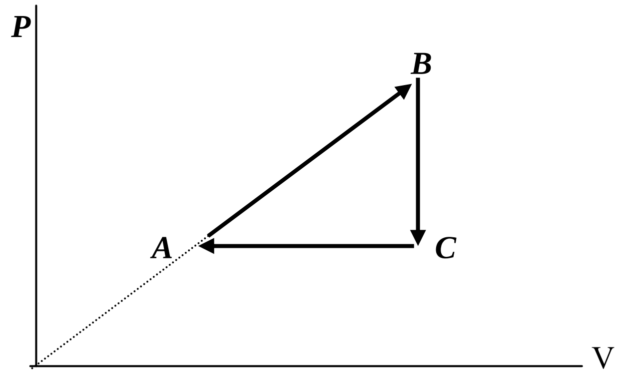
Calor II

14.- Un gas ideal monoatómico verifica el ciclo señalado en la figura inferior



El cociente entre la temperatura más alta del ciclo y la más baja, ambas medidas en kelvin, vale 16. Calcular el rendimiento del ciclo.

Las coordenadas termodinámicas de los vértices de la figura son A (P_1, V_1, T_1) ; B(P_2,V_2,T_2) ; C(P_1,V_2,T_3).
Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre A y C y entre B y C

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_1V_2}{T_3};\text{como}V_2>V_1\Rightarrow T_3>T_1 \quad ; \quad \frac{P_2V_2}{T_2}=\frac{P_1V_2}{T_3};\text{como}P_2>P_1\Rightarrow T_2>T_3$$

La temperatura más alta es T_2 y la más baja T_1 : $\frac{T_2}{T_1}=16$. Teniendo en cuenta la recta que pasa por el origen ,cualquier punto de AB cumple la condición $p = kV$

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{kV_1*V_1}{T_1}=\frac{kV_2*V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1}=4$$

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_1V_2}{T_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_3}{T_1}=4$$

$$\frac{P_2V_2}{T_2}=\frac{P_1V_2}{T_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_2}{P_1}=\frac{T_2}{T_3}=\frac{16T_1}{4T_1}=4$$

El trabajo se mide por el área interior del ciclo y el cálculo se hace aplicando las relaciones anteriores :

$$W = \frac{(P_2 - P_1)\,(V_2 - V_1)}{2} = \frac{P_2V_2 - P_2V_1 - P_1V_2 + P_1V_1}{2} = \frac{nRT_2 - P_2\frac{V_2}{4} - P_1 4V_1 + nRT_1}{2}$$

$$W = 3nR\left(\frac{T_2}{8} - \frac{T_1}{2}\right) = \frac{9}{2}nRT_1 \qquad (1)$$

Si observamos el ciclo se deduce que en el paso AB el gas recibe una cierta cantidad de calor que denominamos Q_1, y en los tramos BC y CA cede calor al medio , designándolo por Q_2 y Q_3 respectivamente.

Para calcular el valor de Q_1 hacemos uso del primer principio de la termodinámica

$$U_B - U_A = Q_1 + W_{AB} \;;\quad Q_1 = (U_B - U_A) - W_{AB}$$

$$W_{AB} = -\int_{V1}^{V2} pdV = -k\int_{V1}^{V2} VdV = -\frac{k}{2}\left[V_2^2 - V_1^2\right] = -\frac{P_1}{V_1}\left[V_2^2 - V_1^2\right] = -\frac{15}{2}nRT_1$$

Para evaluar la variación de energía interna nos apoyamos en que es una función de estado y por tanto independiente del camino seguido en la transformación

$$U_C - U_A = nC_p(T_3 - T_1) + W_{AC} = n\frac{5}{2}R(3T_1) - P_1(V_2 - V_1) = nRT_1\left(\frac{9}{2}\right)$$

$$U_B - U_C = nC_V(T_2 - T_3) + W_{BC} = 18nRT_1$$

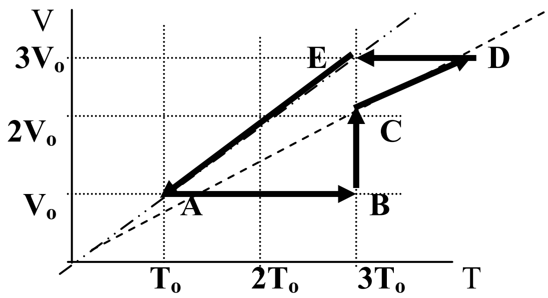
$$U_B - U_A = \frac{45}{2}nRT_1$$

$$Q_1 = \frac{45}{2}nRT_1 - \left(-\frac{15}{2}\right)nRT_1 = 30nRT_1$$

El rendimiento es :

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{\frac{9}{2}nRT_1}{30nRT_1} = \frac{3}{20}$$

15.- Calcular el rendimiento de una maquina que realizase el ciclo representado en la figura inferior. Se considera que el gas con que funciona la máquina es ideal y diatómico



Calculamos las coordenadas termodinámicas de cada punto

A (P_o, V_o, T_o)

$$\frac{P_oV_o}{T_o} = \frac{P_BV_o}{3T_o} \quad \Rightarrow \quad P_B = 3P_o \qquad B(\,3P_o\,,V_o,\,3T_o)$$

$$\frac{P_oV_o}{T_o} = \frac{P_C 2V_o}{3T_o} \quad \Rightarrow \quad P_C = \frac{3}{2}P_o \qquad C\left(\frac{3}{2}P_o,2V_o,3T_o\right)$$

Los puntos C y D están en la misma recta que pasa por el origen.

$$V_C = kT_C \quad ; \quad V_D = kT_D \text{ de ambas ecuaciones se deduce: } \frac{V_C}{V_D} = \frac{T_C}{T_D} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2V_o}{3V_o} = \frac{3T_o}{T_D} \quad \Rightarrow \quad T_D = \frac{9}{2}T_o$$

$$\frac{P_oV_o}{T_o} = \frac{P_D 3V_o}{\frac{9}{2}T_o} \quad \Rightarrow \quad P_D = \frac{3}{2}P_o \qquad D\left(\frac{3}{2}P_o,3V_o,\frac{9}{2}T_o\right)$$

La transformación CD es una isobara. La transformación EA también es una isobara por estar ambos puntos en una línea recta que pasa por el origen

$$E(P_o,3V_o,3T_o)$$

- *Transformación AB isocora* , $W_{AB}=0$, $\quad Q_{AB} = C_V(T_B - T_A) = \frac{5}{2}R(3T_o - T_o) = 5RT_o$

-*Transformación BC isoterma* , $W_{BC} = -\int_{Vo}^{2Vo} PdV = -\int_{Vo}^{2Vo} R3T_o \frac{dV}{V} = -3RT_o \ln\frac{2V_o}{V_o}$

$$\Delta U = Q_{BC} + W_{BC} = 0 \qquad \Rightarrow \quad Q_{BC} = 3RT_o \ln 2$$

Transformación CD, isobara: $Q_{CD} = C_p(T_D - T_C) = \frac{7}{2}R\left(\frac{9}{2}T_o - 3T_o\right) = \frac{21}{4}RT_o$

$$W_{CD} = -P\ \Delta V = -\frac{3}{2}P_o(3V_o - 2V_o) = -\frac{3}{2}RT_o$$

Transformación DE, isocora: $W_{DE} = 0$

$$Q_{DE} = C_V(T_E - T_D) = \frac{5}{2}R\left(3T_o - \frac{9T_o}{2}\right) = -\frac{15}{4}RT_o$$

Transformación EA, isobara: $Q_{CD} = C_p(T_A - T_E) = \frac{7}{2}R(T_o - 3T_o) = \text{-}7RT_o$

$$W_{CD} = -P\ \Delta V = -P_o(V_o - 3V_o) = 2RT_o$$

El rendimiento es el cociente entre el trabajo efectuado y el calor recibido en el proceso.

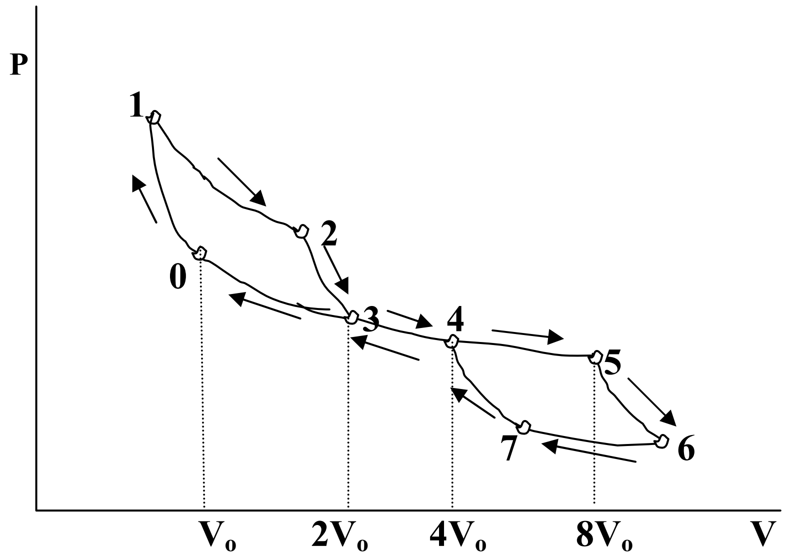
$$W_{total} = 0 - 3RT_o\ln 2 - \frac{3}{2}RT_o + 0 + 2RT_o = -3RT_o\ln 2 + \frac{1}{2}RT_0 = -1{,}58\ \ RT_o$$

Calor recibido durante el ciclo

$$Q_{recibido} = 5RT_o + 3RT_o\ln 2 + \frac{21}{4}RT_o = 12{,}33\ \ RT_o$$

$$\eta = \frac{1{,}58\boldsymbol{RT_o}}{12{,}33\boldsymbol{RT_o}} = 12{,}8\%$$

16.- En la figura inferior aparece un ciclo termodinámico formado por dos ciclos de Carnot



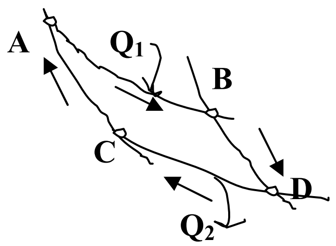
1-2 es una isoterma a la temperatura T_1
0-3-4-5 es una isoterma a la temperatura T_2
6-7 es una isoterma a la temperatura T_3
El resto de las transformaciones son adiabáticas

El rendimiento del ciclo 0-1-2-3 vale ε_1

El rendimiento del ciclo 4-5-6-7 vale ε_2

Calcular el rendimiento del ciclo de la figura en función de ε_1 y ε_2

El rendimento de un ciclo termodinámico es el cociente entre el valor absoluto del trabajo y el calor recibido en el proceso.
Si nos fijamos en un ciclo de Carnot tenemos (fig. 2)



AB isoterma a T_1

DC isoterma a T_2

Desde A a B el sistema recibe calor Q_1 y efectúa trabajo

$$W_{AB} = -\int_{VA}^{VB} PdV = -\int_{VA}^{VB} \frac{RT_1}{V}\, dV = -RT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}$$

De acuerdo con el primer principio de la termodinámica: $\Delta U = Q + W$, pero $\Delta U = 0$, ya que la transformación es isoterma y realizada por un gas ideal. Se concluye que

$$Q_1 = -W = RT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}$$

En la transformación CD el trabajo vale:

$$W_{CD} = -\int_{VC}^{VD} PdV = -\int_{VC}^{VD} \frac{RT_2}{V}\ dV = -RT_2\ \ln\frac{V_D}{V_C}$$

El trabajo total vale

$$W = -RT_1 \ln\frac{V_B}{V_A} - RT_2 \ln\frac{V_D}{V_C} \quad (1)$$

Puesto que By C están en la misma adiabática y lo mismo le sucede a D y A escribimos:

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \quad T_2 V_D^{\gamma-1} = T_1 V_A^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma} \Rightarrow \quad \frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A} \quad (2)$$

Llevamos este resultado a (1)

$$W = -R(T_1 - T_2)\ \ln\frac{V_B}{V_A}$$

y el rendimiento del ciclo vale :

$$\varepsilon = \frac{R(T_1 - T_2)\ \ln\dfrac{V_B}{V_A}}{RT_1\ \ln\dfrac{V_B}{V_A}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (3)$$

Si nos fijamos en el ciclo termodinámico de la figura del enunciado del problema concluimos que se realiza trabajo en los tramos 1-2-4-5 –6-7-3-0. También en el tramo 3-4 pero en la vuelta ese trabajo se anula en el proceso 4-3. En definitiva el trabajo vale

$$W = -R(T_1 - T_2)\ \ln\frac{V_2}{V_1} - R(T_2 - T_3)\ \ln\frac{V_5}{V_4}$$

El calor recibido se produce en 1-2-3-4-5 y vale

$$Q = RT_1\ \ln\frac{V_2}{V_1} + RT_2\ \ln\frac{V_4}{V_3} + RT_2\ \ln\frac{V_5}{V_4}$$

De acuerdo con la ecuación (2) aplicada al ciclo primero tenemos

$$\frac{V_3}{V_o} = \frac{V_2}{V_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_0}{2V_o} = \frac{1}{2}$$

El rendimiento del ciclo es :

$$\varepsilon = \frac{R(T_1 - T_2)\ \ln 2 + R(T_2 - T_3)\ \ln\frac{8V_o}{4V_o}}{RT_1\ \ln 2 + RT_2\ \ln\frac{4V_o}{2V_o} + RT_2\ \ln\frac{8V_o}{4V_o}} = \frac{T_1 - T_3}{T_1 + 2T_2} \quad (4)$$

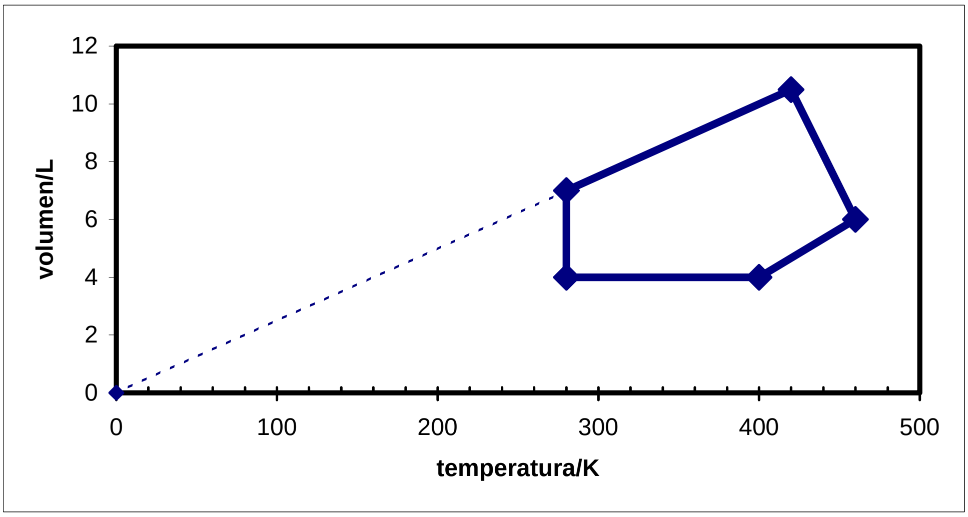
De acuerdo con la ecuación (3)

$$\varepsilon_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{T_2 - T_3}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1(1-\varepsilon_1) \quad ; \quad T_3 = T_1(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$$

Sustituyendo los valores de la temperatura en la ecuación (4)

$$\varepsilon = \frac{T_1 - T_3}{T_1 + 2T_2} = \frac{T_1 - T_1(1-\varepsilon_1)\ (1-\varepsilon_2)}{T_1 + 2T_1(1-\varepsilon_1)} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}{3 - 2\varepsilon_1}$$

17.- Un gas ideal sufre la transformación cíclica indicada en la figura inferior



A (1 atm , 4 L , 280 K) , B(4 L , 400 K) ; C(6 L , 460 K) ; D (10,5 L, 420 K). Construir el ciclo de transformación en el diagrama presión (eje Y), temperatura (eje X).

La transformación AB es una isocora

$$\frac{1}{280} = \frac{P_B}{400} \quad \Rightarrow \quad P_B = 1{,}43\ \text{atm}$$

Sea X un punto intermedio entre A y B

$$\frac{1}{280} = \frac{P_X}{T_X} \quad \Rightarrow \quad P_X = \frac{1}{280} T_X \quad (1)$$

La ecuación (1) nos dice que la representación desde A hasta B, en el diagrama P-T, es una línea recta.

Aplicamos la ecuación de los gases entre B y C

$$\frac{1{,}43*4}{400}=\frac{P_C*6}{460} \quad \Rightarrow \quad P_C=1{,}09\ \text{atm}$$

Sea X un punto intermedio entre B y C (ver fig. 1). Comparando triángulos semejantes resulta:

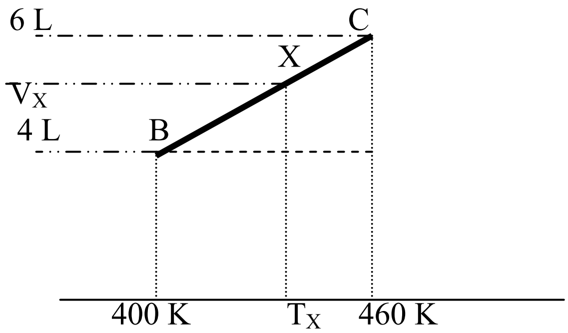


Fig 1

$$\frac{6-4}{460-400}=\frac{V_X-4}{T_X-400} \quad \Rightarrow \quad V_X=\frac{T_X-400}{30}+4$$

$$\frac{P_B*V_B}{T_B}=\frac{P_X*V_X}{T_X}=\frac{1{,}43*4}{400}=\frac{P_X*\left(\frac{T_X-400}{30}+4\right)}{T_X} \quad \Rightarrow \quad P_X=\frac{0{,}0143T_X}{\left(\frac{T_X-400}{30}+4\right)} \quad (2)$$

Si en la ecuación (2), damos valores a T_X comprendidos entre 400 y 460 K, tenemos los correspondientes valores de la presión

T_X/ K	400	410	420	430	440	450	460
P_X /atm	1,43	1,353	1,287	1,230	1,180	1,136	1,096

Para el tramo CD se deduce a partir de la figura 2.

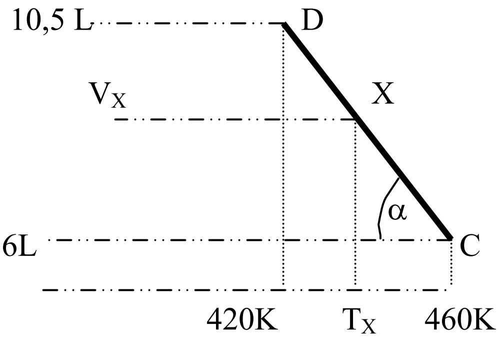


Fig. 2

$$\text{tag } \alpha = \frac{10{,}5-6}{420-460} = -0{,}1125 = \frac{V_X - 6}{T_X - 460} \quad \Rightarrow \quad V_X = -0{,}1125 T_X + 57{,}75$$

$$\frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{1{,}09 * 6}{460} = \frac{P_X * (-0{,}1125 T_X + 57{,}75)}{T_X} \quad \Rightarrow \quad P_X = \frac{0{,}01422 \ T_X}{-0{,}1125 \ T_X + 57{,}75} \qquad (3)$$

Si en la ecuación (3), damos valores a T_X comprendidos entre 460 y 420 K, tenemos los correspondientes valores de la presión.

T_X/K	460	450	440	430	420
P_X/atm	1,09	0,90	0,76	0,65	0,57

El tramo DE obedece a la ecuación

$$V = kT = 10{,}5 = k * 420 \quad \Rightarrow \quad V_E = \frac{10{,}5}{420} 280 = 7 \ \text{L}$$

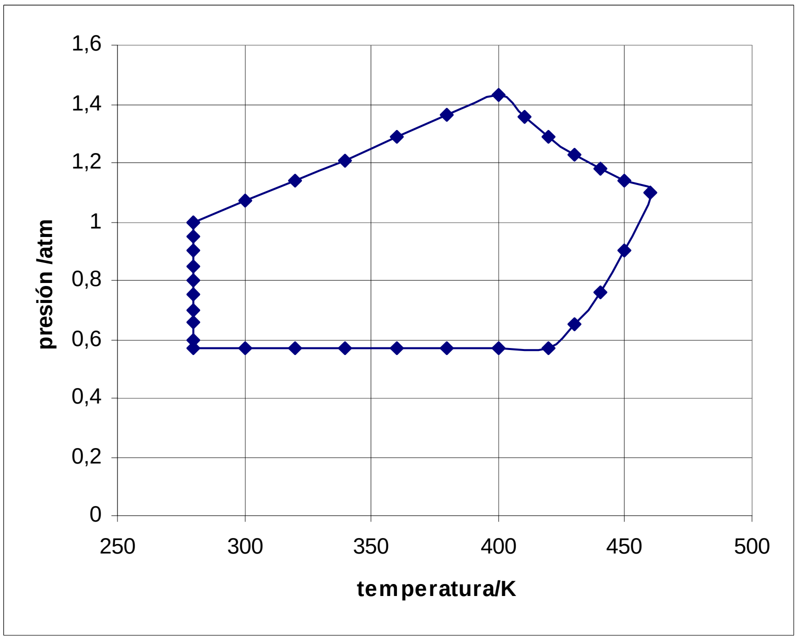
Para un punto intermedio entre D y E se cumple

$$V_X = \frac{10{,}5}{420} T_X \quad ; \quad \frac{0{,}57 * 10{,}5}{420} = \frac{P_X \left(\frac{10{,}5}{420} T_X \right)}{T_X} \quad \Rightarrow \quad P_X = 0{,}57 \ \text{atm} \quad (4)$$

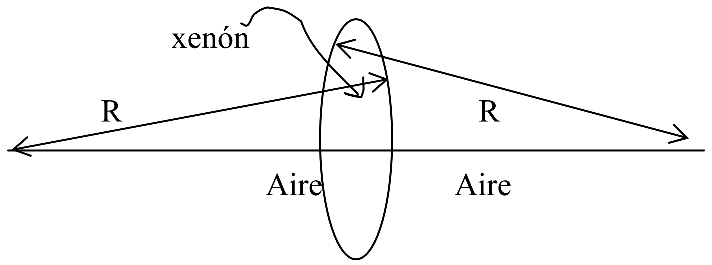
De (4) se deduce que en el diagrama P-T el tramo D-E es una línea horizontal

El tramo EA es una isoterma a 280 K. La presión entre E y A aumenta desde 0,57 atmósferas a una atmósfera manteniéndose constante la temperatura.

Con los valores anteriores se puede construir el diagrama P-T.



18.- Se ha introducido gas xenón (masa molar 131,3 g/mol) entre dos membranas elásticas que forman las superficies indicadas en la figura inferior. El gas dentro de las membranas se encuentra a 1,5 atmósferas de presión y a 27ºC.



El aire exterior se encuentra también a 27ºC y a la presión de una atmósfera. El radio R de las dos superficies esféricas es el mismo y su valor es 20 m.
La velocidad de propagación del sonido en un gas viene dada por la expresión

$$\mathbf{v}=\sqrt{\left(\frac{\mathbf{C_p}}{\mathbf{C_v}}\right)\left(\frac{\mathbf{P}}{\boldsymbol{\rho}}\right)}$$

Cp y Cv son las capacidades molares del gas a presión y volumen constante respectivamente, P es la presión del gas y ρ su densidad. Calcular la distancia focal de la lente de la figura para las ondas sonoras, teniendo en cuenta que la velocidad de propagación del sonido en el aire y a 273 K es 331,3 m/s. Considerese al aire y al xenón como gases perfectos.

La distancia focal de una lente viene dada por la expresión:

$$\frac{1}{f}=\left(\frac{n_{\text{argón}}}{n_{\text{aire}}}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\left(\frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{argón}}}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

En nuestro caso $R_1 = + 20$ m y $R_2 = - 20$ m.

Vamos a calcular la velocidad del sonido en el aire a la temperatura de 27ºC, haciendo uso de la ecuación de los gases perfectos y de la ecuación de la velocidad del sonido:

$$PV=\frac{g}{M}RT \quad ; \quad P=\frac{\rho RT}{M}$$

$$\frac{v_{273}}{v_{300}}=\frac{\sqrt{\frac{C_P}{C_V}\frac{P}{\rho_{273}}}}{\sqrt{\frac{C_P}{C_V}\frac{P}{\rho_{300}}}}=\frac{\sqrt{\rho_{300}}}{\sqrt{\rho_{273}}}=\sqrt{\frac{\frac{PM}{RT_{300}}}{\frac{PM}{RT_{273}}}}=\sqrt{\frac{T_{273}}{T_{300}}} \quad \Rightarrow \quad v_{300}=\frac{313,3}{0,954}=328,4\ \frac{m}{s}$$

Vamos a calcular la velocidad de propagación de las ondas sonoras en el xenón.
Para este gas monoatómico el cociente Cp/Cv = 5/3 , la presión del gas es 1,5 atm y su densidad se calcula mediante la ecuación de los gases perfectos

$$PV = \frac{g}{M} RT \quad ; \quad P = \frac{\rho RT}{M} \quad \Rightarrow \quad \rho_{300} = \frac{1{,}5 * M}{RT}$$

$$v = \sqrt{\frac{5}{3} * \frac{1{,}5}{\frac{1{,}5 * M}{RT_{300}}}} = \sqrt{\frac{5RT_{300}}{3 * M}} = \sqrt{\frac{5 * 8{,}31 \frac{J}{molK} * 300K}{3 * 131{,}3.10^{-3} \frac{kg}{mol}}} = 178 \ \frac{m}{s}$$

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{328{,}4}{178} - 1\right)\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{-20}\right) \quad \Rightarrow \quad f = 11{,}8 \ m$$