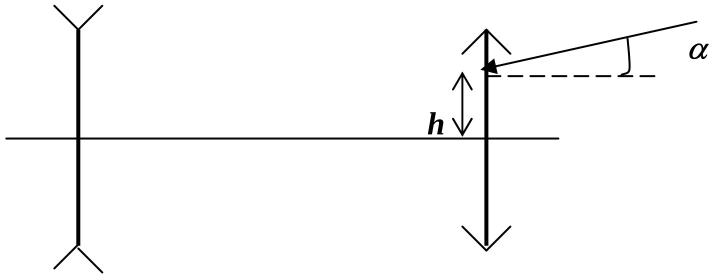
Óptica y otros

1.- En el dispositivo óptico de la figura inferior, la lente convergente tiene una distancia focal f_1 y la divergente f_2



La distancia focal de f_2 es en valor absoluto mayor que f_1. La distancia entre las lentes coincide numéricamente con el valor de f_2. Un rayo luminoso llega a la lente convergente a una altura h sobre el eje formando un ángulo α. Calcular el valor del ángulo que forma el rayo que sale de la lente divergente con el eje óptico del sistema.

Para la construcción de la marcha del rayo tenemos en cuenta que un rayo paralelo al incidente y que pasa por el centro óptico no sufre desviación y que uno paralelo al anterior que pasa por el foco atraviesa la lente convergente y sale paralelo al eje óptico.

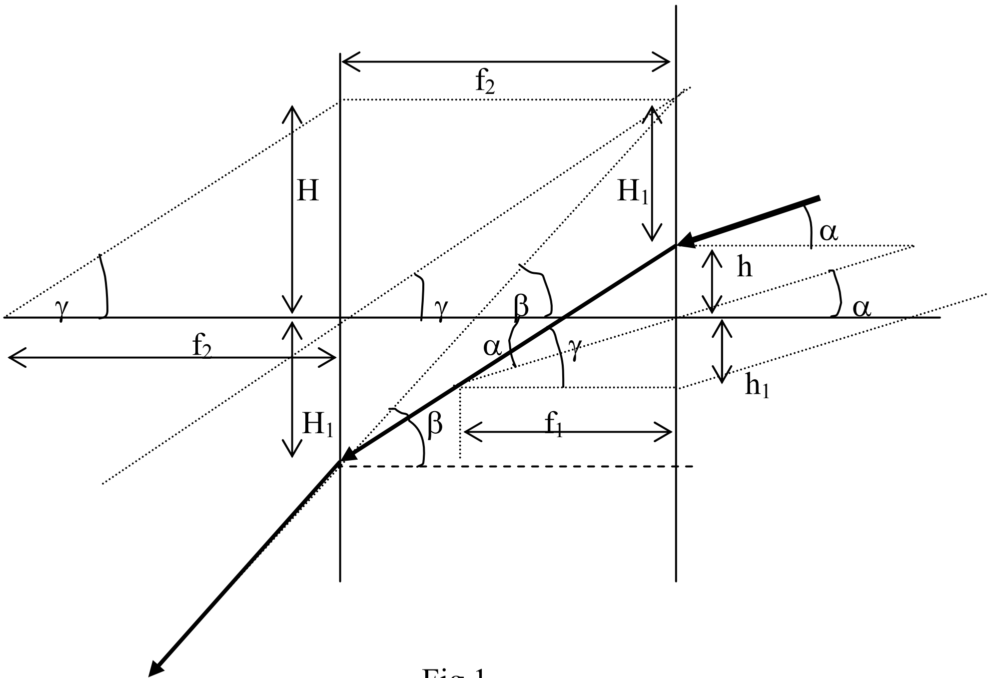


Fig.1

De la figura 1 se deduce:

$$\text{tag}\alpha = \frac{h_1}{f_1} \quad ; \quad \text{tag}\gamma = \frac{h + h_1}{f_1} \qquad \Rightarrow \qquad \text{tag}\gamma = \frac{h}{f_1} + \text{tag}\alpha \quad (1)$$

$$\mathrm{tag}\beta = \frac{H+H_1}{f_2} \quad ; \quad \mathrm{tag}\gamma = \frac{H}{f_2} \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\beta = \mathrm{tag}\gamma + \frac{H_1}{f_2} = \mathrm{tag}\gamma + \frac{H-h}{f_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tag}\beta = 2\mathrm{tag}\lambda - \frac{h}{f_2} \quad (2), \quad \text{de (1) y (2)} \quad \Rightarrow \mathrm{tag}\beta = 2\left(\frac{h}{f_1} + \mathrm{tag}\alpha\right) - \frac{h}{f_2}$$

Finalmente:

$$\mathrm{tag}\ \beta = 2\mathrm{tag}\ \alpha + h\left(\frac{2}{f_1} - \frac{1}{f_2}\right)$$

2.- Una lente delgada plano convexa de radio R = 10 cm se adhiere a una cara lateral de un acuario de paredes finas. El índice de refracción del vidrio de la lente es 1,5 y el del agua 4/3. Se envía, desde el aire, un estrecho haz de luz por la zona paraxial de la lente y paralelo al eje principal de la misma. Determinar la distancia que existe desde la pared lateral del acuario al lugar donde se concentran los rayos luminosos cuando en el acuario no exista agua y cuando esté lleno de ella.

En el primer caso los rayos vienen del aire entran en la lente y vuelven al aire. Los rayos al ser paralelos proceden del infinito y se concentran en el foco imagen de la lente delgada. La distancia focal de una lente delgada es:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Siendo n_1 el índice de refracción del aire y n_2 el de la lente. R_1 =10 cm y $R_2 = \infty$

$$\frac{1}{f} = 0{,}5 * \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad f = 20 \text{ cm}$$

En el segundo caso, la luz viene del aire, se refracta en la cara curva de la lente y pasa de ella al agua. En la figura 1 se indica la marcha de un rayo luminoso

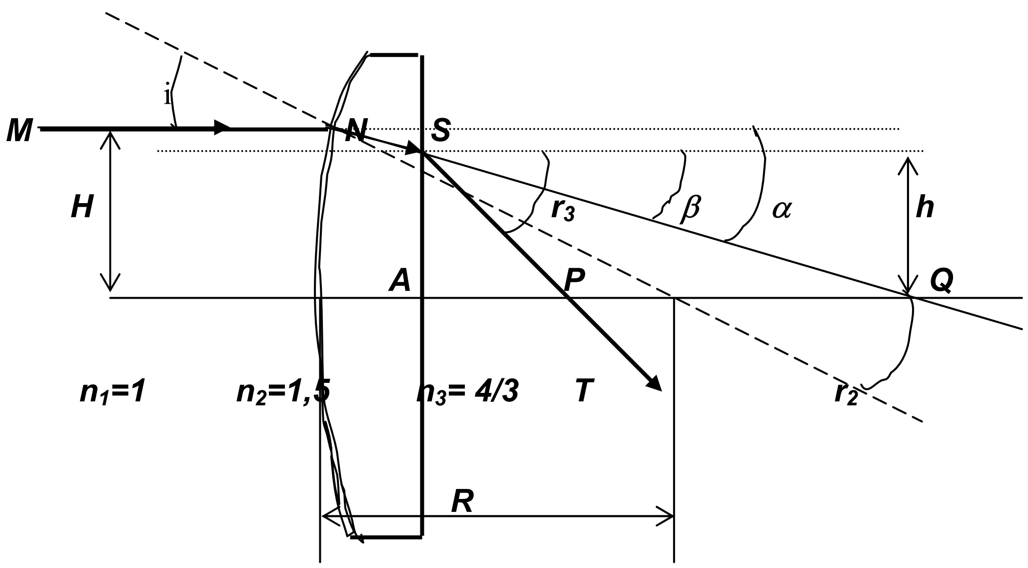


Fig. 1

El rayo MN incide en la lente por su cara curva y forma un ángulo de incidencia i con el radio de esa cara, el rayo refractado NS forma un ángulo r_2 con el radio.

El rayo NS se refracta en la cara plana dando lugar al rayo ST. El rayo NS forma con la perpendicular a la cara plana un ángulo α.

De la figura 1 se deduce, teniendo en cuenta que los ángulos son pequeños:

$$\operatorname{sen}\, i = \frac{H}{R} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{H}{R}$$

$$\operatorname{sen}\, \alpha = \frac{H}{SQ} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{H}{AQ}$$

$$\operatorname{sen}\, r_2 = \operatorname{sen}(i - \alpha) \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{H}{R} - \frac{H}{AQ}$$

Aplicamos la ley de Snell

$$n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} r_2 \quad \Rightarrow \quad n_1 \frac{H}{R} = n_2 \frac{H}{R} - n_2 \frac{H}{AQ} \quad (1)$$

$$n_2 \operatorname{sen}\beta = n_3 \operatorname{sen} r_3 \quad \Rightarrow \quad n_2 \frac{h}{SQ} = n_3 \frac{h}{AP} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{AQ} = \frac{n_3}{AP} \quad (2)$$

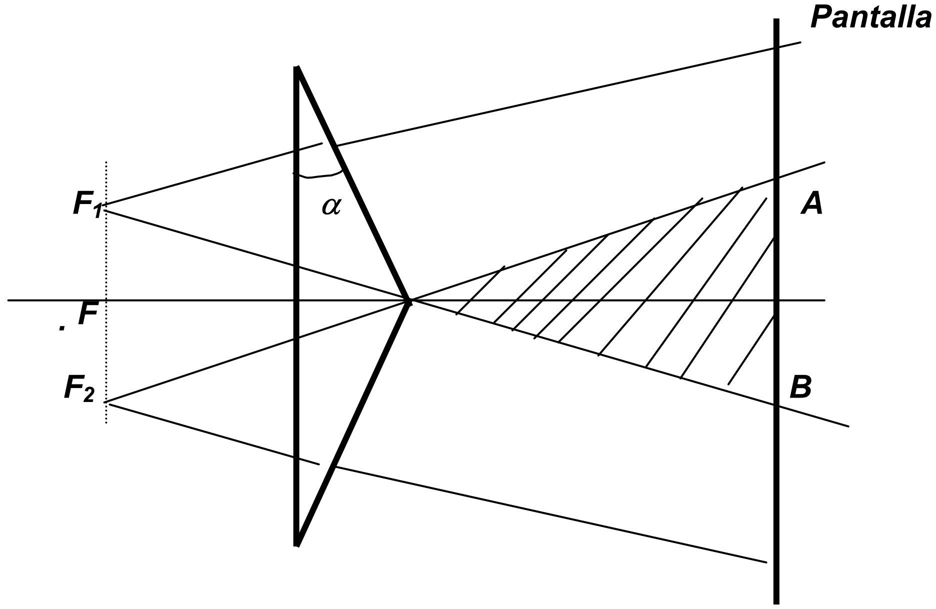
De las ecuaciones (1) y (2)

$$\frac{1}{R}(n_2 - n_1) = \frac{n_2}{AQ} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R}(n_2 - n_1) = \frac{n_3}{AP} \quad \Rightarrow \quad AP = \frac{n_3 R}{n_2 - n_1} = \frac{\frac{4}{3}10}{0,5} = 26,7 \text{ cm}$$

La última fórmula también nos sirve para calcular la primera parte. Hay que tener en cuenta que en el primer caso $n_3 = n_1$, entonces

$$AP = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ cm}$$

3.- Con un biprisma de Fresnel se forman franjas de interferencia sobre una pantalla



El ángulo del prisma es muy pequeño $\alpha = 4.10^{-3}$ radianes y su índice de refracción es 1,52. La distancia del foco real F al prisma vale X= 0,80 m y la distancia del prisma a la pantalla Y = 5 m. L representa la distancia del foco real F a cada uno de los focos virtuales F_1 y F_2. AB es la zona de interferencia, la cual aparece rayada en la figura. La luz del foco F es luz monocromática de λ = 630 nm. A) Calcular la distancia entre dos máximos consecutivos y el número de franjas de interferencia que aparecen en la pantalla.

Es preciso recordar la relación entre el ángulo de desviación en un prisma con el ángulo del prisma. Para ángulos muy pequeños del prisma como es el caso de este problema esta relación es: $\delta = (n-1)\ \alpha$

En la figura 1 se indica la marcha de los rayos que a efectos prácticos es como si viniesen de los focos virtuales F_1 y F_2.

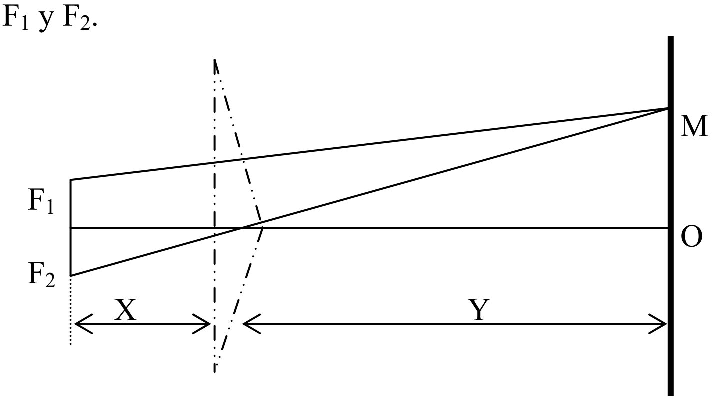


Fig. 1

$F_1F_2 = 2$ L, $F_1M = d_1$, $F_2M = d_2$, OM = h , FO = X+Y , $d_1 + d_2 \approx 2(X+Y)$

Si en M se forma un máximo de interferencia es debido a que la diferencia de marcha del camino recorrido por la luz , esto es, d_2-d_1, es un múltiplo entero de la longitud de onda

$$d_1^2 = (X+Y)^2 + (h-L)^2 \quad ; \quad d_2^2 = (X+Y)^2 + (h+L)^2$$

$$d_2^2 - d_1^2 = (d_2 + d_1)\,(d_2 - d_1) = (h+L)^2 - (h-L)^2 \Rightarrow$$

$$d_2 - d_1 = \frac{4hL}{d_2 + d_1} = \frac{2hL}{X+Y} = n\lambda \qquad (1)$$

Para poder aplicar la ecuación anterior es preciso conocer el valor de L. En la figura 2 se indica la marcha de un rayo luminoso en el prisma

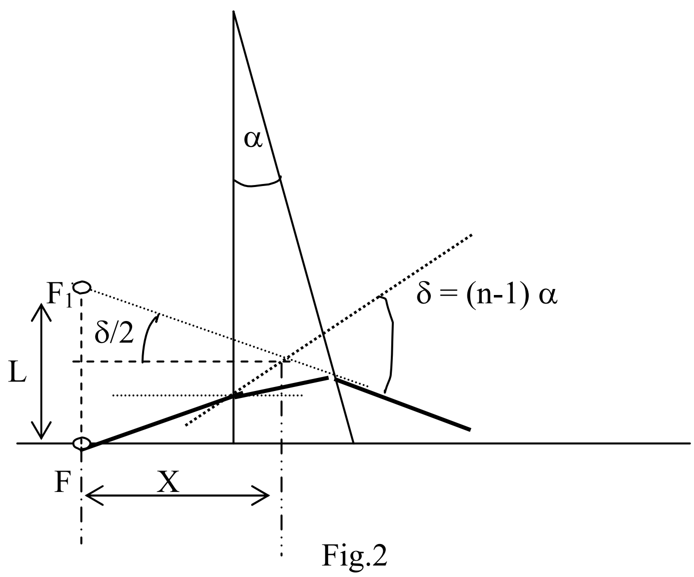


Fig.2

Teniendo en cuenta que el ángulo a es muy pequeño, de la figura 1 se deduce:

$$\mathrm{tag}\frac{\delta}{2} = \frac{\frac{L}{2}}{X} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{L}{X} \quad \Rightarrow \quad (n-1)\alpha = \frac{L}{X} \quad \Rightarrow \quad L = X(n-1)\alpha$$

Volviendo a la ecuación (1)

$$h = \frac{n\lambda(X+Y)}{2L} = \frac{n\lambda(X+Y)}{2X(n-1)\alpha} \qquad (2)$$

Aplicamos la ecuación (2) para el primero y segundo máximos de interferencia constructiva

$$h_1 = \frac{\lambda(X+Y)}{2X(n-1)\alpha} \quad ; \quad h_2 = \frac{\lambda(X+Y)}{X(n-1)\alpha} \quad ; \quad \Delta h = h_2 - h_1 = \frac{\lambda(X+Y)}{2X(n-1)\alpha} \ (3)$$

Dando valores a la ecuación (3)

$$\Delta h = \frac{630.10^{-9} * (0{,}8+5)}{2*0{,}8*0{,}52*4.10^{-3}} = 1{,}1.10^{-3} \ \ \mathrm{m} = 0{,}11 \ \ \mathrm{cm}$$

De la figura del enunciado se deduce que la zona de interferencia AB vale:

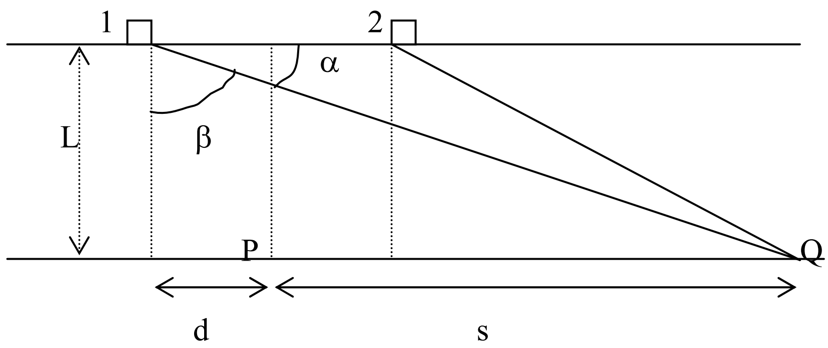
$$\frac{AB}{2L} = \frac{Y}{X} \Rightarrow AB = \frac{2LY}{X} = \frac{2X(n-1)\ \alpha Y}{X} = 2*0{,}52*4.10^{-3}*5 = 20{,}8..10^{-3}\,\mathrm{m}$$

El número de franjas de interferencia

$$N = \frac{20{,}8.10^{-3}}{1{,}1.10^{-3}} \approx 20$$

4.- En una de las cunetas de una carretera de L = 20 metros de ancha se sitúan dos altavoces,1 y 2, separados entre sí por una distancia 2 d = 10 m, de forma que la línea que los une es paralela a la carretera. Ambos altavoces funcionan en fase con una frecuencia de 50 Hz, siendo la velocidad del sonido 340 m/s, a) determinar las diferencias en la intensidad del sonido para un observador que este situado en la otra cuneta de la carretera y a distintas distancias de los altavoces, indicando los puntos característicos b) indicar qué cambios se producen si se aumenta o disminuye la distancia entre los altavoces

En la figura 1 está el esquema de la situación de los altavoces y del observador



1 y 2 son los altavoces que distan entre sí 2d = 10 m

El punto P equidista de los altavoces, por tanto, el sonido llega en fase y se producirá una interferencia constructiva o sea un máximo en la intensidad del sonido.

El punto Q dista D_1 del altavoz 1 y D_2 del altavoz 2 . La diferencia de distancia que debe recorrer el sonido de cada altavoz es:

$$D_1 - D_2 = \sqrt{L^2 + (s+d)^2} - \sqrt{L^2 + (s-d)^2} = \sqrt{400 + (s+5)^2} - \sqrt{400 + (s-5)^2} \qquad (1)$$

Si D_1-D_2 es un múltiplo entero de la longitud de onda, en Q se formará una interferencia constructiva y si es un múltiplo impar de la semilongitud de onda se formará una interferencia destructiva.

Observamos que D_1-D_2 vale cero cuando s = 0 y si s tiende a infinito podemos escribir que

$$\sqrt{L^2+(s+d)^2} \approx s+d \qquad ; \qquad \sqrt{L^2+(s-d)^2} \approx s-d$$

Lo cual nos conduce a que cuando s tiende a infinito

$$D_1 - D_2 = 2d$$

Con rigor podemos calcular el limite de D_1-D_2

$$\lim_{s\to\infty}\left(\sqrt{L^2+(s+d)^2}-\sqrt{L^2+(s-d)^2}\right)=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{\left(\sqrt{L^2+(s+d)^2}-\sqrt{L^2+(s-d)^2}\right)\left(\sqrt{L^2+(s+d)^2}+\sqrt{L^2+(s-d)^2}\right)}{\sqrt{L^2+(s+d)^2}+\sqrt{L^2+(s-d)^2}}=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{4sd}{\sqrt{L^2+(s+d)^2}+\sqrt{L^2+(s-d)^2}}=\lim_{s\to\infty}\frac{\frac{4sd}{s}}{\sqrt{\frac{L^2}{s^2}+\left(\frac{s}{s}+\frac{d}{s}\right)^2}+\sqrt{\frac{L^2}{s^2}+\left(\frac{s}{s}-\frac{d}{s}\right)^2}}=$$

$$=\frac{4d}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=2d$$

Si existe una interferencia constructiva D_1-D_2 = n λ , para que esta condición se cumpla para valores de s inferiores a infinito, debe ocurrir que

$$2d > n\lambda \quad (2)$$

La longitud de onda vale

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{340}{50}=6{,}8\ \text{m}$$

de acuerdo con (2) solamente existe una solución cuando n =1, ya que para n=2 la relación (2) no se cumple, esto significa que a la derecha o a la izquierda de P existe solamente una interferencia constructiva cuyo valor de s se obtiene a partir de la ecuación siguiente:

$$\sqrt{400+(s+5)^2}-\sqrt{400+(s-5)^2}=1*6{,}8$$

Una forma relativamente fácil de resolver es ir dando valores a s y encontrar el que cumple la ecuación, s =18,9 m es la solución a la derecha de P y ese mismo valor a la izquierda de P.

Entre P que es máximo y s = 18,9 metros, que es el máximo siguiente, debe haber un mínimo cuya posición se determina porque la diferencia de distancias es un múltiplo impar de la semilongitud de onda

$$\sqrt{400+(s+5)^2}-\sqrt{400+(s-5)^2}=(2n+1)*\frac{6,8}{2}$$

Si n = 0, la solución es s = 7,5 m . Para n = 1 , el segundo miembro vale 10,2 m y este valor es mayor que 2d, por lo que no puede haber otra solución.

Si 2 d = 6,8 m, la interferencia constructiva se formaría para s infinito y si 2d es menor que 6,8m, no existe interferencia constructiva, salvo la del punto P.

5.- Resolver el problema anterior en el supuesto de que el altavoz 1 tenga una diferencia de fase de –120 º respecto del altavoz 2.

La onda emitida por el altavoz 2 viene dada por la ecuación

$$y_2 = A\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{\lambda}x_2\right)$$

y la del altavoz 1 por la ecuación:

$$y_1 = A\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{\lambda}x_1+\delta\right)$$

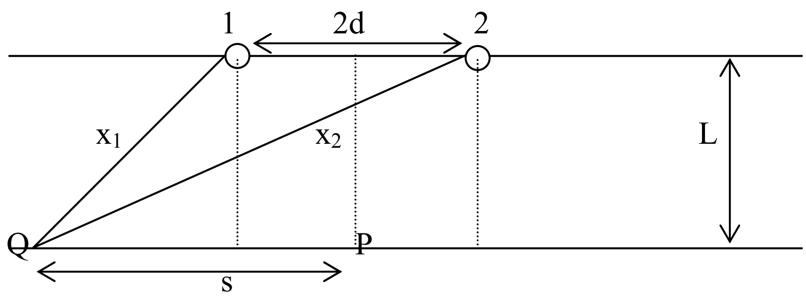


Fig. 1

El punto P equidista de los altavoces pero no es un punto de interferencia constructiva, ya que existe una diferencia de fase.

La perturbación del punto Q se calcula sumando las que producen los focos (1) y (2)

$$y_Q = y_1 + y_2 = A\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{\lambda}x_1+\delta\right)+A\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{\lambda}x_2\right)$$

Hacemos uso de la relación trigonométrica

$$\mathrm{sen}\ M + \mathrm{sen}\ N = 2\mathrm{sen}\frac{M+N}{2}\cos\frac{M-N}{2}$$

$$y_Q = 2A\ \cos\left[\frac{\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) - \delta}{2}\right]\ \text{sen}\left[\frac{\frac{4\pi\ t}{T} - \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 + x_2) - \delta}{2}\right] \quad (1)$$

La amplitud de la perturbación en Q depende de los valores que tome el coseno en la expresión anterior. Si el coseno toma los valores ± 1, resulta una interferencia constructiva ya que la amplitud en Q sería 2 A. Si el coseno vale ± 1, el ángulo será $0,\pi,2\pi,3\pi...n\pi$ ó también $0,-\pi,-2\pi,-3\pi...-n\pi$

Podemos escribir para los valores positivos, teniendo en cuenta que 120º =2π/3 rad

$$\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} - \frac{\delta}{2} = n\pi \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = \left(n + \frac{1}{3}\right)\lambda$$

$$\text{Si } n = 0\,, \quad x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{3} = 2{,}27\ \text{ m}$$

$$\text{Si } n = 1\,, \quad x_2 - x_1 = \frac{4\lambda}{3} = 9{,}07\ \text{ m}$$

$$\text{Si } n = 2, \quad x_2 - x_1 = \frac{7\lambda}{3} = 15{,}9\ \text{ m}$$

Si observamos la figura1 se deduce:

$$x_2 - x_1 = \sqrt{L^2 + (s+d)^2} - \sqrt{L^2 + (s-d)^2} = \sqrt{400 + (s+5)^2} - \sqrt{400 + (s-5)^2} \quad (2)$$

En el problema anterior se ha demostrado que el valor mayor que puede tomar (1) es 2d = 10 m, lo cual indica que solamente son válidas las soluciones n = 0 y n =1, lo cual nos indica que a la izquierda del punto central P solamente existen dos máximos. Las posiciones de estos máximos se calculan por tanteo en la ecuación (2)

$$x_2 - x_1 = 2{,}27 = \sqrt{400 + (s+5)^2} - \sqrt{400 + (s-5)^2}$$

Ensayando con distintos valores de s, se encuentra que la solución es s = 4,8 m.

$$x_2 - x_1 = 9{,}07 = \sqrt{400 + (s+5)^2} - \sqrt{400 + (s-5)^2}$$

Ensayando con distintos valores de s , la solución es s = 43 m.
En resumen, a la izquierda del punto P, existen dos interferencias constructivas cuyas distancias al punto P son. 4,8 m y 43 m respectivamente.

Podemos escribir para los valores negativos

$$\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} - \frac{\delta}{2} = -n\ \pi \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = \left(-n + \frac{1}{3}\right)\lambda$$

$$\text{Si } n = 0\ , \quad x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{3} = 2{,}27 \text{ m} \quad (\text{ ya considerado})$$

$$\text{Si } n = 1, \qquad x_2 - x_1 = -\frac{2\lambda}{3} = -4{,}53 \text{ m}$$

$$\text{Si } n = 2\ , \qquad x_2 - x_1 = -\frac{5\lambda}{3} = -11{,}3 \text{ m}$$

a la derecha de p solamente existe un lugar con interferencia constructiva.

$$x_2 - x_1 = -4{,}53 = \sqrt{400 + (s+5)^2} - \sqrt{400 + (s-5)^2}$$

Ensayando valores en la anterior expresión se encuentra que la solución es s=-10,5 m. Esto quiere decir que a la derecha de P y a una distancia de 10,5 metros existe una interferencia constructiva.

Para calcular la posición de los mínimos a la izquierda de P, vamos de nuevo a la ecuación (1) y en ella se cumple que el coseno valga cero. Las soluciones positivas son:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} - \frac{\delta}{2} = (2n+1)\ \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = \left(\frac{2n+1}{2} + \frac{1}{3}\right)\lambda$$

$$\text{Si } n = 0, \qquad x_2 - x_1 = \frac{5}{6}\lambda = 5{,}67 \text{ m}$$

$$\text{Si } n = 1, \qquad x_2 - x_1 = \frac{11}{6}\lambda = 12{,}5 \text{ m}$$

Por lo que se ha explicado anteriormente solamente es válida la solución n = 0, esto indica que solamente existe una interferencia destructiva a la izquierda de P. El valor de s se encuentra tanteando en la ecuación.

$$x_2 - x_1 = 5{,}67 = \sqrt{400 + (s+5)^2} - \sqrt{400 + (s-5)^2}$$

La solución es s = 14 m.

Para los valores negativos tenemos:

$$\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} - \frac{\delta}{2} = -(2n+1)\ \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{2n+1}{2}\right)\lambda$$

$$\text{Si } n = 0, \qquad x_2 - x_1 = -\frac{1}{6}\lambda = -1{,}13\ \text{ m}$$

$$\text{Si } n = 1, \qquad x_2 - x_1 = -\frac{7}{6}\lambda = -7{,}93\ \text{ m}$$

$$\text{Si } n = 2, \qquad x_2 - x_1 = -\frac{19}{6}\lambda = -21{,}5\ \text{ m}$$

Solamente son posibles las soluciones n = 0 y n =1, lo que nos indica que existen dos mínimos a la derecha del punto P. Sus posiciones se calculan en las ecuaciones:

$$x_2 - x_1 = \text{-1,13} = \sqrt{400 + (s+5)^2} - \sqrt{400 + (s-5)^2}$$

$$x_2 - x_1 = \text{-7,93} = \sqrt{400 + (s+5)^2} - \sqrt{400 + (s-5)^2}$$

La solución de la primera es s = -2,3 m y la de la segunda s = -26,4 m.

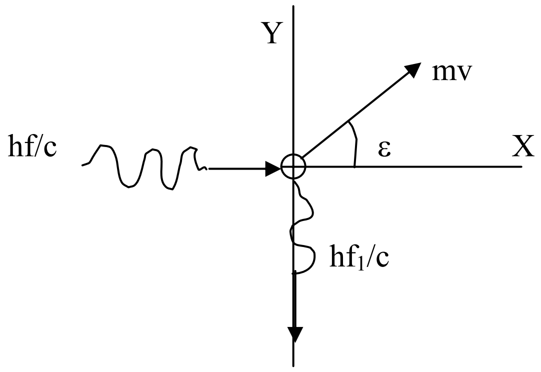
Resumiendo todo lo calculado tenemos:

A la izquierda de P dos interferencias constructivas situadas a 4,8 m y 43 m de distancia y una interferencia destructiva a una distancia de 14 m.

A la derecha de P existe una interferencia constructiva situada a una distancia de 10,5 m y dos interferencias destructivas situadas a las distancias de 2,3 m y 26,4 m, respectivamente.

6.- Un fotón de frecuencia f es desviado 90º al incidir sobre un electrón en reposo. Calcular la nueva frecuencia del fotón.

La energía inicial del fotón es hf y la final hf_1 . La energía cinética final del electrón es Ec. La cantidad de movimiento del fotón inicial hf/c y después de la interacción hf_1/c . La cantidad de movimiento del electrón después de la interacción es p = mv
h representa la constante de Planck , m la masa del electrón en reposo.



Aplicamos los principios de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento sobre los ejes coordenados

$$\left.\begin{aligned} hf &= Ec + hf_1 \\ \frac{hf}{c} &= p\cos\varepsilon \\ \frac{hf_1}{c} &= p\,\mathrm{sen}\,\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad \frac{h^2f^2}{c^2} + \frac{h^2f_1^2}{c^2} = p^2 \quad (1)$$

La energía del electrón es: $\quad Ec + mc^2 = \sqrt{mc^2 + p^2c^2}$

Elevando al cuadrado la última expresión y sustituyendo en ella el valor de p de la ecuación (1) y el de la energía cinética resulta :

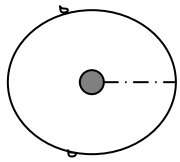
$$h^2(f - f_1)^2 + 2h(f - f_1)mc^2 = h^2f^2 + h^2f_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(f - f_1)mc^2}{f} = f_1h$$

Finalmente:

$$f_1 = \frac{mc^2 f}{hf + mc^2}$$

7.-Niels Bohr obtuvo valores correctos para los estados energéticos del átomo de hidrógeno considerando que el electrón gira en una orbita circular alrededor del protón en la que se cumple la condición cuántica: mv*2π r = n h, siendo v la velocidad del electrón, r el radio de la orbita, n un numero entero, h la constante de Planck.
Haciendo uso del método de Bohr encontrar la energía del estado fundamental del átomo de helio admitiendo que los dos electrones ocupan una orbita circular alrededor del núcleo estando ambos en posiciones opuestas.. Calcular el error cometido si el estado normal del átomo de helio es –78,9 eV.
Datos . Masa del electrón = 9,1.10^{-31} kg, carga del electrón = -1,6.10^{-19} C , h = 6,63.10^{-34} J.s , k = 9.10^{9} N.m^{2}/C^{2}

Si nos fijamos en uno de los electrones, éste se encuentra sometido a una fuerza atractiva por parte del núcleo y repulsiva por parte del otro electrón.



La resultante de esas dos fuerzas es la fuerza centrípeta que el electrón necesita para girar en la orbita de radio r.

$$k\frac{q*2q}{r^2}-k\frac{q*q}{(2r)^2}=m\frac{v^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad mv^2r=\frac{7}{4}kq^2 \ \ (1)$$

La condición cuántica es:

$$mv*2\pi \ \ r = nh \ \ (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$\frac{mv^2r}{mvr}=\frac{\frac{7}{4}kq^2}{\frac{nh}{2\pi}} \qquad \Rightarrow \qquad v=\frac{7k\pi \ q^2}{2nh} \ \ (3)$$

La energía del sistema de los dos electrones corresponde a la cinética de su movimiento y a la potencial eléctrica. Para calcular esta ‘ultima imaginamos que en un lugar del espacio se encuentra el núcleo de helio con carga +2q. Si llevamos un electrón a una distancia r del núcleo efectuamos un trabajo que vale

$$W=q\left(V_{salida}-V_{llegada}\right)=-q(0-k\frac{2q}{r})=k\frac{2q^2}{r}$$

Una vez colocado ese electrón llevamos el segundo y el trabajo vale

$$W_1=-q\left(0-k\frac{2q}{r}+k\frac{q}{2r}\right)=-q\left(k\frac{-3q}{2r}\right)=k\frac{3q^2}{2r}$$

El trabajo total es:

$$W_T = W + W_1 = k\frac{7q^2}{2r} = -\Delta E_P = -\left(E_p - E_{po}\right) \quad \Rightarrow \quad E_p = -k\frac{7q^2}{2r}$$

La energía del sistema es:

$$E = 2\left(\frac{1}{2}mv^2 - k\frac{7q^2}{2r}\right) = m\frac{7kq^2\pi}{2nh} - k\frac{7q^2}{2r}$$

De la ecuación (2) despejamos el radio y lo sustituimos en la ecuación inmediata anterior

$$E == m\left(\frac{7kq^2\pi}{2nh}\right)^2 - \frac{7kq^2}{2r} = m\frac{7kq^2\pi}{2nh} - \frac{7kq^2}{2\dfrac{nh}{2\pi\ mv}} = m\frac{7kq^2\pi}{2nh} - \frac{7kq^2\pi mv}{nh}$$

y sustituyendo la velocidad de la ecuación (3)

$$E = m\left(\frac{7kq^2\pi}{2nh}\right)^2 - \frac{7kq^2\pi mv}{nh} = m\left(\frac{7kq^2\pi}{2nh}\right)^2 - \frac{7kq^2\pi m}{nh}\frac{7kq^2\pi}{2nh} \quad \Rightarrow$$

$$E = -\frac{49k^2q^4\pi^2\ m}{4n^2h^2} = -\frac{49*\left(9.10^9\right)^2*\left(1{,}6.10^{-19}\right)^4*\pi^2*9{,}1.10^{31}}{1^2*\left(6{,}63.10^{-34}\right)^2} = 1{,}33.10^{-17}\,J$$

Teniendo en cuenta que un eV vale $1{,}6.10^{-19}$ J resulta E = -83 eV.

El error cometido en el cálculo es:

$$\varepsilon = \frac{83 - 78{,}9}{78{,}9}*100 = 5{,}2\ \%$$