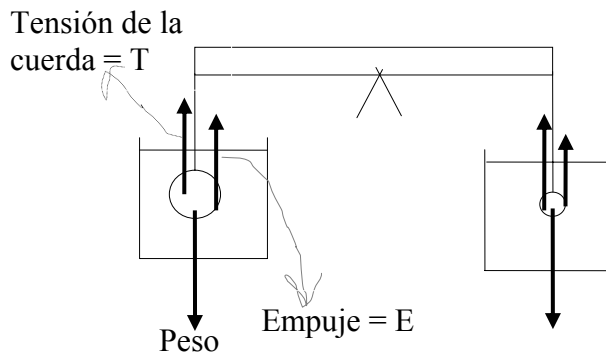


## PROBLEMAS VARIADOS 10

91.-En los extremos de una palanca de brazos iguales se cuelgan dos cuerpos de la misma masa. Uno de los cuerpos se introduce en un líquido de densidad  $\rho_1$  y el otro en un líquido de densidad  $\rho_2$ , observándose que la palanca sigue en equilibrio. Calcular la relación de densidades entre ambos cuerpos.

En la figura inferior se hace un esquema de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos



Sobre cada cuerpo actúan su peso  $P$ , la tensión de la cuerda  $T$  y el empuje del líquido. Para ambos cuerpos el peso es el mismo por lo dicho en el enunciado, la tensión es la misma porque la reacción a cada  $T$  está aplicada en la palanca y ésta se encuentra en equilibrio, finalmente los empujes han de ser iguales y si los líquidos tienen diferentes densidades es que los cuerpos tienen diferentes volúmenes.

$$V_1\rho_1g = V_2\rho_2g \Rightarrow \frac{m}{d_1}\rho_1g = \frac{m}{d_2}\rho_2g \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

**92.-Un cilindro, de densidad  $\rho$  y altura  $h$ , flota en la zona de separación de dos líquidos de densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$  respectivamente, siendo  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ . Determinar la altura  $x$  del cilindro que se encuentra sumergido en el líquido de densidad  $\rho_2$ .**

Al estar el cilindro en equilibrio es porque el peso del mismo se iguala con la suma de los empujes que sufre por parte de los dos líquidos. Designamos con  $x$  a la parte del cilindro sumergida en el líquido de densidad  $\rho_2$ , por tanto, la altura que está en el líquido de densidad  $\rho_1$  es  $h-x$ , por  $m$  a la masa total del cilindro y por  $S$  al área de la base del cilindro.

$$mg = Sh\rho g = Sx\rho_2g + S(h-x)\rho_1g \Rightarrow h\rho = x\rho_2 + (h-x)\rho_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\rho - h\rho_1 = x\rho_2 + h\rho_1 \Rightarrow x = \frac{h(\rho - \rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}$$

**93.-Entre un ánodo y un cátodo de forma plana y distancia entre las placas  $h$ , se establece una diferencia de potencial elevada. Entre ambas placas actúa un campo magnético uniforme paralelo a las placas. Determinar a partir de qué tensión entre los electrodos los electrones pueden alcanzar el ánodo.**

Si no existiese el campo magnético los electrones producidos en el cátodo viajarían con movimiento uniformemente acelerado y todos alcanzarían el ánodo. Al existir un campo magnético los electrones ven curvada su trayectoria y por consiguiente pueden no llegar al ánodo, el que lleguen o no depende de la velocidad que adquieran debida al campo eléctrico entre placas; campo que a su vez depende de la tensión que se aplique entre las placas.

El límite mínimo de la velocidad lo marca aquel electrón que roza justamente el ánodo. La fuerza de dirección vertical que actúa sobre los electrones vale:

$$F_E = qE = ma_y$$

Siendo  $q$  la carga del electrón y  $m$  su masa.  
Desde el punto de vista cinemático.

$$v = a_y t = \frac{qE}{m} t \quad (1) \quad ; \quad h = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \quad (2)$$

Cuando el electrón roza el ánodo la circunferencia tiene un radio  $h$  y dicha circunferencia es producida por efecto del campo magnético, cuya fuerza de interacción con electrón produce la fuerza centrípeta

$$qvB = \frac{mv^2}{h} \Rightarrow v = \frac{qBh}{m}$$

Sustituyendo la ecuación de la velocidad en (1)

$$\frac{qBh}{m} = \frac{qE}{m}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{Bh}{E}$$

Sustituyendo t en la ecuación (2)

$$h = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \cdot \frac{B^2 h^2}{E^2} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{qB^2 h}{2m} = \frac{\Delta V}{h} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{qB^2 h^2}{2m}$$

Por debajo de  $\Delta V$  los electrones no pueden alcanzar el ánodo.

**94.-En un dispositivo para determinar la composición isotópica de los iones potasio  $^{39}\text{K}^+$  y  $^{41}\text{K}^+$ , éstos primero se aceleran en un campo eléctrico y luego van a parar a un campo magnético  $B$  perpendicular a la dirección de su movimiento. La tensión que crea el campo eléctrico es  $U_0$  aun cuando este valor puede oscilar en  $\pm \Delta U$ . Determinar el cociente  $\frac{\Delta U}{U_0}$  para que los haces de los iones potasio no se superpongan.**

Dado que la tensión toma los valores extremos  $U_0 + \Delta U$  y  $U_0 - \Delta U$  los radios de los iones potasio están comprendidos entre los siguientes valores

$$U_0 + \Delta U = \frac{1}{2} m_{39} v_{M39}^2 \Rightarrow v_{M39} = \sqrt{\frac{2(U_0 + \Delta U)}{m_{39}}} ; \quad qBv_{M39} = \frac{mv_{M39}^2}{R_{M39}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{M39} = \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{39}}}{Bq} ; \quad R_{m39} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{39}}}{Bq}$$

M significa el radio mayor y m el menor .Para el ión de potasio 41

$$\Rightarrow R_{M41} = \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{41}}}{Bq} ; \quad R_{m41} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{41}}}{Bq}$$

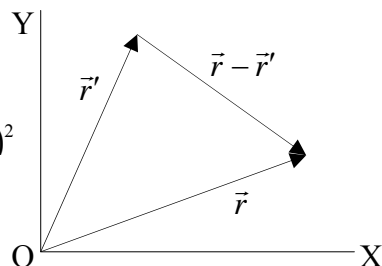
Para que no se superpongan los haces de los iones, el límite lo indica que coincidan el radio mayor del ión 39 con el radio menor del ión 41.

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_{M39} &= \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{39}}}{Bq} \quad ; \quad R_{m41} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{41}}}{Bq} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{39}}}{Bq} &= \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{41}}}{Bq} \Rightarrow (U_0 + \Delta U)m_{39} = (U_0 - \Delta U)m_{41} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(U_0 + \Delta U)}{(U_0 - \Delta U)} &= \frac{m_{41}}{m_{39}} = \frac{41}{39} \Rightarrow 39U_0 + 39\Delta U = 41U_0 - 41\Delta U \Rightarrow 80\Delta U = 2U_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Delta U}{U_0} = \frac{1}{40} \end{aligned}$$

Dado el valor del límite, la relación para lo que no hay superposición es  $\frac{\Delta U}{U_0} < \frac{1}{40}$

**95.-Desde el mismo lugar y con un intervalo de tiempo  $\tau$  se lanzan dos cuerpos con la misma velocidad  $v$  y el mismo ángulo  $\alpha$  con la horizontal ¿Cuáles son las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo lanzado en primer lugar visto desde un sistema ligado al cuerpo lanzado en segundo lugar?**

Las ecuaciones del movimiento de los dos cuerpos ligados a un sistema inercial que esta sobre el suelo horizontal son:

$$\begin{aligned} x &= v \cos \alpha \cdot t \quad ; \quad y = v \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x' &= v \cos \alpha \cdot (t - \tau) \quad ; \quad y' = v \sin \alpha \cdot (t - \tau) - \frac{1}{2} g (t - \tau)^2 \end{aligned}$$


El vector de posición del primer cuerpo respecto del segundo

$$\vec{r} - \vec{r}' = x_r \vec{i} + y_r \vec{j} = (x - x') \vec{i} + (y - y') \vec{j}$$

Las posiciones vistas desde el segundo cuerpo son:

$$\begin{aligned} x_r &= x - x' = v \cos \alpha \cdot t - v \cos \alpha \cdot (t - \tau) = v \cos \alpha \cdot \tau \\ y_r &= y - y' = v \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 - v \sin \alpha \cdot (t - \tau) + \frac{1}{2} g (t - \tau)^2 = v \sin \alpha \cdot \tau - \frac{1}{2} g (-\tau^2 + 2t\tau) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_r &= v \sin \alpha \cdot \tau + \frac{g\tau^2}{2} - g t \tau \end{aligned}$$

Las velocidades relativas son:

$$v_x = \frac{dx_r}{dt} = 0 \quad ; \quad v_y = \frac{dy_r}{dt} = -g\tau$$

**96.-Un tren parte de la estación a las 12 horas según el reloj de la estación y se desplaza con movimiento uniformemente acelerado. Un observador situado en el andén frente a la cabecera del tren observa que su reloj marca las 12 horas cuando pasa por delante de él, el penúltimo vagón. Este penúltimo vagón tarda 10 segundos en pasar por delante del observador mientras que el último vagón emplea 8 segundos. Calcular cuánto se retrasa el reloj del observador respecto del reloj de la estación.**

Designamos con  $\tau$  al tiempo que se retrasa el reloj del observador respecto del de la estación y con  $L$  la longitud de cada vagón del tren.

La velocidad del tren cuando han transcurrido  $\tau$  segundos es  $a\tau$ , siendo  $a$ , la aceleración constante del tren

Para el penúltimo vagón su velocidad cuando pasa por delante del observador es  $a\tau$ , esto es, la velocidad del tren

$$L = a\tau \cdot 10 + \frac{1}{2} a 10^2$$

Cuando pasan los dos vagones, penúltimo y último del tren, por delante del observador, el tiempo total es  $10+8 = 18$  segundos

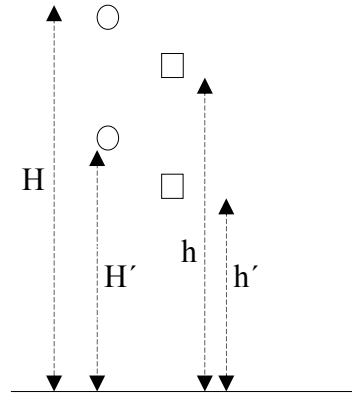
$$2L = a\tau \cdot 18 + \frac{1}{2} a 18^2$$

De ambas ecuaciones se deduce:

$$2\left(a\tau \cdot 10 + \frac{1}{2} a 10^2\right) = a\tau \cdot 18 + \frac{1}{2} a 18^2 \Rightarrow 20\tau + 100 = 18\tau + 162 \Rightarrow \tau = \frac{62}{2} = 31 \text{ s}$$

**97.-Un submarino desciende en vertical con una velocidad constante  $v$ . En un determinado instante emite un sonido que dura un tiempo  $T_0$ . El sonido se refleja en el fondo del mar y llega al submarino y el tiempo que dura el sonido reflejado medido en el submarino es  $T$ . Si la velocidad del sonido en el agua es  $c$ , determinar la velocidad con la que se sumerge el submarino.**

Designamos con  $H$  la altura a la que está el submarino respecto del fondo del mar cuando empieza a emitir el sonido y con  $H'$  la posición cuando termina de emitirse la señal. Con  $h$  designamos la posición del submarino cuando empieza a recibir la señal reflejada en el fondo y  $h'$  cuando termina. La figura inferior aclara estos valores.



en el fondo y  $h'$  cuando termina. La figura inferior aclara estos valores. Las posiciones se han puesto separadas para claridad de la figura. Entre las posiciones  $H$  y  $H'$  el tiempo transcurrido es  $T_0$  y entre  $h$  y  $h'$ ,  $T$ .

$$H - H' = vT_0 \quad (1) \quad ; \quad h - h' = vT \quad (2)$$

El sonido emitido en  $H$  viaja  $H+h$  al llegar al submarino y emplea un tiempo  $\tau_1$  y en ese mismo tiempo el submarino recorre  $H-h$

$$H + h = c\tau_1; H - h = v\tau_1 \Rightarrow \frac{H+h}{c} = \frac{H-h}{v} \Rightarrow H(c-v) = h(c+v) \Rightarrow H = \frac{c+v}{c-v} h$$

El fin de la señal sonora se emite en la posición del submarino  $H'$  y esa señal recorre la distancia  $H'+h'$  cuando llega al submarino empleando un tiempo  $\tau_2$  y en ese mismo tiempo el submarino recorre  $H'-h'$ .

$$H' + h' = c\tau_2; H' - h' = v\tau_2 \Rightarrow \frac{H'+h'}{c} = \frac{H'-h'}{v} \Rightarrow H'(c-v) = h'(c+v) \Rightarrow H' = \frac{c+v}{c-v} h'$$

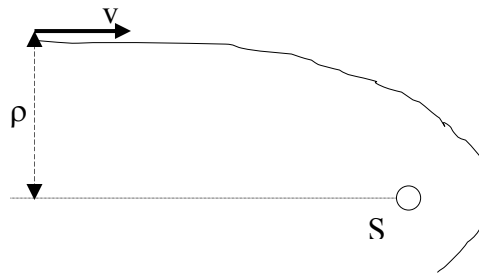
Sustituyendo  $H$  y  $H'$  en la ecuación (1)

$$\frac{c+v}{c-v} h - \frac{c+v}{c-v} h' = vT_0 \Rightarrow \frac{c+v}{c-v} (h - h') = vT_0$$

Sustituyendo en la última ecuación  $h-h'$  se tiene:

$$\frac{c+v}{c-v} vT = vT_0 \Rightarrow \frac{c+v}{c-v} T = T_0 \Rightarrow cT + vT = cT_0 - vT_0 \Rightarrow v = \frac{T_0 - T}{T_0 + T} c$$

98.-Una masa  $m$  proveniente del infinito posee una velocidad  $v$  y se acerca al Sol, siendo su parámetro de impacto  $\rho$ , tal como se observa en la figura.



**Hallar la distancia mínima a la que la masa  $m$  se acerca al Sol.  
Constante de gravitación,  $G$  ; Masa del Sol,  $M_S$**

Designamos con  $d$  a la mínima distancia de la masa al Sol y a  $v_d$  su velocidad en esa posición. La conservación del momento angular nos permite escribir

$$mv \rho = mv_d d \Rightarrow v \rho = v_d d \quad (1)$$

Por la conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_d^2 - G \frac{M_S m}{d} \Rightarrow v^2 = v_d^2 - 2 \frac{GM_S}{d} \Rightarrow v_d = \sqrt{v^2 + 2 \frac{GM_S}{d}}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

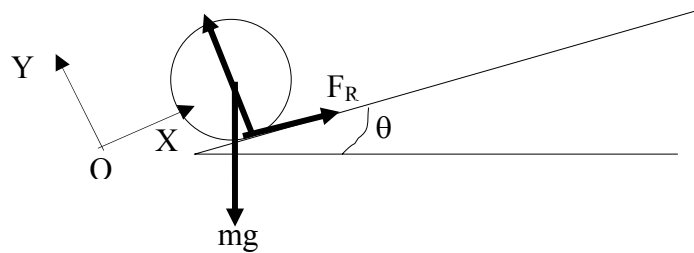
$$v \rho = \left( \sqrt{v^2 + 2 \frac{GM_S}{d}} \right) d \Rightarrow v^2 d^2 + 2GM_S d - v^2 \rho^2 = 0 \Rightarrow d^2 + \frac{2GM_S d}{v^2} - \rho^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$d = \frac{-2 \frac{GM_S}{v^2} + \sqrt{\frac{4G^2 M_S^2}{v^4} + 4\rho^2}}{2} = \sqrt{\frac{G^2 M_S^2}{v^4} + \rho^2} - \frac{GM_S}{v^2}$$

**99.-Un cilindro homogéneo de masa  $m$  y radio  $R$  se hace girar hasta alcanzar una velocidad angular  $\omega_0$ , luego se coloca suavemente sobre un plano inclinado de ángulo  $\theta$ . ¿Hasta qué altura ascenderá el cilindro? El coeficiente de rozamiento es  $\mu$ , cumpliéndose que  $\mu > \tan \theta$ .**

Al principio el cilindro tendrá que ir adquiriendo velocidad de traslación del centro de masas al mismo tiempo que su velocidad angular disminuye. El diagrama de fuerzas es el siguiente:



Las ecuaciones del movimiento, respecto de los ejes OXY, son:

$$\left. \begin{aligned} F_R - mg \operatorname{sen} \theta &= ma \\ F_R R &= I\alpha = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \alpha \\ F_R &= \mu N = \mu mg \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene

$$a = g(\mu \cos \theta - \operatorname{sen} \theta) \quad ; \quad \alpha = \frac{2F_R}{mR} = \frac{2\mu mg \cos \theta}{mR} = \frac{2\mu g \cos \theta}{R}$$

Para la velocidad lineal del centro de masas

$$v = 0 + g(\mu \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)t$$

Para la velocidad angular del cilindro

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - \frac{2\mu g \cos \theta}{R} t$$

La velocidad del centro de masas del cilindro aumenta y la velocidad de rotación disminuye, llegará un momento en el que  $v = \omega R$ , y esto ocurre en un intervalo de tiempo  $t$  y el movimiento del cilindro en el plano pasa de ser de rodadura y deslizamiento a rodadura.

$$v = \omega R \Rightarrow g(\mu \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)t = \left( \omega_0 - \frac{2\mu g \cos \theta}{R} t \right) R \Rightarrow t = \frac{\omega_0 R}{g(\mu \cos \theta - \operatorname{sen} \theta + 2\mu \cos \theta)} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\omega_0 R}{g(3\mu \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)}$$

Las velocidad lineal del centro de masas y angular del cilindro son:

$$v = g(\mu \cos\theta - \text{sen}\theta) \cdot \frac{\omega_0 R}{g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)} = \frac{\omega_0 R(\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}{3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta}$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu g \cos\theta}{R} \cdot \frac{\omega_0 R}{g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)} = \omega_0 \left( 1 - \frac{2\mu \cos\theta}{3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta} \right)$$

Desde que el cilindro se colocó sobre el plano hasta el tiempo t, el cilindro ha ascendido una altura H y ha recorrido una distancia L sobre el plano

$$L = \frac{H}{\text{sen}\theta} = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2}\text{sen}\theta \cdot g(\mu \cos\theta - \text{sen}\theta) \cdot \frac{\omega_0^2 R^2}{g^2(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2} \Rightarrow$$

$$H = \frac{\omega_0^2 R^2 \text{sen}\theta \cdot (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}{2g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2}$$

A partir del momento en que se ha llegado a la rodadura sin deslizamiento, admitimos que la energía total del cilindro, que es suma de la de rotación más traslación, se convierte íntegramente en energía potencial

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow \frac{1}{4}R^2\omega^2 + \frac{1}{2}v^2 = gh \Rightarrow \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}v^2 = gh \Rightarrow h = \frac{3v^2}{4g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{3\omega_0^2 R^2 (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2}{4g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2}$$

La altura total a la que sube el cilindro es:

$$H_{\text{total}} = H + h = \frac{\omega_0^2 R^2 \text{sen}\theta \cdot (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}{2g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2} + \frac{3\omega_0^2 R^2 (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2}{4g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2} \Rightarrow$$

$$H_{\text{total}} = \frac{[\omega_0^2 R^2 (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)] [2\text{sen}\theta + 3\mu \cos\theta - 3\text{sen}\theta]}{4g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2} \Rightarrow$$

$$H_{\text{total}} = \frac{[\omega_0^2 R^2 (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)] [3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta]}{4g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2} = \frac{\omega_0^2 R^2 (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}{4g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}$$

**100.-a) Calcular la energía que posee una esfera conductora y aislada de radio  $R$  y que posee una carga  $+Q$ .**

**b) Calcular la energía de dos capas esféricas de pequeño espesor si son concéntricas de radios  $R_1$  y  $R_2$ , siendo  $R_2 > R_1$ , las cuales poseen cargas eléctricas  $+Q_1$  y  $+Q_2$ , respectivamente.**

a) Para calcular la energía de la esfera cargada suponemos que ella está inicialmente descargada y nosotros la vamos cargando transportando cargas  $+dq$  desde el infinito hasta la esfera.. Cada pequeña carga que llevemos supone un trabajo que hemos de aportar y la suma de todos esos trabajos, hasta cargar la esfera, nos mide la energía que puede almacenar.

Supongamos que en un determinado momento la carga de la esfera es  $+q$  y si una carga  $+dq$  se traslada desde el infinito a la esfera, el trabajo vale:

$$dW = dq(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}}) = dq(V_{\infty} - V_{\text{llegada}}) = dq\left(0 - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R}\right)$$

Observe que al ser  $dq$  positiva y  $q$  también positiva, hemos de hacer un trabajo exterior contra las fuerzas del campo, el cual da lugar a que la esfera adquiera energía.

Para calcular el trabajo total sumamos esos trabajos  $dW$ , lo que equivale a integrar la expresión anterior entre los límites cero y  $Q$ .

$$W = \int_0^Q -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R} dq = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0 R} \frac{q^2}{2} \Big|_0^Q = -\frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R}$$

La energía de la esfera llamada energía propia vale

$$E_{\text{propia}} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R}$$

b) Para este caso supongamos que ambas esferas están descargadas y procedemos a cargar la de radio  $R_1$  y cuando ésta tenga la carga  $Q_1$ , procedemos a cargar la esfera de radio  $R_2$ .

El cálculo para la esfera interior ya se ha hecho en el apartado a. Para la segunda esfera hay que tener en cuenta que se encuentra a un cierto potencial debido a la influencia de la carga interior  $Q_1$  de la esfera interior y que además adquiere otro potencial como consecuencia de la carga  $q$  que va a ir adquiriendo, hasta tomar finalmente  $Q_2$ .

$$dW_2 = dq(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}}) = dq(V_{\infty} - V_{\text{llegada}}) = \left(0 - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1}{R_2} - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R_2}\right) dq \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_2 = \int_0^{Q_2} -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1}{R_2} dq + \int_0^{Q_2} -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R_2} dq = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_2} - \frac{Q_2^2}{4\pi \epsilon_0 R_2}$$

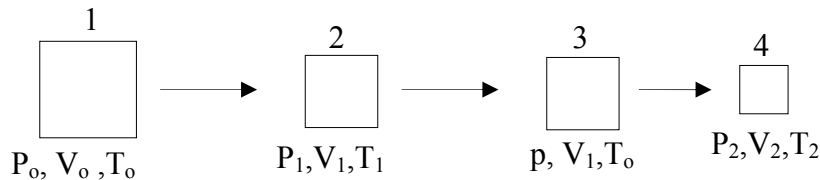
La energía almacena por el sistema de las dos esferas, vale.

$$E = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_2} + \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q_2^2}{R_2}$$

101.-Se utilizan dos compresores para elevar la presión de un gas diatómico, para el que  $C_v = \frac{5}{2}R$ , de la forma siguiente:

El primer compresor reduce el volumen inicial de gas  $V_o$  hasta un volumen intermedio  $V_1$ , después el gas comprimido se enfría a volumen constante hasta adquirir la temperatura inicial  $T_o$ , a continuación trabaja el segundo compresor que reduce el volumen del gas hasta  $V_2$ . a) Calcular para que valor de  $V_1$  expresado en función de  $V_o$  y  $V_2$ , el trabajo total realizado por los compresores es el mínimo posible y cuál es su valor. b) Calcular también el trabajo que realiza cada compresor en el caso anterior.

a) El esquema de bloques inferior nos indica cómo es el proceso



De 1 a 2 se trata de un proceso adiabático en el que no hay intercambio de calor

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow \Delta U = W \Rightarrow W_1 = nC_v(T_1 - T_o) \quad (1)$$

De 3 a 4 el proceso también es adiabático

$$W_2 = nC_v(T_2 - T_o) \quad (2)$$

El trabajo total es la suma de  $W_1$  y  $W_2$ .

La transformación de (1) a (2) es adiabática y combinando la ecuación de la adiabática  $PV^\gamma = Cte$ , y de los gases perfectos

$$P_o V_o^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow \frac{P_o}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_o}\right)^\gamma \quad ; \quad \frac{P_o V_o}{T_o} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \Rightarrow \frac{P_o}{P_1} = \frac{V_1 T_o}{V_o T_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_o}\right)^\gamma = \frac{V_1 T_o}{V_o T_1} \Rightarrow \frac{T_o}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_o}\right)^{\gamma-1}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$W_1 = n C_v \left[ T_o \left(\frac{V_o}{V_1}\right)^{\gamma-1} - T_o \right] = n C_v T_o \left[ \left(\frac{V_o}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1 \right] \quad (4)$$

Para el proceso de 3 a 4 el cálculo es análogo

$$W_2 = n C_v T_o \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \quad (5)$$

El trabajo total:

$$W_T = n C_v T_o \left[ \left( \frac{V_o}{V_1} \right)^{\gamma-1} + \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 2 \right]$$

De la expresión anterior se deduce que para que el trabajo sea mínimo, lo que está dentro del paréntesis cuadrado debe de ser mínimo. Para calcular este mínimo derivamos la expresión del paréntesis cuadrado respecto de  $V_1$  e igualamos a cero.

$$\begin{aligned} & \frac{-V_o^{\gamma-1}(\gamma-1)V_1^{\gamma-2}}{[(V_1)^{\gamma-1}]^2} + \frac{V_2^{\gamma-1}(\gamma-1)V_1^{\gamma-2}}{[(V_2)^{\gamma-1}]^2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{[-V_o^{\gamma-1}(\gamma-1)V_1^{\gamma-2}][(V_2)^{\gamma-1}]^2 + [V_2^{\gamma-1}(\gamma-1)V_1^{\gamma-2}][(V_1)^{\gamma-1}]^2}{[(V_1)^{\gamma-1}]^2[(V_2)^{\gamma-1}]^2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & [V_o^{\gamma-1}V_1^{\gamma-2}][(V_2)^{\gamma-1}]^2 = [V_2^{\gamma-1}V_1^{\gamma-2}][(V_1)^{\gamma-1}]^2 \Rightarrow [V_o^{\gamma-1}][(V_2)^{\gamma-1}] = [(V_1)^{\gamma-1}]^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow & (V_o^{\gamma-1})(V_2^{\gamma-1}) = (V_1)^{\gamma-1} \cdot (V_1)^{\gamma-1} \Rightarrow V_o V_2 = V_1^2 \Rightarrow V_1 = \sqrt{V_o V_2} \quad (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo esta última ecuación en el trabajo total tendremos el trabajo mínimo

$$\begin{aligned} W_T &= n C_v T_o \left[ \frac{V_o^{\gamma-1}}{(V_o V_2)^{\frac{\gamma-1}{2}}} + \frac{(V_o V_2)^{\frac{\gamma-1}{2}}}{V_2^{\gamma-1}} - 2 \right] = n C_v T_o \left[ \frac{V_o^{\frac{\gamma-1}{2}}}{V_2^{\frac{\gamma-1}{2}}} + \frac{V_o^{\frac{\gamma-1}{2}}}{V_2^{\frac{\gamma-1}{2}}} - 2 \right] = \\ &= n C_v T_o \left[ \frac{2V_o^{\frac{\gamma-1}{2}}}{V_2^{\frac{\gamma-1}{2}}} - 2 \right] = n T_o \frac{5}{2} R \left[ 2 \left( \frac{V_o}{V_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 2 \right] = 5 P_o V_o \left[ \left( \frac{V_o}{V_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

b) En las ecuaciones (4) y (5) sustituimos la (3)

$$W_1 = n C_v T_o \left[ \frac{V_o^{\gamma-1}}{[V_o V_2]^{\frac{\gamma-1}{2}}} - 1 \right] = n C_v T_o \left[ \left( \frac{V_o}{V_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right]$$

$$W_2 = n C_V T_0 \left[ \frac{[V_0 V_2]^{\frac{\gamma-1}{2}}}{V_2^{\gamma-1}} - 1 \right] = n C_V T_0 \left[ \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right]$$

Los trabajos de ambos compresores son iguales.