

**PROBLEMAS VARIADOS 1**

**246.- Un hilo conductor de longitud  $L$  está colocado sobre el eje  $X$  positivo y recorrido por una intensidad  $I$  constante en el sentido del eje  $X$  positivo, estando uno de los extremos, designado con  $O$ , en el centro de coordenadas. Existe un campo magnético uniforme de módulo  $B$ , en la dirección positiva del eje  $Z$ . Se hace girar, respecto del eje  $Z$ , el hilo conductor moviéndolo por el plano  $XY$  a velocidad constante, hasta que el hilo alcance el eje  $Y$  positivo. Calcular el trabajo necesario para realizar este proceso.**

En la figura 1a se representa el hilo en una posición cualquiera de su movimiento y en la figura 1b, visto desde el eje  $Z$  positivo.

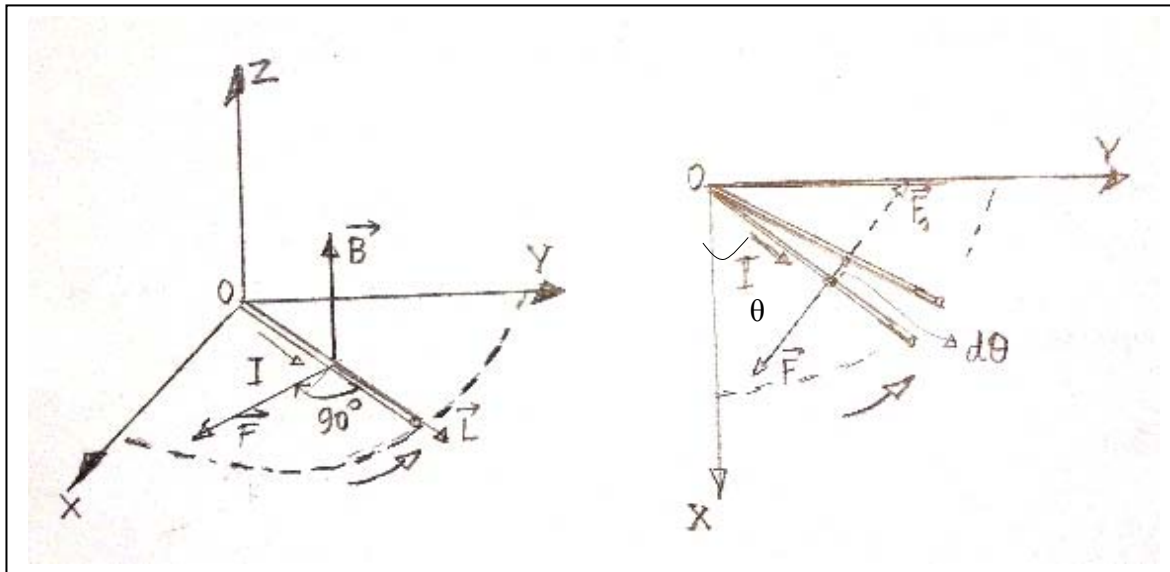


Fig.1a

Fig.1b

El hilo en cualquier posición que ocupe en el plano  $XY$  está sometido a una fuerza dada por:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} \Rightarrow F = ILB$$

Esta fuerza se opone al movimiento que se pretende realizar, por lo que si deseamos girar al hilo conductor desde el eje  $X$  al  $Y$  a velocidad constante, hemos de aplicar de forma continua una fuerza igual en módulo a  $F$  y de sentido contrario que designamos con  $F_1$ .

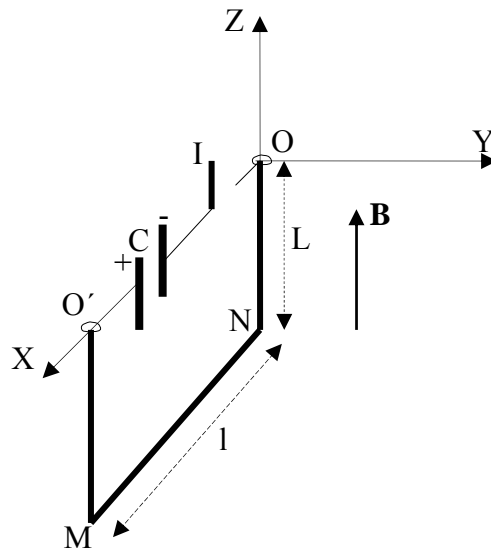
En la figura 1b se muestra el centro de masas del hilo conductor desplazándose un ángulo  $d\theta$ . Dado que el valor del arco es igual al del radio por el ángulo en radianes, un desplazamiento elemental a lo largo del arco que recorre el c.d.m vale  $ds = \frac{L}{2}d\theta$ . El trabajo elemental realizado por la fuerza  $F_1=F$ . es:

$$dW = F_1 \cdot ds = ILB \cdot \frac{L}{2}d\theta = \frac{IL^2B}{2}d\theta$$

El trabajo total lo calculamos a partir de la siguiente integral: haciendo variar el ángulo desde 0, cuando está sobre el eje  $X$ , hasta  $\pi/2$ , cuando llega sobre el eje  $Y$ .

$$W = \int_0^{\pi/2} \frac{IL^2B}{2}d\theta = \frac{\pi IL^2B}{4}$$

247.- En el plano XZ de la figura inferior está dispuesto un circuito con un condensador de capacidad C con un interruptor I. Articulado en O y O' se ha dispuesto un rectángulo de hilo conductor que puede balancearse sobre el eje OO', cuyos lados iguales, que tienen la dirección del eje Z, poseen una longitud L y una masa despreciable y el tercero, con la dirección del eje +X, tiene una longitud l y una masa m. Existe un campo magnético uniforme B en la dirección positiva del eje Z. El condensador está cargado a una diferencia de potencial U y el interruptor I abierto. Si se cierra el interruptor y se admite que la descarga del condensador se verifica en un tiempo muy corto, y que la resistencia de los conductores es despreciable. Determinar el ángulo máximo que describe el rectángulo



El condensador al estar cargado posee una carga  $q = C U$ . En cuando se cierra el interruptor I, esa carga determina la aparición de una corriente eléctrica  $I = \frac{q}{\Delta t}$  en el rectángulo, siendo  $\Delta t$  el tiempo que tarda en descargarse el condensador. Teniendo presente que en el enunciado nos dice que ese tiempo  $\Delta t$  es muy pequeño podemos suponer, con una aproximación razonable, que al rectángulo no le ha dado tiempo a moverse del plano XZ, mientras que por él circula una intensidad de corriente I. Esta corriente determina que exista una interacción con el campo magnético, dando lugar a una fuerza cuya ecuación es para el trozo de conductor MN

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F = I l B$$

Para los conductores verticales ON y O'M, a pesar de pasar una intensidad I, no existe fuerza, pues la intensidad y el campo magnético son paralelos.

La fuerza de módulo F actúa durante un tiempo muy corto lo que da lugar a un impulso de valor  $F \Delta t$  y en consecuencia sobre el hilo MN aparece una variación de la cantidad de movimiento.

$$F \Delta t = m \Delta v = m v \Rightarrow I l B \Delta t = m v \Rightarrow \frac{q}{\Delta t} l B \Delta t = m v \Rightarrow v = \frac{C \cdot U \cdot l \cdot B}{m}$$

La energía cinética que adquiere MN se convierte en potencial debido a que el rectángulo al balancearse sobre OO', se eleva una altura h.

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{C^2 U^2 I^2 B^2}{2 m^2 g}$$

La relación entre la altura h y el ángulo girado  $\theta$  puede deducirse de la figura 1.

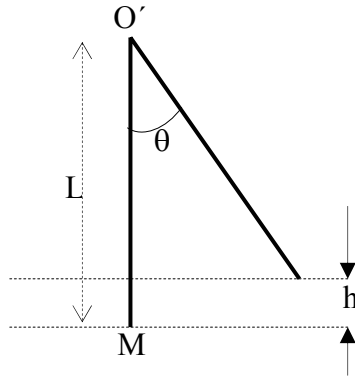


Fig 1

$$h = L - L \cos \theta \Rightarrow L(1 - \cos \theta) = \frac{C^2 U^2 I^2 B^2}{2 m^2 g} \Rightarrow \cos \theta = 1 - \frac{C^2 U^2 I^2 B^2}{2 m^2 L g}$$

**248.- Se considera a la Tierra como una esfera homogénea de masa M y radio R. Un cuerpo de masa m colocado en la superficie terrestre se lanza hacia el exterior de la Tierra en dirección radial con una velocidad inicial  $v_i$ , así se consigue que llegue al infinito con velocidad nula. a) Calcular el valor de  $v_i$  a partir de los datos suministrados. b) Determinar el tiempo que emplea la masa m en alcanzar una altura sobre la superficie terrestre igual a tres veces su radio.**

**Datos. Radio de la Tierra,  $R = 6370 \text{ km}$ , intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra,  $g_s = 9,8 \text{ N/kg}$ .**

a) La masa m en el instante inicial, cuando se encuentra en la superficie de la Tierra posee energía cinética y potencial gravitatoria. Cuando alcance el infinito, su energía potencial se considera nula y como su velocidad es nula también lo es su energía cinética. Estos hechos y considerando el principio de conservación de la energía mecánica, puesto que la única fuerza que actúa es la gravitatoria que es conservativa, nos llevan a la ecuación:

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - G \frac{Mm}{R} = 0 \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (1)$$

Podemos relacionar GM con la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre. El peso de la masa m es debido a la atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre dicha masa

$$m g_s = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow GM = g_s R^2$$

Sustituyendo en la (1)

$$v_i = \sqrt{\frac{2g_s R^2}{R}} = \sqrt{2g_s R} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 6370 \cdot 10^3} = 11,2 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

b) Supongamos un lugar alejado del centro de la Tierra cuya distancia al centro de ella designamos con  $x$ , siendo;  $R < x < 3R$ . En el mencionado lugar la fuerza de atracción terrestre sobre la masa  $m$  es:

$$-G \frac{M m}{x^2} = F = m a_x = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{x^2}$$

La última ecuación puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{GM}{x^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot v = -\frac{GM}{x^2} \Rightarrow \int v dv = -GM \int \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{x} + \text{Cte}$$

Para calcular la constante recurrimos a las condiciones iniciales en las que la velocidad es  $v_i$  cuando  $x=R$ .

$$\frac{v_i^2}{2} = \frac{GM}{R} + \text{Cte} \Rightarrow \text{Cte} = \frac{v_i^2}{2} - \frac{GM}{R} \text{ Sustituyendo el valor de la Cte} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{x} + \frac{v_i^2}{2} - \frac{GM}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = v_i^2 + 2GM \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right) = v_i^2 + 2g_s R^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = v_i^2 + v_i^2 R \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right) = v_i^2 \left( 1 + \frac{R}{x} - 1 \right) \Rightarrow v = v_i \sqrt{\frac{R}{x}} \quad (1)$$

De la ecuación (1)

$$\frac{dx}{dt} = v_i \sqrt{\frac{R}{x}} \Rightarrow \int x^{\frac{1}{2}} dx = v_i \sqrt{R} \int dt \Rightarrow \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = v_i \sqrt{R} t + \text{Cte}$$

Cuando  $x = R$  la variable  $t$  es cero, por tanto,  $\text{Cte} = \frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = v_i \sqrt{R} t + \frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}} \Rightarrow v_i \sqrt{R} t = \frac{2}{3} \left( x^{\frac{3}{2}} - R^{\frac{3}{2}} \right) \Rightarrow t = \frac{2}{3 v_i} \left( \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{R}} - R \right) =$$

Cuando  $x = 3R$ , designamos ese tiempo con la letra  $\tau$ .

$$\tau = \frac{2}{3 \cdot 11,2 \cdot 10^3} \left( \frac{3^{\frac{3}{2}} \cdot R^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}} - R \right) = \frac{2 \cdot R}{3 \cdot 11,2 \cdot 10^3} \left( 3^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{2 \cdot 6370}{3 \cdot 11,2} \cdot \left( 3^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = 1591 \text{ s} = 26,5 \text{ min}$$

249.- Se considera a la Tierra como una esfera homogénea de masa  $M$  y radio  $R$  y fija en el espacio. Un satélite de masa  $m$  se coloca en órbita en un punto  $P$ , a una altura  $2R$  respecto del centro de la Tierra, formando un ángulo  $\beta=60^\circ$  con la dirección radial en ese punto, siendo el módulo de su velocidad  $v = \sqrt{\frac{GM}{1,8R}}$

- Calcular el apogeo y perigeo de la órbita y sus velocidades en esos lugares.
- Si el mismo satélite se coloca en las mismas condiciones anteriores pero con una velocidad tal que en el perigeo la distancia a la Tierra es prácticamente igual a su radio, determinar esa velocidad.
- Calcular la velocidad en el punto  $Q$  de la órbita. Este punto se obtiene trazando una perpendicular al eje mayor de la elipse desde el foco y donde corta a la elipse es el punto  $Q$ . La distancia se denomina *semi-latus-rectum*.
- Calcular el periodo del satélite

a) En la figura 1 se indica la posición del satélite en el punto  $P$

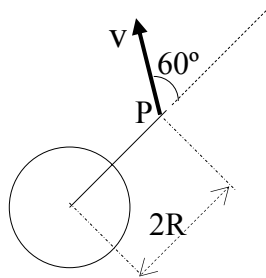


Fig.1

Aplicamos el principio de conservación del momento angular, designando  $v_A$  y  $r_A$ , las velocidades y radios vector en el apogeo o perigeo. Recuérdese  $\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = Cte$

$$m r v \sin 60^\circ = m \cdot 2R \cdot \sqrt{\frac{GM}{1,8R}} \cdot \sin 60^\circ = m v_A r_A \Rightarrow \sqrt{\frac{GM}{1,8R}} \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = v_A r_A \Rightarrow v_A = \frac{\sqrt{3GM R}}{r_A \sqrt{1,8}} \quad (1)$$

El principio de conservación de la energía mecánica nos conduce a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \left( \sqrt{\frac{GM}{1,8R}} \right)^2 - \frac{GMm}{2R} &= \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{GMm}{r_A} \Rightarrow \frac{1}{2} m \frac{GM}{1,8R} - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2} m \frac{3GMR}{1,8r_A^2} - \frac{GMm}{r_A} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{3,6R} - \frac{1}{2R} &= \frac{3R}{3,6r_A^2} - \frac{1}{r_A} \Rightarrow -\frac{0,8}{3,6R} = \frac{R}{1,2r_A^2} - \frac{1}{r_A} \Rightarrow -\frac{2}{9R} = \frac{R - 1,2r_A}{1,2r_A^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -2,4r_A^2 &= 9R^2 - 10,8r_A R \Rightarrow r_A = \frac{10,8R \pm \sqrt{10,8^2 R^2 - 4 \cdot 2,4 \cdot 9R^2}}{4,8} = \frac{10,8R \pm 5,5R}{4,8} \end{aligned}$$

Las dos soluciones son: una para el apogeo  $3,4 R$  y la otra para el perigeo  $1,1 R$ .

b) A partir de la ecuación (1)

Velocidad en el apogeo

$$v_A = \sqrt{\frac{3R \cdot g_s R^2}{1,8}} \cdot \frac{1}{3,4R} = \sqrt{\frac{3R \cdot g_s}{1,8}} \cdot \frac{1}{3,4} = \sqrt{\frac{3 \cdot 6370 \cdot 10^3 \cdot 9,8}{1,8}} \cdot \frac{1}{3,4} = 3 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

Velocidad en el perigeo

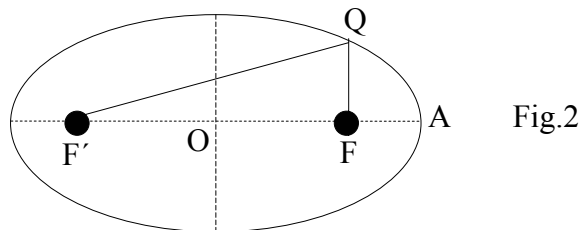
$$v_P = \sqrt{\frac{3R \cdot g_s R^2}{1,8}} \cdot \frac{1}{1,1R} = \sqrt{\frac{3R \cdot g_s}{1,8}} \cdot \frac{1}{1,1} = \sqrt{\frac{3 \cdot 6370 \cdot 10^3 \cdot 9,8}{1,8}} \cdot \frac{1}{1,1} = 9,3 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

b) Siguiendo los pasos anteriores y designando con  $v$  a la velocidad pedida:

$$m v \cdot 2R \sin 60^\circ = m v_p r_p = m v_p R \Rightarrow v \sqrt{3} = v_p$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2} m (\sqrt{3}v)^2 - \frac{GMm}{R} \Rightarrow \frac{1}{2} 3v^2 - \frac{1}{2} v^2 = \frac{GM}{R} - \frac{GM}{2R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$$

c) En la figura 2 se ha representado una elipse con la situación del punto Q



OA=a es el semieje mayor de la elipse. La distancia FQ es la semi-latus-rectum y la designamos con  $r_1$ .  
 $F'Q = r'$ . Según las propiedades de la elipse:

$$r' + r_1 = 2a \quad ; \quad \varepsilon = \frac{OF}{OA} \Rightarrow OF = \varepsilon \cdot a = a - 1,1R \Rightarrow ; (r')^2 - (2OF)^2 = (r_1)^2$$

$\varepsilon$  es la excentricidad de la elipse y FA = 1,1 R (es el perigeo de la elipse)

Operando con las ecuaciones anteriores

$$(2a - r_1)^2 - 4\varepsilon^2 a^2 = r_1^2 \Rightarrow 4a^2 + r_1^2 - 4a r_1 - 4\varepsilon^2 a^2 - r_1^2 = 0 \Rightarrow r_1 = a(1 - \varepsilon^2)$$

El semieje mayor de la elipse lo calculamos a partir de las distancias al apogeo y al perigeo

$$a = \frac{3,4R + 1,1R}{2} = 2,25R$$

La excentricidad de la elipse es:

$$\varepsilon = \frac{OF}{OA} = \frac{a - 1,1R}{a} = \frac{2,25R - 1,1R}{2,25R} = 0,51$$

Calculamos  $r_1$ .

$$r_1 = a(1 - \varepsilon^2) = 2,25R(1 - 0,51^2) = 1,66R$$

Según el principio de conservación de la energía mecánica.

$$\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{1,8R}}\right)^2 - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{GMm}{1,66R} \Rightarrow \frac{1}{2}m\frac{GM}{1,8R} - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{GMm}{1,66R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_s^2 = \frac{GM}{1,8R} - \frac{GM}{R} + \frac{GM}{0,83R} \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{GM - 1,8GM + 2,17GM}{1,8R}} = \sqrt{\frac{1,37GM}{1,8R}} = \sqrt{\frac{GM}{1,31R}}$$

d) Para calcular el periodo del satélite vamos a seguir un procedimiento que resulta fácil de recordar. Supongamos una órbita circular de radio  $r$  y calculemos el periodo de un satélite que describiese esa órbita

Igualemos la fuerza centrípeta con la atracción gravitatoria

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

El periodo es:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g_s R^2}}$$

Si la órbita es elíptica basta sustituir  $r$  en la ecuación anterior por el semieje mayor de la elipse  $a = 2,25R$

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g_s R^2}} = \frac{2\pi(2,25R)^{\frac{3}{2}}}{R\sqrt{g_s}} = \frac{6,75\pi R^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{g_s}} = \frac{6,75\pi \cdot \sqrt{6370 \cdot 10^3}}{\sqrt{9,8}} = 1,71 \cdot 10^4 \text{ s} = 4,75 \text{ horas}$$

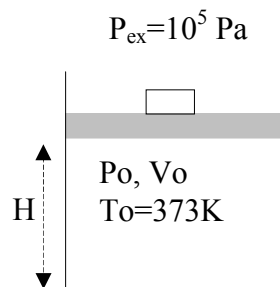
Otra alternativa es emplear directamente la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{Cte} = G\frac{M}{4\pi^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{g_s R^2}}$$

;

Que como se puede comprobar conduce al mismo resultado.

250.- El recipiente de la figura inferior posee un émbolo sobre el que está situada una masa, el conjunto pesa 500 N. La sección del émbolo es  $S=0,1 \text{ m}^2$  y la presión exterior  $P_{ex}=10^5 \text{ Pa}$ . Un mol de gas perfecto se encuentra a una temperatura  $T_o=373\text{K}$ . Si el gas se enfría a 273 K, determinar cuánto desciende el émbolo hasta alcanzar de nuevo el equilibrio.



En la situación inicial (representada en la figura), actúan las fuerzas siguientes:

En dirección vertical y sentido hacia abajo: El peso 500 N y la fuerza debida a la presión atmosférica  $P_{ex} S$

En dirección vertical y sentido hacia arriba: La fuerza debida a la presión del gas  $P_G S$ .

$$\text{Al existir equilibrio: } 500 + P_{ex} S = P_G S \Rightarrow P_G = \frac{500}{S} + P_{ex}$$

Por tratarse un gas ideal.

$$P_G \cdot H \cdot S = RT_o \Rightarrow \left( \frac{500}{S} + P_{ex} \right) H \cdot S = RT_o \Rightarrow H = \frac{RT_o}{500 + P_{ex} S}$$

Cuando el gas se enfría a una temperatura  $T_f = 273 \text{ K}$ , la altura del émbolo es  $h$  y de acuerdo con la deducción anterior:

$$h = \frac{R T_f}{500 + P_{ex} S}$$

La diferencia de alturas, es lo que desciende el émbolo.

$$H - h = \Delta h = \frac{R}{500 + P_{ex} S} (T_f - T_o) = \frac{8,31 \cdot 100}{500 + 10^5 \cdot 0,1} = 0,079 \text{ m} = 7,9 \text{ cm}$$