

Electricidad I

1.- Se disponen de $n = 100$ pilas cada una con una fuerza electromotriz $\varepsilon = 1,5 \text{ V}$ y resistencia interna $r = 1\Omega$. Con estas pilas se forman agrupaciones que cada una contiene β pilas en serie y todas estas agrupaciones, designado su número con α , se asocian en paralelo.

El conjunto se une a una resistencia exterior $R = 4 \Omega$ a) calcular el dispositivo que proporciona un valor máximo de la intensidad de la corriente que pasa por la resistencia R y el valor de ésta.

b) Resolver el mismo ejercicio si cada agrupación la formasen β pilas en paralelo y luego estas agrupaciones se uniesen en serie.

a) Cada agrupación está formada por β pilas en serie luego la resistencia es βr y la fuerza electromotriz $\beta\varepsilon$. Al unir las agrupaciones en paralelo la fuerza electromotriz es la de una agrupación, pero la resistencia disminuye al estar en paralelo al valor $\frac{\beta r}{\alpha}$, siendo $\alpha\beta = n$.

Cuando se une el dispositivo a la resistencia exterior por ella pasa una intensidad

$$I = \frac{\beta\varepsilon}{\frac{\beta r}{\alpha} + R} \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que $\alpha\beta = n$, escribimos:

$$I = \frac{\beta\varepsilon}{\frac{\beta r}{\frac{n}{\beta}} + R} = \frac{n\beta \varepsilon}{\beta^2 r + nR}$$

Si la intensidad es máxima derivamos la función intensidad frente a la variable β e igualamos a cero

$$\frac{dI}{d\beta} = \frac{(\beta^2 r + nR) * n\varepsilon - (n\beta \varepsilon) * 2\beta r}{(\beta^2 r + nR)^2} = 0 \Rightarrow \beta^2 r + nR = 2\beta^2 r$$
$$\Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{nR}{r}} = \sqrt{\frac{100 * 4}{1}} = 20$$

y del valor de beta se deduce el de alfa : $\alpha \beta = n \Rightarrow \alpha = \frac{n}{\beta} = \sqrt{\frac{nr}{R}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$

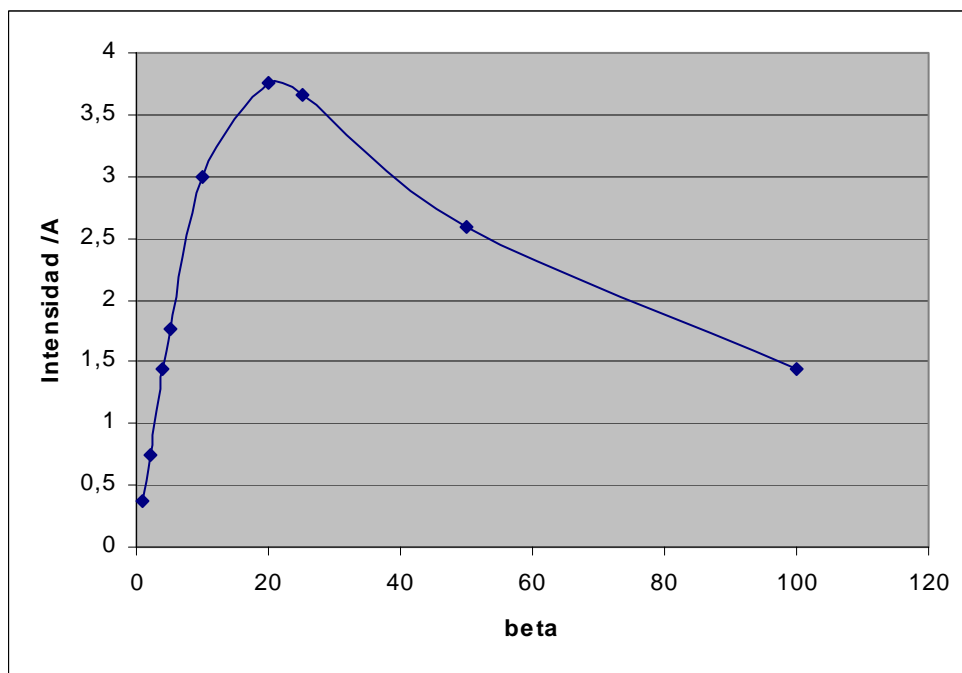
El valor de la intensidad se obtiene sustituyendo el valor de beta en (1)

$$I = \frac{\frac{n\sqrt{\frac{nR}{r}}\varepsilon}{\frac{nR}{r} * r + nR}}{\frac{nR}{r}} = \frac{\sqrt{\frac{nR}{r}}\varepsilon}{2R} = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{n}{Rr}} = \frac{1,5}{2} \sqrt{\frac{100}{4}} = 3,75 \text{ A}$$

Teniendo en cuenta que tanto alfa como beta son números enteros los dispositivos que pudiesen formarse son:

- 1) $\alpha = 1, \beta = 100$ 2) $\alpha = 2, \beta = 50$ 3) $\alpha = 4, \beta = 25$ 4) $\alpha = 5, \beta = 20$ 5) $\alpha = 10, \beta = 10$
 6) $\alpha = 20, \beta = 5$ 7) $\alpha = 25, \beta = 4$ 8) $\alpha = 50, \beta = 2$ 9) $\alpha = 100, \beta = 1$

En la figura 1 está representada la intensidad de la corriente para cada dispositivo, frente al valor de beta.



b) Cuando se agrupan b pilas en paralelo la resistencia es $\frac{r}{\beta}$ y la fuerza electromotriz

ε . Si se unen en serie α agrupaciones anteriores entonces la resistencia total es: $\frac{\alpha r}{\beta}$ y la

fuerza electromotriz $\alpha\varepsilon$. De acuerdo con la ley de Ohm y que $\alpha\beta = n$, resulta para la intensidad de la corriente

$$I = \frac{\alpha \varepsilon}{\frac{\alpha r}{\beta} + R} = \frac{n\alpha \varepsilon}{\alpha^2 r + R}$$

Como la intensidad ha de ser máxima derivamos con respecto a la variable α e igualamos a cero

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{(\alpha^2 r + R) * n\varepsilon - (n\alpha \varepsilon) * 2\alpha r}{(\alpha^2 r + R)^2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 r + R = 2\alpha^2 r \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{R}{r}} = 2$$

2.-Una cafetera que funciona a 220 V con una eficiencia del 60% contiene 500 cm³ de agua a una temperatura de 16°C. Calcular el tiempo que transcurre para que se evapore todo el agua. La resistencia eléctrica de la cafetera es 16 Ω

Datos: Calor específico del agua = 4190 J/(kgK) , Calor latente de vaporización 2,255.10⁶ J/kg

Energía suministrada por la cafetera $\frac{V^2}{R} \cdot t \cdot 0,60 = \frac{220^2}{16} \cdot 0,60t$, t es el tiempo de funcionamiento

Calentar el agua de 16 a 100°C exige una energía de $500 * 4,19 * (100 - 16)$ J

Evaporar el agua exige una energía de $500 * 2,255.10^3$ J

$$\frac{220^2}{16} 0,60t = 500 * 4,19 * (100 - 16) + 500 * 2,255.10^3; \quad t = 718 \text{ s}$$

3.-Un circuito está formado por una batería de resistencia interna 1 Ω y una resistencia externa de 9 Ω. A este circuito se le añade una resistencia Rx desconocida en paralelo con la de 9 Ω. Se observa que la potencia suministrada por la batería a las resistencias exteriores es la misma en los dos casos. Determinar el valor de Rx

La intensidad en el primer circuito es $I = E/(9+1)$, siendo E la f.e.m. de la batería.

La potencia disipada en el circuito exterior es $P = I^2 \cdot 9 = E^2 \cdot 9 / 100$

En el segundo circuito la resistencia exterior es : $1/R_e = (1/9) + 1/R_x$; $R_e = 9R_x / (9 + R_x)$

y la intensidad de la corriente,
$$I' = \frac{E}{1 + \frac{9R_x}{9 + R_x}} = \frac{E(9 + R_x)}{9 + 10R_x}$$

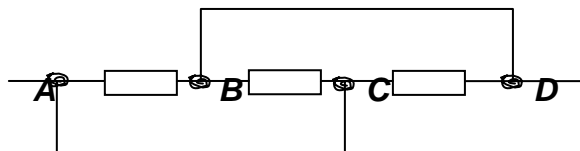
La potencia disipada en las resistencias exteriores es :

$$P = \frac{E^2 (9 + R_x)^2}{(9 + 10R_x)^2} * \left(\frac{9R_x}{9 + R_x} \right) = \frac{E^2 (9 + R_x) 9R_x}{(9 + 10R_x)^2}$$

Teniendo en cuenta que las potencias son iguales,
$$\frac{E^2 \cdot 9}{100} = \frac{E^2 (9 + R_x) 9R_x}{(9 + 10R_x)^2},$$

Resolviendo $R_x = 81 / 720 \ \Omega.$

4.- En el circuito eléctrico de la figura inferior cada resistencia vale R y los hilos se consideran sin resistencia. Los extremos A y D se unen a una batería de corriente continua cuya resistencia interna es r. Calcular el valor de R en función de r, para que la batería suministre la máxima potencia a dicho circuito



Si los hilos se consideran sin resistencia, los puntos A y C se encuentran al mismo potencial ya que el hilo que los une carece de resistencia. También se encuentran al mismo potencial los puntos B y D. Podemos hacer un circuito como el anterior uniendo en un mismo punto A y C y en otro B y D. Esos puntos los unimos a través de las resistencias que existen entre ellos. Entre A y B hay una resistencia, otra entre B y C y una tercera entre C y D. Por tanto la agrupación corresponde a la figura 1

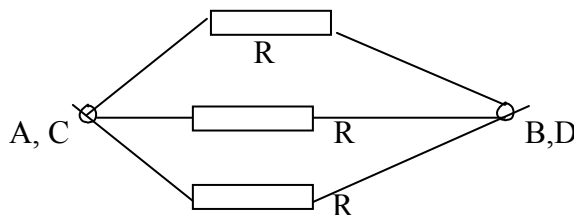


Fig.1

De la figura 1 se deduce que las tres resistencias están en paralelo, por tanto su resistencia equivalente vale:

$$R_E = \frac{R}{3}$$

Si esta resistencia equivalente se une a una generador de fuerza electromotriz ε y resistencia interna r , la intensidad que pasa por ella es de acuerdo con la ley de Ohm

$$I = \frac{\varepsilon}{\frac{R}{3} + r}$$

y la potencia suministrada

$$P = I^2 \frac{R}{3} = \frac{\varepsilon^2}{\left(\frac{R}{3} + r\right)^2} \frac{R}{3}$$

Si la potencia es máxima derivamos la anterior expresión respecto de R e igualamos a cero.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\varepsilon^2}{3} \left[\frac{\left(\frac{R}{3} + r\right)^2 - R \left[2 \left(\frac{R}{3} + r\right) \cdot \frac{1}{3} \right]}{\left(\frac{R}{3} + r\right)^4} \right] = 0 \Rightarrow \frac{R}{3} + r - \frac{2}{3}R = 0 \Rightarrow R = 3r$$

5.-Un aro delgado de radio $R = 5 \text{ cm}$ lleva una carga eléctrica $q = 9 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, uniformemente distribuida sobre él. Dicho aro yace sobre el plano XY de modo que el eje Z es perpendicular al mismo pasando por su centro. Sobre dicho eje Z existe una carga puntual igual a la del aro, siendo la masa de la carga $m = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$. Si la mencionada carga puede mantenerse en equilibrio ¿cuál es el valor de su coordenada Z ?

El aro delgado crea un campo eléctrico sobre el eje Z . Por simetría se deduce que dicho campo solamente tiene componente sobre el eje Z .

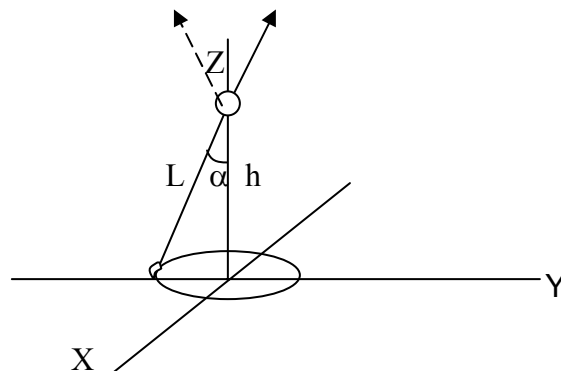


Fig. 1

En la figura 1 se observa que un elemento de carga dq crea un campo (señalado con flecha continua), pero por simetría existe otra carga dq , situada en el otro extremo del diámetro, que crea un campo que anula la componente horizontal del anterior elemento y suma la componente sobre el eje Z.

$$E_z = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{L^2} \cos \alpha$$

Debido a ese campo la carga sufre una fuerza de valor

$$F_z = qE_z = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q^2}{L^2} \frac{h}{L}$$

y que tiene la dirección vertical hacia el eje Z positivo.

Si la carga está en equilibrio la fuerza eléctrica debe ser igual al peso, por tanto:

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q^2}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} * h = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi \epsilon_0 mg}{q^2}$$

El valor de h lo deducimos en la anterior ecuación por tanteo

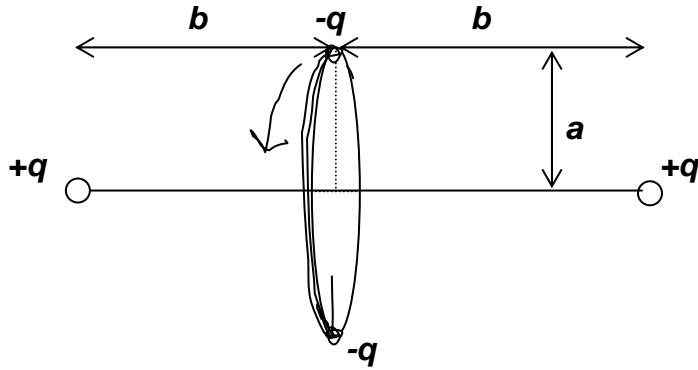
$$\frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi \epsilon_0 mg}{q^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{(h^2 + 25 \cdot 10^{-4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 * 0,5 \cdot 10^{-3} * 9,8}{9 \cdot 10^9 * (9 \cdot 10^{-8})^2} = 67,2$$

Damos valores a h en metros hasta que el valor dado coincida prácticamente con 67,2. Recogemos los datos en una tabla

h/m	0,08	0,10	0,12	0,11	0,105	0,104
Valor del primer miembro	95,3	71,6	54,6	62,3	66,8	67,6

El valor de $h = 10,4$ cm

6.- En el sistema de cargas de la figura, las cargas positivas se encuentran en reposo (distan entre sí, $2b$) y las negativas (cada una con una masa m) describen una circunferencia de radio a , manteniéndose siempre a la distancia entre sí de $2a$.



Calcular la relación que existe entre las distancias a y b y la velocidad angular de rotación de las cargas negativas para que el sistema se encuentre en equilibrio

Analizamos la carga positiva situada a la izquierda en la figura del enunciado. Las fuerzas que actúan sobre ella están representadas en la figura 1.

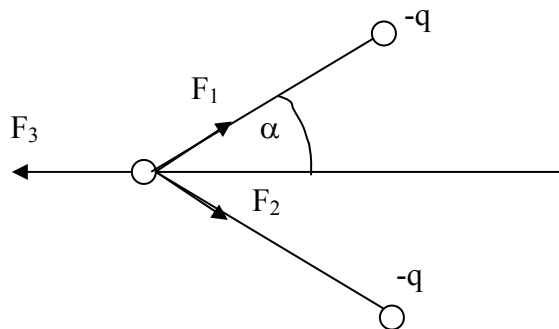


Fig.1

En la figura 1, F_1 es la fuerza de atracción que ejerce la carga $-q$ superior y F_2 la que ejerce la carga $-q$ inferior. Los módulos de estas fuerzas son iguales. La distancia entre la carga $-q$ y $+q$ es :

$$D = \sqrt{a^2 + b^2}$$

F_3 es la fuerza de repulsión entre las dos cargas positivas que se encuentran a una distancia $2b$. Como la carga está en reposo la suma vectorial de las fuerzas debe ser cero. Traducido en módulos se cumple que

$$F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \alpha = F_3 = 2F_1 \cos \alpha \quad (1)$$

Siendo

$$F_1 = K \frac{q^2}{D^2} = K \frac{q^2}{a^2 + b^2} \quad ; \quad F_3 = K \frac{q^2}{(2b)^2} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Llevando estos valores a la ecuación (1)

$$K \frac{q^2}{4b^2} = 2K \frac{q^2 b}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} = 8b^3 \Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 64b^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4b^2 \Rightarrow a = \sqrt{3} b$$

sobre la carga $-q$ superior que esta girando en una circunferencia de radio a , actúan tres fuerzas, dos (F_A) son atractivas de las cargas positivas y una (F_R) repulsiva de la otra carga negativa (figura 2)

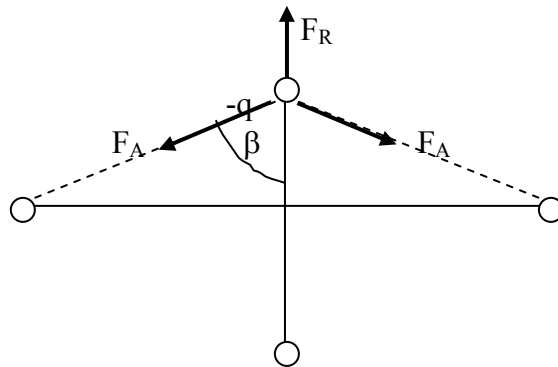


Fig.2

En la figura 2 el sistema se observa de tal manera que el plano de la circunferencia descrita por las cargas negativas se convierte en una línea

Ahora las componentes de las fuerzas F_A en la dirección de F_R dan una fuerza resultante dirigida hacia el centro de la circunferencia y esa resultante es precisamente la fuerza centrípeta que la carga q necesita para girar en la circunferencia de radio a .

$$2F_A \cos\beta - F_R = \text{Fuerza centrípeta} = m\omega^2 a \quad (2)$$

siendo:

$$F_A = K \frac{q^2}{a^2 + b^2} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad F_R = K \frac{q^2}{(2a)^2}$$

Llevando estos valores a (2), resulta:

$$2K \frac{q^2}{a^2 + b^2} * \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - K \frac{q^2}{4a^2} = m\omega^2 a \Rightarrow \omega^2 = \frac{Kq^2}{ma} \left(\frac{2a}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4a^2} \right)$$

Como también se cumple que $a = \sqrt{3} b$, podemos poner la expresión anterior en función de a

$$\omega^2 = \frac{Kq^2}{ma} \left(\frac{2a}{\left(a^2 + \frac{a^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4a^2} \right) = \frac{Kq^2}{ma} \left(\frac{2a * 3^{\frac{3}{2}}}{4^{\frac{3}{2}} * a^3} - \frac{1}{4a^2} \right) = \frac{Kq^2}{ma^3} \left(2 * \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \right)$$

7.- Entre dos puntos A y B de un circuito eléctrico se coloca un voltímetro con un fondo de escala de 10 V y en esa posición da una lectura de 8,92 V. Si en el mismo voltímetro se cambia el fondo de escala a 30 V, la lectura es 9,04 V. Determinar la diferencia de potencial cuando no se coloca el voltímetro entre los citados puntos.

Cuando no se coloca el voltímetro entre A y B la intensidad que circula la designamos por I y al diferencia de potencial entre los puntos es:

$$\Delta V = IR_{AB} \quad (1)$$

cuando se coloca el voltímetro con un fondo de escala de 10 V, parte de la intensidad I pasa por el aparato, a esta intensidad la llamamos I_1 . Por AB pasa $I - I_1$.

La diferencia de potencial entre A y B es:

$$(I - I_1)R_{AB} = \Delta V_1 \quad (2)$$

siendo R_{AB} la resistencia eléctrica entre esos dos puntos y ΔV_1 lo que indica el voltímetro. Cuando se cambia el fondo de escala a 30 V, la intensidad que pasa por el aparato es $I_1/3$ y la diferencia de potencial es:

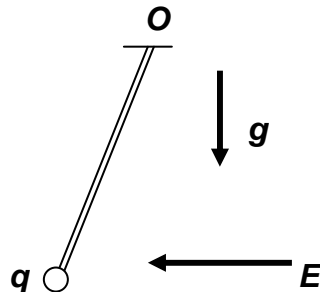
$$\left(I - \frac{I_1}{3}\right) R_{AB} = \Delta V_2 \quad (3)$$

ahora ΔV_2 es la nueva lectura del voltímetro . De las ecuaciones (1) , (2) y (3) resulta :

$$\Delta V = \frac{3 \Delta V_2 - \Delta V_1}{2} = \frac{3 * 9,04 - 8,92}{2} = 9,10 \text{ V}$$

$$\varepsilon_{\text{fuente}} = 0,006 * 3 * 1,36 * t^2 + 3 * 0,05 * \cos 30 * 0,2t = 0,025t^2 + 0,026t$$

8.-Una barra cilíndrica tiene una masa $m = 10^{-3}$ kg y una longitud $l = 1$ m. Por el extremo superior O está articulada y puede girar alrededor de un eje perpendicular a ella, en el otro extremo lleva una pequeña carga puntual $q = 10^{-6}$ C. El conjunto está sometido a la acción del campo gravitatorio vertical uniforme $g = 9,81$ N/kg y al campo eléctrico uniforme y de dirección horizontal $E = 2,83 \cdot 10^3$ N/C.



Si la barra se separa de su posición de equilibrio determinar el periodo de oscilación.

En la figura 1 se representan las fuerzas que actúan sobre el sistema. Una es el peso y la otra la acción del campo eléctrico sobre la bola cargada. Ambas fuerzas crean momentos antagónicos respecto del punto de suspensión O, cuando ambos momentos sean iguales el sistema se encuentra en su posición de equilibrio

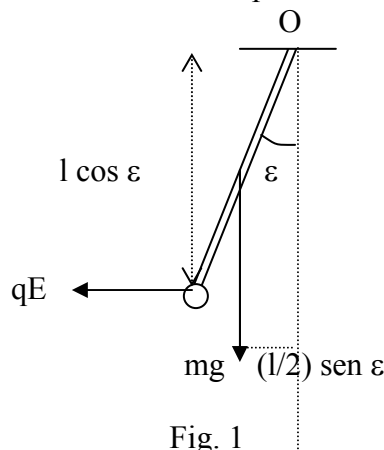
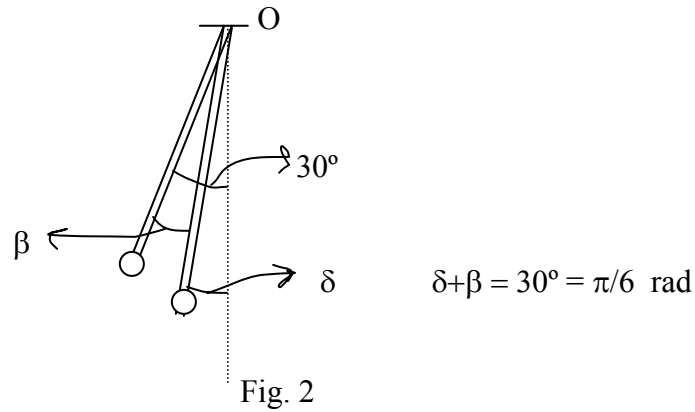


Fig. 1

En la figura 1, ε es el ángulo que forma la barra con la dirección vertical cuando se encuentre en equilibrio. Para dicha posición los momentos de mg y de qE , respecto del punto O de la articulación, son iguales y opuestos.

$$qE \cos \varepsilon \cdot l = mg \sin \varepsilon \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow \tan \varepsilon = \frac{2qE}{mg} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2,83 \cdot 10^2}{10^{-3} \cdot 9,81} = 0,577 \Rightarrow \varepsilon = 30^\circ$$

Si separamos la barra un ángulo β de su posición de equilibrio el momento de la fuerza qE es superior al momento del peso mg y la barra tiende a retornar a su posición de equilibrio



El valor del momento resultante cuando la barra se encuentre en la posición dibujada en la figura 2 es:

$$M = qEl\cos\delta - mg\frac{1}{2}\text{sen}\delta$$

De acuerdo con la ecuación de la dinámica de rotación $M = I\alpha$, siendo I el momento de inercia de la barra respecto de O y α la aceleración angular de la misma.

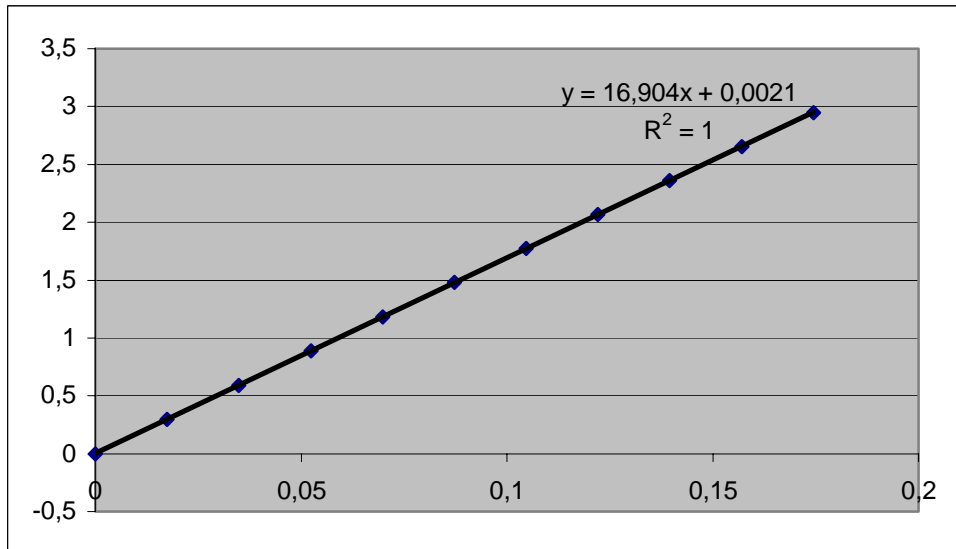
$$qEl\cos\delta - mg\frac{1}{2}\text{sen}\delta = I\alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{qE\cos\delta - \frac{mg\text{sen}\delta}{2}}{ml} \cdot 3$$

La aceleración angular α de la barra depende del ángulo δ .

Para conocer algo sobre esa relación representamos los valores de α frente a valores de β inferiores a 10° .

$$\alpha = \frac{10^{-6} * 2,83 \cdot 10^3 \cos\delta - \frac{10^{-3} * 9,81}{2} \text{sen}\delta}{10^{-3} * 1} * 3 = 8,49 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right) - 14,71 \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right)$$



De la gráfica anterior se deduce que, con muy buena aproximación, la aceleración angular es directamente proporcional al ángulo de separación de la posición de equilibrio, esto es, $\alpha = 16,9 \beta$.

La ecuación de la Dinámica de rotación establece que $M = I\alpha$. En el caso de que M sea directamente proporcional al ángulo de separación de la posición de equilibrio

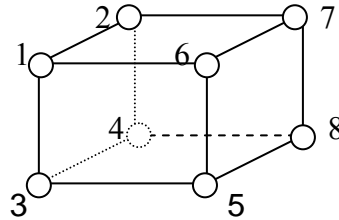
$$k \beta = I\alpha, \text{ resulta que } \alpha = \frac{k}{I}\beta \text{ y el periodo del movimiento es } T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}.$$

En el problema $\frac{k}{I} = 16,9$ y por tanto el periodo vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{16,9I}} = 1,53 \text{ s}$$

9.- Un dispositivo consiste en un cubo de lado a estando en cada uno de sus vértices una carga puntual q . Calcular su energía potencial eléctrica

Podemos hacerle cálculo mediante el trabajo que hay que hacer para llevar primero una carga desde el infinito al vértice 1. Luego se calcula el trabajo para llevar desde el infinito una carga al vértice 2, luego al vértice 3 y así sucesivamente



El trabajo para llevar una carga desde el infinito a otro punto vale:

$$W = q(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}}) = -qV_{\text{llegada}}$$

Dado que consideramos al potencial de partida el infinito con valor cero.

Las distancias desde una carga a las demás valen: a para el vértice más próximo, $a\sqrt{2}$ para la que este en diagonal de su mismo plano y $a\sqrt{3}$

Trabajo para llevar la carga 1: $W_1 = 0$, ya que el potencial de llegada es cero.

Trabajo para llevar la carga 2: $V_{\text{llegada}} = \frac{kq}{a} \Rightarrow W_2 = -\frac{kq^2}{a}$

Trabajo para llevar la carga 3: $V_{\text{llegada}} = \frac{kq}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow W_3 = -\frac{kq^2}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Trabajo para llevar la carga 4: $V_{\text{llegada}} = \frac{kq}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1\right) \Rightarrow W_4 = -\frac{kq^2}{a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Trabajo para llevar la carga 5:

$$V_{\text{llegada}} = \frac{kq}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow W_5 = -\frac{kq^2}{a} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Trabajo para llevar la carga 6:

$$V_{\text{llegada}} = \frac{kq}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) \Rightarrow W_6 = -\frac{kq^2}{a} \left(2 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Trabajo para llevar la carga 7:

$$V_{\text{llegada}} = \frac{kq}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) \Rightarrow W_7 = -\frac{kq^2}{a} \left(2 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Trabajo para llevar la carga 8:

$$V_{\text{llegada}} = \frac{kq}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) \Rightarrow W_8 = -\frac{kq^2}{a} \left(3 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

El trabajo total es la suma de los trabajos parciales:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 = -\frac{kq^2}{a} \left(12 + \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$$

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p \text{ final}} - E_{p \text{ inicial}}) \Rightarrow -E_{p \text{ final}} = -\frac{kq^2}{a} \left(12 + \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$$

El valor de la constante k es: $k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$

10.- Los radios de tres esferas concéntricas son $R_1 = 1 \text{ cm}$, $R_2 = 10 \text{ cm}$ y $R_3 = 20 \text{ cm}$ respectivamente. Las cargas eléctricas de las mencionadas esferas son $Q_1 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, $Q_2 = Q_3 = -Q_1$. Calcular el potencial en la superficie de la primera esfera suponiendo que el potencial en el infinito es cero.

Entre las esferas 1 y 2 consideramos una superficie gaussiana que consiste en una esfera de radio r (fig. 1)

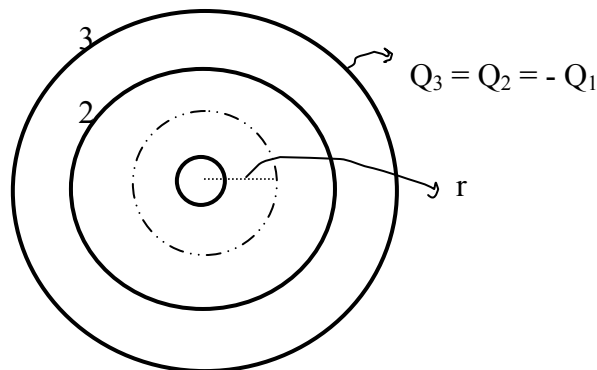


Fig.1

De acuerdo con el teorema de Gauss:

$$\int E * dS = E * 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \quad ; \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Para una superficie gaussiana de radio comprendido entre R_2 y R_3 , $E = 0$, ya que no hay carga neta en su interior.

Para puntos exteriores a la tercera esfera el teorema de Gauss establece:

$$\int E * dS = E * 4\pi r^2 = \frac{Q_2}{\epsilon_0} \quad ; \quad R_3 \leq r$$

Ahora tenemos en cuenta que $E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int -dV = \int E * dr$

$$\int_{V_\infty}^{V_3} -dV = \int_{\infty}^{R_3} E * dr = \int_{\infty}^{R_3} \frac{Q_2}{4\pi \epsilon_0} * \frac{1}{r} \Rightarrow -V_3 + V_\infty = -\frac{Q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{R_3} \quad (1)$$

$$\int_{V_3}^{V_2} -dV = \int_{R_3}^{R_2} E * dr = 0 \Rightarrow -V_2 + V_3 = 0 \Rightarrow V_2 = V_3 \quad (2)$$

$$\int_{V_2}^{V_1} -dV = \int_{R_2}^{R_1} E * dr = -V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_2}^{R_1} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] \quad (3)$$

Se suman las ecuaciones (1) y (3) y se tiene en cuenta la (2) y que $-Q_2 = Q_1$

$$-V_3 + V_\infty - V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right] = 2 \cdot 10^{-8} * 9 \cdot 10^9 \left[\frac{1}{1 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{10 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{20 \cdot 10^{-2}} \right] = 1,53 \cdot 10^4 \text{ V}$$

11.- Un dispositivo electrostático consiste en n capas esféricas metálicas concéntricas de radios crecientes $r_1, r_2 \dots r_n$ y con cargas $q_1, q_2 \dots q_n$. Determinar la energía potencial eléctrica almacenada en el mencionado dispositivo.

Para realizar el cálculo suponemos que cada capa esférica la vamos cargando trayendo una carga diferencial dq desde el infinito hasta la esfera. Se comienza por la primera y cuando ésta se haya cargado se procede con la segunda y así sucesivamente. Recordamos que el trabajo viene dado por la expresión:

$$W = dq(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}}) = -V_{\text{llegada}} * dq$$

siendo el V_{partida} en el infinito e igual a cero.

Supongamos que la primera capa esférica tiene una carga q y que sobre ella depositamos una carga dq traída desde el infinito, el trabajo realizado es:

$$dW_I = -dq \left(\frac{1}{4\pi \epsilon_0 r_1} q \right)$$

El trabajo total para cargar la capa esférica desde 0 a q_1 es:

$$W_I = \int_0^{q_1} -\frac{1}{4\pi \epsilon_0 r_1} q dq = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1^2}{2r_1}$$

El trabajo es igual a menos la variación de energía potencial

$$W_I = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1^2}{2r_1} = -(E_f^I - E_i) \quad \Rightarrow \quad E_f^I = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1^2}{2r_1}$$

Una vez que se ha cargado la primera capa esférica supongamos que la segunda tiene una carga q y que sobre ella depositamos una carga dq traída desde el infinito

$$W_{II} = \int_0^{q_2} -dq \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_2} + \frac{q}{r_2} \right) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_2} + \frac{q_2^2}{2r_2} \right) = -E_f^{II}$$

Una vez cargada la segunda esfera procedemos a cargar la tercera

$$W_{III} = \int_0^{q_3} -dq \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_3} + \frac{q_2}{r_3} + \frac{q}{r_3} \right) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_3} + \frac{q_2 q_3}{r_3} + \frac{q_3^2}{2r_3} \right) = -E_f^{III}$$

La energía final será la suma de cada una de las energías $E = E_f^I + E_f^{II} + \dots + E_f^n$

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\left(\frac{q_1^2}{2r_1} + \dots + \frac{q_n^2}{2r_n} \right) + \left(\frac{q_2}{r_2} q_1 + \frac{q_3}{r_3} (q_1 + q_2) + \dots + \frac{q_n}{r_n} (q_1 + q_2 \dots + q_{n-1}) \right) \right]$$