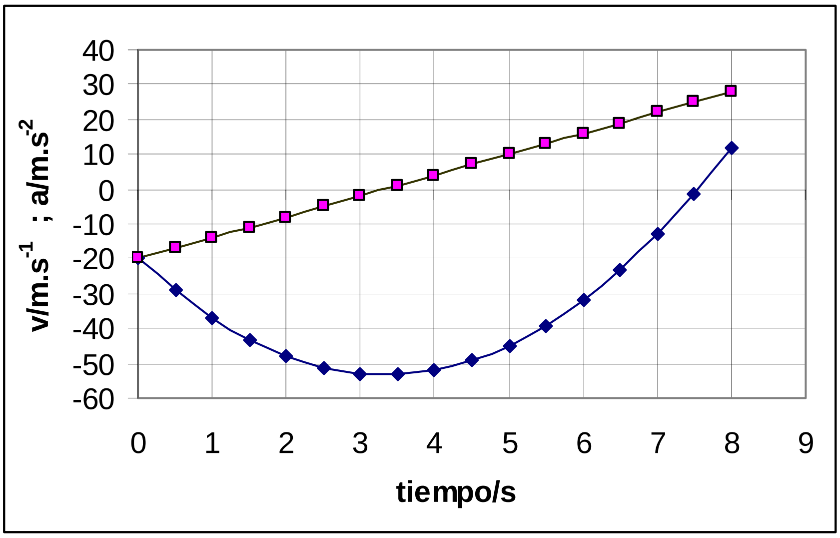
t/s	0	2	4	6	7,55	8	10	12
x/m.	-16	-88	-192	-280	-306,66	-304	-216	+32



La longitud recorrida es a) desde x=-16 m al mínimo 306,66 , de 306,66+32

L= (306,66-16)+(306,66+32)= 629,3 m

La grafica v-t y a-t es la siguiente:



1.7.4.

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 20 \;\Rightarrow\; 3t^2 - 12t - 20 = 0 \Rightarrow t = 5{,}27\,s \quad y \quad t = -1{,}27\,s$$

$$x(0) = -50\,m \;\; ; \;\; x(5{,}27) = -175{,}7\,m$$

Longitud recorrida =175,7-50=125,7 m

2)

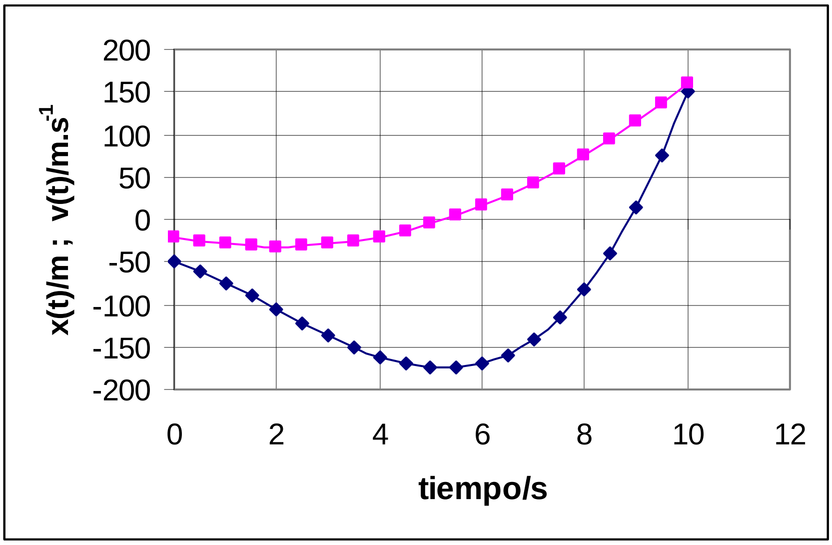
$$a_m = \frac{v(5,27) - v(0)}{5,27 - 0} = \frac{0 - (-20)}{5,27} = 3,8 \frac{m}{s^2}$$

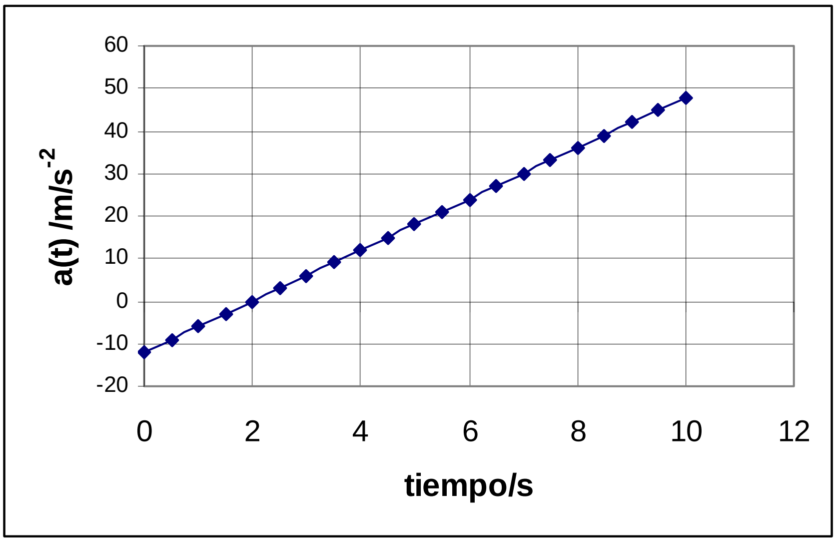
$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \;\; ; \;\; a = 6 \cdot 5,27 - 12 = 19,62 \frac{m}{s^2}$$

3)

t=0 ; x=-50 m ; t=5,27 s x=-175,7 m (máximo o mínimo)

t=2 s x=106 m (inflexión)





1.7.5.

$$x = x_0 + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \;\; ; \;\; v = v_o + a t \;\; ; \;\; x_o = +50\,m \;,\; v_o = +20 \frac{m}{s} \;\;,\; a = -g = -9,8 \frac{m}{s^2}$$

1) $x = 50 + 20t - 4,9t^2 \;\; ; \;\; v = 20 - 9,8t$

2) Cuando v=10 m/s , la piedra esta subiendo

$$10 = 20 - 9,8t \Rightarrow t = 1,02\,s \;\; ; \;\; x(1,02) = 50 + 20 \cdot 1.02 - 4,9 \cdot 1,02^2 = 65,3\,m$$

Cuando v=-10 m/s , la piedra está bajando

$$-10 = 20 - 9,8t \Rightarrow t = 3,06\,s \;\; ; \;\; x(3,06) = 50 + 20 \cdot 3,06 - 4,9 \cdot 3,06^2 = 65,3\,m$$

3) Cuando la piedra llega al suelo x=0

$0 = 50 + 20\,t - 4{,}9\,t^2 \Rightarrow$ t=5,8 s ; t=-1,75 s

Tiene validez física la solución positiva.

1.7.6.

$$x = A\,\mathrm{sen}\left(\omega\,t + \varphi\right), \quad \text{cuando}\; t = 0 \;\Rightarrow\; x_o = A\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad \Rightarrow \mathrm{sen}\,\varphi = \frac{x_o}{A}\,(1)$$

$$v = x' = \frac{dx}{dt} = A\cdot\left[\cos\left(\omega\,t + \varphi\right)\right]\cdot\omega, \quad \text{cuando}\; t = 0 \;\Rightarrow\; v_o = A\omega\cos\varphi \quad \Rightarrow \cos\varphi = \frac{v_0}{A\,\omega}\,(2)$$ De (1)

$$\text{De (1) y (2)}\;\; \mathrm{tag}\,\varphi = \frac{x_o\omega}{v_o}$$

$$\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{x_o}{A} \Rightarrow \cos^2\varphi = 1 - \frac{x_o^2}{A^2}$$

De (2) $$v_o = A\,\omega\cos\varphi = A\,\omega\sqrt{\frac{A^2 - x_o^2}{A^2}} \Rightarrow v_o^2 = \omega^2\left(A^2 - x_o^2\right) \Rightarrow A = \sqrt{\frac{v_o^2 + \omega^2 x_o^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{v_o^2}{\omega^2} + x_o^2}$$

1.7.7.

1)

$$v = x' = \frac{dx}{dt} = -2\left[\mathrm{sen}\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot 0{,}2 = -0{,}4\,\mathrm{sen}\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a = v' = x'' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}08\cos\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$v(18) = -0{,}4\,\mathrm{sen}\left(3{,}6 + \frac{\pi}{4}\right) = -0{,}4\,\mathrm{sen}\left(206{,}3^o + 45^o\right) = -0{,}4\cdot(-0{,}947) = 0{,}38\,\frac{m}{s}$$

$$a = -0{,}08\cdot\cos\left(0{,}2\cdot 18 + \frac{\pi}{4}\right) = -0{,}08\cdot\cos 251{,}3^o = 0{,}026\,\frac{m}{s^2}$$

$$x(18) = 2\cdot\cos 251{,}3^o = -0{,}64\,m$$

2)

Sustituyendo en la ecuación de la posición

$$1{,}5 = 2\cos\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}75 \Rightarrow \mathrm{sen}\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - 0{,}75^2} = \pm 0{,}66$$

$$v = -0{,}4\,\mathrm{sen}\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 0{,}264\,\frac{m}{s}$$

$$a = -0{,}08\cos\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right) = -0{,}08\cdot 0{,}75 = -0{,}06\,\frac{m}{s^2}$$

$$-1{,}5 = 2\cos\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right) = -0{,}75 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - (-0{,}75)^2} = \pm 0{,}66$$

$$v = -0{,}4\operatorname{sen}\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 0{,}264\frac{m}{s}$$

$$a = -0{,}08\cos\left(0{,}2\,t + \frac{\pi}{4}\right) = -0{,}08 \cdot (-0{,}75) = 0{,}06\frac{m}{s^2}$$

1.7.8.

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \text{Para } t = 0 \Rightarrow x = A\cos\varphi \Rightarrow -0{,}25 = 0{,}5\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = -0{,}5$$

$$\varphi = 120^{o} \quad y \quad \varphi = 240^{o}$$

Para decidir sobre el valor de φ, hallamos la velocidad

$$v = x' = \frac{dx}{dt} = -A\,\omega\operatorname{sen}(\omega t + \varphi); \text{Para } t = 0 \Rightarrow v = -A\,\omega\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow$$

$$v = -A\,\omega\operatorname{sen}120^{o} = -A\,\omega \cdot 0{,}87 < 0 \quad ; v = -A\,\omega\operatorname{sen}240^{o} = -A\,\omega \cdot (-0{,}87) > 0$$

Puesto que para t=0 el móvil se dirige hacia la posición -0,5, se deduce que la velocidad es negativa y por consiguiente φ=120º.

Si utilizamos la función seno

$$x = A\operatorname{sen}(\omega t + \Phi)\ ;\ 0{,}25 = 0{,}5\operatorname{sen}\Phi \Rightarrow \operatorname{sen}\Phi = 0{,}5 \Rightarrow \Phi = 30^{o}\ y \quad \Phi = 150^{o}$$

$$v = A\,\omega\cos(\omega t + \Phi)\ ;\ v(30^{o}) = A\omega \cdot 0{,}86 > 0; \quad v(150^{o}) = -A\omega \cdot 0{,}86 < 0$$

Las ecuaciones son:

$$x = A\operatorname{sen}(\omega t + 150^{o})\ ;\ v = A\,\omega\cos(\omega t + 150^{o})\ ;\ a = -\omega^2 x = -\omega^2 A\operatorname{sen}(\omega t + 150^{o})$$

1.7.9.

Tomamos como punto de referencia el suelo, las velocidades dirigidas hacia arriba son positivas y hacia abajo negativas. Empleamos el mismo criterio para las aceleraciones. Las ecuaciones de los móviles son:

$$x(1) = 25 - 10\,t - \frac{1}{2}9{,}8\,t^2 \quad ; \quad v(1) = -10 - 9{,}8\,t$$

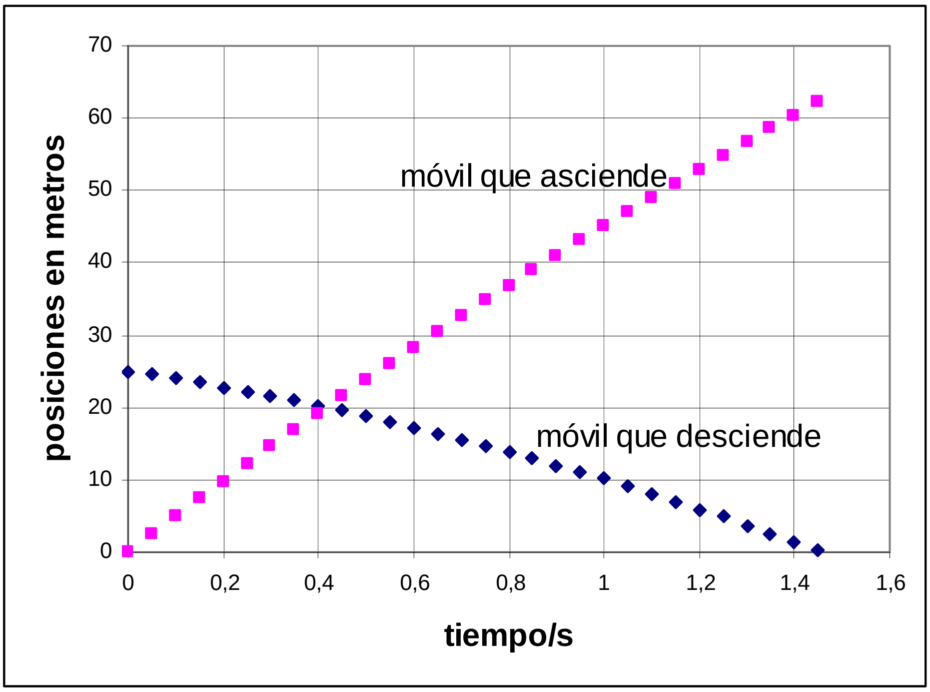
$$x(2) = 50\,t - \frac{1}{2}9{,}8\,t^2 \quad ; \quad v(2) = 50 - 9{,}8\,t$$

Cuando ambos móviles se cruzan ocupan la misma posición

$$x(1) = x(2) \Rightarrow 25 - 10\,t - 4{,}9\,t^2 = 50\,t - 4{,}9\,t^2 \Rightarrow 25 = 60\,t \Rightarrow t = 0{,}417\,s$$

$$x(1) = 25 - 10 \cdot 0{,}417 - 4{,}9 \cdot 0{,}417^2 \approx 20\ m$$

Las gráficas de las posiciones son:



$$v(1) = -10 - 9{,}8 * 0{,}417 \approx -14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

El signo menos nos indica que la velocidad es hacia abajo

$$v(2) = 50 - 9{,}8 * 0{,}417 \approx +46\,\mathrm{m/s}$$

El signo más indica que la velocidad es hacia arriba.

Cuando la piedra (1) llega al suelo su posición es x(1)=0

$$25 - 10\,t - 4{,}9\,t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1{,}46\,\mathrm{s}$$

$$v(1) = -10 - 9{,}8 \cdot 1{,}46 = -24{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Cuando la piedra (2) llega al suelo su posición es x(2)=0

$$x(2) = 0 = 50t - 4{,}9\,t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{50}{4{,}9} = 10{,}2\,\mathrm{s}$$

$$v(2) = 50 - 9{,}8 * 10{,}2 = -50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

La velocidad al llegar al suelo es igual a la de salida en valor absoluto, el signo indica que esa velocidad es vertical y dirigida hacia abajo

3) La distancia recorrida por la segunda piedra se calcula determinando hasta dónde sube la piedra, lo que corresponde a que su velocidad se anule

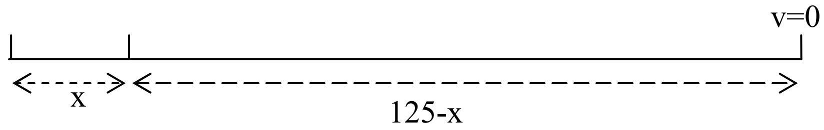
$$v(2) = 50 - 9{,}8\,t \Rightarrow t = 5{,}1\ \mathrm{s}$$

$$x(5{,}1\mathrm{s}) = 50 \cdot 5{,}1 - 4{,}9 \cdot 5{,}1^2 = 127{,}6\,\mathrm{m}$$

La distancia recorrida es la suma de la distancia hacia arriba y la misma distancia hacia abajo

Longitud recorrida = 127,6+127,6=255,2 m

1.7.10.



Tramo x, a velocidad constante de 100 km/h

Tramo de longitud 125-x metros con movimiento uniformemente retardado y aceleración constante de -4 m/s^2.Al llegar al obstáculo la velocidad debe ser cero.

El tramo de longitud x lo recorre con movimiento uniforme, empleando el tiempo de reacción t. El resto de la longitud 125-x la recorre con movimiento uniformemente retardado, de manera que el automóvil al llegar al obstáculo debe tener velocidad cero.

$$100\frac{\text{km}}{\text{h}} = 100\frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 27{,}78\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Desde que ve el obstáculo hasta que aplica los frenos el coche recorre x metros

$$x=27{,}78\ t$$

Designamos con t´ el tiempo que emplea el automóvil en recorrer los 125- x metros con aceleración: a = -4 m/s^2. En ese tiempo el automóvil pasa de la velocidad 27,78 m/s a cero

$$v = 27{,}78 - 4t' \Rightarrow t' = 6{,}95\,\text{s}$$

$$125 - x = 27{,}78 \cdot t' - \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot t'^2 \quad \Rightarrow \quad x = 125 - 27{,}78\cdot 6{,}95 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6{,}95^2 = 28{,}53\,\text{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{x}{27{,}78} = \frac{28{,}53}{27{,}78} = 1{,}03\,\text{s}$$

1.7.11.

1) $$x_1 = 50 + 100\,t - \frac{1}{2}10\,t^2 \quad ; \quad x_2 = 0 + 100(t-10) - \frac{1}{2}10(t-10)^2$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 100 - 10t \quad ; \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 100 - 10(t-10)$$

2) En el punto de altura máxima la velocidad es nula

$$0 = 100 - 10\,t \quad \Rightarrow \quad t = 10\,\text{s}$$
$$0 = 100 - 10(t - 10) \Rightarrow t = 20\,\text{s}$$

$$x(1) = 50 + 100\cdot 10 - 5\cdot 10^2 = 550\,\text{m}$$
$$x(2) = 100(20-10) - 5(20-10)^2 = 500\,\text{m}$$

3) Cuando se cruzan ambos tienen la misma posición respecto del sistema de referencia.

$$x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad 50 + 100\,t - 5\,t^2 = 100\,t - 1000 - 5\,t^2 - 500 + 100\,t \quad \Rightarrow \quad t = 15{,}5\,s$$

5) Posición y velocidad de cada proyectil en el instante t=15,5 s.

$$x_1 = x_2 = 398{,}75\,m \quad ; \quad v_1 = -55\frac{m}{s} \qquad v_2 = 45\frac{m}{s}$$

1.7.12.

Ecuación del movimiento de A.

Hasta t=10 s

$$x_A = \frac{1}{2}\cdot 3\,t^2 \quad : \quad v_A = \frac{dx_A}{dt} = 3\ t$$

Para t =10 s

$$x_A = 150\,m \quad ; \quad v_A = 30\frac{m}{s}$$

Para valores de $t \geq 10\,s$

$$x = x_o + v\,t \ ; \ x_o = 150\,m \ ; \ v = 30\frac{m}{s}$$
$$x_A = 150 + 30(t - 10)$$

Ecuación del movimiento de B.

$$x_B = 2000 + \frac{1}{2}(-1)(t - 20)^2$$

Puesto que empezó su movimiento 20 segundos después que el móvil A.

2)x_A=x_B

$$150 + 30(t - 10) = 2000 - \frac{1}{2}(t - 10)^2 \quad ; \quad t = 53{,}25\,s$$

3)

$$x_A = 150 + (30 \cdot 53{,}25 - 10) = 1447{,}5\,m$$
$$x_B = 2000 - \frac{1}{2}(53{,}25 - 20)^2 = 1447{,}5\,m$$
$$v_A = 30\frac{m}{s}$$
$$v_B = \frac{dx_B}{dt} = -1(t - 20) = -1(53{,}25 - 20) = -33{,}25\frac{m}{s}$$