

PROBLEMAS VARIADOS 11

102.- Se desea construir un circuito serie LCR de modo que para una frecuencia de 10 kHz, la impedancia del circuito sea $1,3 \text{ k}\Omega$, su frecuencia de resonancia 5,0 kHz y la intensidad de la corriente esté retrasada 60° respecto de la tensión.

- Calcular los valores de L , R y C
- Si el voltaje eficaz de la fuente del circuito es 130 V, calcular la intensidad eficaz en el circuito y las tensiones eficaces en cada uno de los elementos
- Calcular la potencia media en el circuito y la potencia media en cada uno de sus elementos.
- Si se mantienen las mismas L , R y C obtenidas en el apartado a), así como el voltaje eficaz, se pide calcular la frecuencia de la corriente alterna para la que la potencia consumida en el circuito sea la máxima posible.
- Determine para que frecuencias la potencia consumida en el circuito es 8 W.

a) Teniendo en cuenta que la intensidad de la corriente está retrasada respecto del voltaje, esto nos indica que es un circuito en que la reactancia inductiva es mayor que la reactancia capacitiva. Un esquema (fig.1), no a escala, nos indica este hecho.

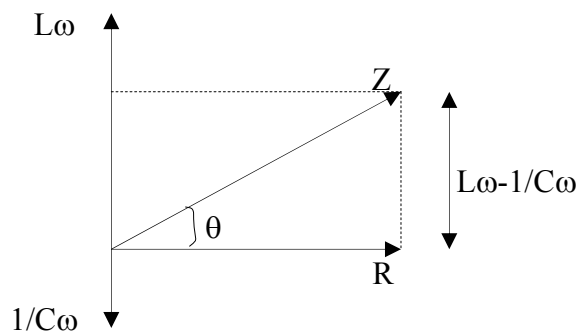


Fig.1

De la figura 1 se deduce

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} ; \quad (1,3 \cdot 10^3)^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \quad (1)$$

$$\text{tag}\theta = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \text{tag } 60^\circ \quad (2)$$

La resonancia ocurre cuando

$$L\omega_R = \frac{1}{C\omega_R} \Rightarrow L = \frac{1}{C\omega_R^2} = \frac{1}{C4\pi^2(5,0 \cdot 10^3)^2} \Rightarrow L = \frac{1,013 \cdot 10^{-9}}{C} \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2).

$$(1,3 \cdot 10^3)^2 - R^2 = (R \cdot \tan 60^\circ)^2 \Rightarrow 1,69 \cdot 10^6 = R^2(1 + \tan^2 60^\circ) \Rightarrow R = \sqrt{\frac{1,69 \cdot 10^6}{4}} = 650 \, \Omega$$

Combinando (3) con (2).

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = R \cdot \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{1,013 \cdot 10^{-9} \cdot \omega}{C} - \frac{1}{C\omega} = 650 \cdot \tan 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,013 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^2 - 1 = 650 \cdot \tan 60^\circ \cdot C\omega \Rightarrow C = \frac{1,013 \cdot 10^{-9} \cdot 4\pi^2 \cdot (10^4)^2 - 1}{650 \cdot \tan 60^\circ \cdot 2\pi \cdot 10^4} = 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ F}$$

De la ecuación (3)

$$L = \frac{1,03 \cdot 10^{-9}}{4,2 \cdot 10^{-8}} = 0,025 \text{ H}$$

b)

$$I_{\text{efz}} = \frac{V_{\text{efz}}}{Z} = \frac{130}{1,3 \cdot 10^3} = 0,10 \text{ A}$$

En la resistencia $V_{\text{efz}}^R = I_{\text{efz}} \cdot R = 0,10 \cdot 650 = 65 \text{ V}$

En el condensador $V_{\text{efz}}^C = I_{\text{efz}} \cdot \frac{1}{C2\pi \cdot f} = 0,10 \cdot \frac{1}{4,2 \cdot 10^{-8} \cdot 2\pi \cdot 10^4} = 37,9 \text{ V}$

En la autoinducción $V_{\text{efz}}^L = I_{\text{efz}} \cdot L2\pi \cdot f = 0,10 \cdot 0,025 \cdot 2\pi \cdot 10^4 = 157 \text{ V}$

c) Potencia media en el circuito

$$\langle P \rangle = I_{\text{efz}} V_{\text{efz}} \cos\theta = 0,10 \cdot 130 \cdot \cos 60^\circ = 6,5 \text{ W}$$

Potencia media en la resistencia

$$\langle P \rangle_R = I_{\text{efz}}^2 R = 0,1^2 \cdot 650 = 6,5 \text{ W}$$

Las potencias medias tanto en el condensador como en la bobina son nulas.

d)

$$\langle P \rangle = I_{\text{efz}} V_{\text{efz}} \cos\theta = \frac{V_{\text{efz}}}{Z} V_{\text{efz}} \frac{R}{Z} = V_{\text{efz}}^2 \frac{R}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Para que la potencia sea máxima el denominador debe ser mínimo y eso ocurre cuando $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, lo que significa que el circuito está en resonancia, la frecuencia de resonancia es un dato del problema y es 5 kHz.

La potencia media máxima vale:

$$\langle P_{\text{max}} \rangle = I_{\text{efz}} V_{\text{efz}} = 0,1 \cdot 130 = 13 \text{ W}$$

e)

$$\langle P \rangle = 8 = I_{\text{efz}} V_{\text{efz}} \cos\theta = 0,10 \cdot 130 \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{8}{13}$$

Para el valor del coseno anterior existen dos soluciones $\theta = 52^\circ$ y $\theta = -52^\circ$. Para el primer valor en el circuito predomina la reactancia inductiva (como se observa en la figura 1), para el segundo valor de θ predomina la reactancia capacitiva.

En el primer caso

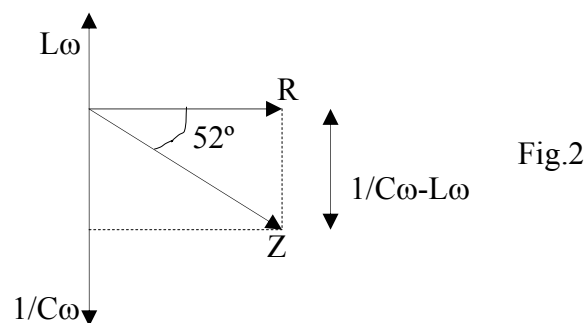
$$\cos\theta = \frac{8}{13} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \Rightarrow \frac{64}{169} = \frac{R^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64R^2 + 64\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 169R^2 \Rightarrow 1,64 * 650^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \Rightarrow 832 = L\omega - \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \text{En el}$$

$$\Rightarrow LC\omega^2 - 832C\omega - 1 = 0 \Rightarrow 1,05 \cdot 10^{-9} \omega^2 - 3,49 \cdot 10^{-5} \omega - 1 = 0 \Rightarrow \omega = 51670 = 2\pi f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 8,2 \text{ kHz}$$

segundo caso, cuando $\theta = -52^\circ$, la reactancia capacitiva es mayor que la reactancia inductiva (fig.2).



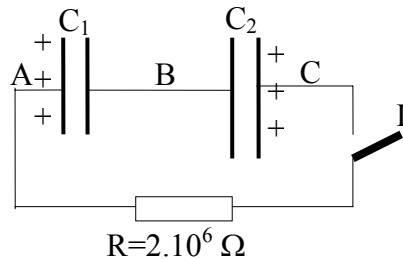
$$\cos\theta = \frac{8}{13} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}} \Rightarrow \frac{64}{169} = \frac{R^2}{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64R^2 + 64\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 = 169R^2 \Rightarrow 1,64 * 650^2 = \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 \Rightarrow 832 = \frac{1}{C\omega} - L\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LC\omega^2 + 832C\omega - 1 = 0 \Rightarrow 1,05 \cdot 10^{-9} \omega^2 + 3,49 \cdot 10^{-5} \omega - 1 = 0 \Rightarrow \omega = 18429 = 2\pi f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 2,9 \text{ kHz}$$

103.- Un condensador C_1 tiene una capacidad de $5 \cdot 10^{-12} \text{ F}$ y se carga a una diferencia de potencial de 60 V . Un segundo condensador C_2 tiene una capacidad de $80 \cdot 10^{-12} \text{ F}$ y se carga a una tensión de 15 V . Una vez cargados los condensadores se monta el circuito indicado en la figura inferior.



- Calcular la carga y la energía almacenada en cada condensador.
- Se cierra el interruptor I , calcular la intensidad que circula por el circuito en el instante del cierre
- Calcular la carga de cada condensador cuando no circule corriente por el circuito
- Determinar la expresión matemática que indica cómo varía la intensidad de la corriente en el circuito durante el periodo transitorio.
- Calcular la energía perdida por los condensadores durante el proceso.

$$Q_1 = C_1 V_1 = 5 \cdot 10^{-12} \cdot 60 = 3 \cdot 10^{-10} \text{ C} ; Q_2 = C_2 V_2 = 80 \cdot 10^{-12} \cdot 15 = 12 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

$$a) E_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} 5 \cdot 10^{-12} \cdot 60^2 = 9 \cdot 10^{-9} \text{ J} ; E_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = \frac{1}{2} 80 \cdot 10^{-12} \cdot 15^2 = 9 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

- b) En el instante de cerrar el interruptor el circuito se compone como si tuviese una fuente de 60 V y otra de 15 en sentido opuesto; aplicando la ley de Ohm generalizada

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2}}{R} = \frac{60 - 15}{2 \cdot 10^6} = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ A}$$

- c) De acuerdo con la figura del enunciado escribimos

$$V_A - V_B = 60 \text{ V} ; V_C - V_B = 15 \text{ V} \Rightarrow V_A - V_C = 45 \text{ V}$$

Como V_A es mayor que V_C el condensador C_1 comenzará a perder carga que será ganada por el condensador C_2 , esto durará hasta que $(V_A = V_C)_{\text{final}}$, esto es, $V_{Af} - V_{Cf} = 0$.

Llamamos θ a la carga perdida por C_1 , que es la ganada por C_2 .

$$V_{Af} - V_{Bf} = \frac{Q_1 - \theta}{C_1} ; V_{Cf} - V_{Bf} = \frac{Q_2 + \theta}{C_2} \Rightarrow V_{Af} - V_{Bf} - (V_{Cf} - V_{Bf}) = \frac{Q_1 - \theta}{C_1} - \frac{Q_2 + \theta}{C_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{Af} - V_{Cf} = 0 = (3 \cdot 10^{-10} - \theta) \cdot 80 \cdot 10^{-12} = (12 \cdot 10^{-10} + \theta) \cdot 5 \cdot 10^{-12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 240 \cdot 10^{-10} - 80\theta = 60 \cdot 10^{-10} + 5\theta \Rightarrow \theta = \frac{180 \cdot 10^{-10}}{85} = 2,12 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

$$Q_{1f} = Q_1 - \theta = 3 \cdot 10^{-10} - 2,12 \cdot 10^{-10} = 0,88 \cdot 10^{-10} \text{ C} ;$$

$$Q_{2f} = Q_2 + \theta = 12 \cdot 10^{-10} + 2,12 \cdot 10^{-10} = 14,12 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

c) En el instante inicial la intensidad de la corriente es I_0 , a medida que transcurre el tiempo la intensidad disminuye hasta anularse.

Designamos con i a la intensidad un tiempo t después de cerrar el interruptor, y con q a la carga que hasta ese momento ha pasado del condensador C_1 al C_2 . La intensidad i es el cociente entre los voltajes de los condensadores divididos por la resistencia R del circuito

$$i = \frac{\frac{Q_1 - q}{C_1} - \frac{Q_2 + q}{C_2}}{R} = \frac{\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} - q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}{R} = \frac{V_1 - V_2 - q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}{R}$$

Según hemos visto $I_0 = \frac{V_1 - V_2}{R}$ y $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_e}$, siendo C_e la capacidad equivalente al conjunto de los dos condensadores

$$i = \frac{I_0 - \frac{q}{C_e}}{R}$$

De la expresión anterior calculamos la variación de i con el tiempo

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{I_0 - \frac{q}{C_e}}{R} \right) = -\frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{RC_e}$$

Como $\frac{dq}{dt} = i$, resulta:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{RC_e} \Rightarrow \int \frac{di}{i} = \int -\frac{dt}{RC_e} \Rightarrow \ln i = -\frac{1}{RC_e} t + Cte, \text{ cuando } t = 0, Cte = \ln I_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{i}{I_0} = -\frac{1}{RC_e} t \Rightarrow i = I_0 e^{-\frac{1}{RC_e} t}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-12}} + \frac{1}{80 \cdot 10^{-12}} = \frac{17}{80 \cdot 10^{-12}} \Rightarrow C_e = 4,71 \cdot 10^{-12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_e R = 4,71 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^6 = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{C_e R} = 1,06 \cdot 10^5$$

$$i = 2,25 \cdot 10^{-5} e^{-1,06 \cdot 10^5 \cdot t}$$

e) La energía que almacenan los condensadores al final es:

$$E_{1f} = \frac{1}{2} C_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} C_2 V_{2f}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_{1f}^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{2f}^2}{C_2} = \frac{1}{2} \frac{(0,88 \cdot 10^{-10})^2}{5 \cdot 10^{-12}} + \frac{1}{2} \frac{(14,12 \cdot 10^{-10})^2}{80 \cdot 10^{-12}}$$

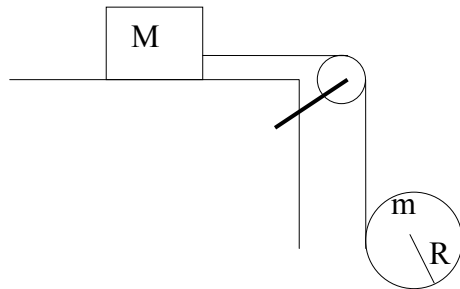
$$E_{1f} = 1,32 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

La energía contenida en los condensadores al principio era $18 \cdot 10^{-9} \text{ J}$.

La energía disipada es:

$$\Delta E = 18 \cdot 10^{-9} - 1,32 \cdot 10^{-8} = 4,8 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

104.- En el esquema de la figura $M = 10 \text{ kg}$ y $m = 5 \text{ kg}$ y radio $R = 8 \text{ cm}$. La polea fija y la cuerda tienen masas despreciables. La cuerda puede desenrollarse por la polea móvil m sin resbalar.



- a) Calcular el menor coeficiente de rozamiento de M con la mesa para que cuando el sistema esté en libertad la masa M permanezca en reposo.
 b) Si el coeficiente de rozamiento entre M y la mesa es $0,05$ determinar la tensión de la cuerda y las aceleraciones lineales de M y m respecto del suelo.

a) En la figura 1 se indican las fuerzas que actúan sobre M y m .

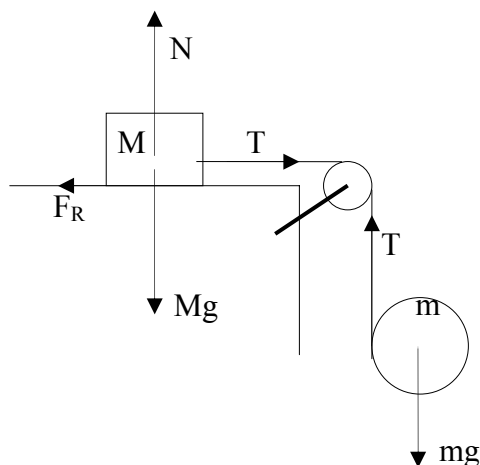


Fig.1

Para la masa M : $T - F_R = M a_M = 0$

Para la masa m :
$$\left. \begin{aligned} T \cdot R = I\alpha = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \Rightarrow T = \frac{1}{2} m R \alpha \\ mg - T = m a_m \\ a_m = \alpha R \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo α de la tercera ecuación en la primera y a_m de la segunda resulta

$$T = \frac{1}{2} m R \frac{a_m}{R} = \frac{1}{2} m \left(g - \frac{T}{m} \right) \Rightarrow 2T = mg - T \Rightarrow T = \frac{mg}{3}$$

Como $T = F_R = \mu N = \mu Mg = \frac{mg}{3} \Rightarrow \mu = \frac{m}{3M} = \frac{5}{3 \cdot 10} = 0,17$

Si el coeficiente de rozamiento entre M y la mesa es inferior a 0,17 habrá deslizamiento de la masa M sobre la mesa.

b) Dado que el coeficiente de rozamiento es $0,05 < 0,17$, la masa M deslizará sobre la mesa. La polea móvil se moverá hacia abajo al desenrollarse la cuerda y también al avanzar la masa M sobre la mesa, respecto del suelo la aceleración lineal de m es la suma de la aceleración de M más la aceleración producida al desenrollarse la cuerda.

$$T - \mu Mg = Ma_M \Rightarrow a_M = \frac{T}{M} - \mu g$$

$$T \cdot R = I\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha \Rightarrow T = \frac{1}{2}mR\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2T}{mR} \Rightarrow \frac{a_m}{R} = \frac{2T}{mR} \Rightarrow a_m = \frac{2T}{m}$$

$$a_m = \alpha R$$

$$mg - T = m(a_M + a_m)$$

Sustituyendo en la última ecuación

$$mg - T = m\left(\frac{T}{M} - \mu g + \frac{2T}{m}\right) \Rightarrow mg - T = T\frac{m}{M} - m\mu g + 2T \Rightarrow T\left(3 + \frac{m}{M}\right) = mg(1 + \mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{mg(1 + \mu)}{3 + \frac{m}{M}} = \frac{5 \cdot 9,8 \cdot 1,05}{3 + \frac{5}{10}} = 14,7 \text{ N}$$

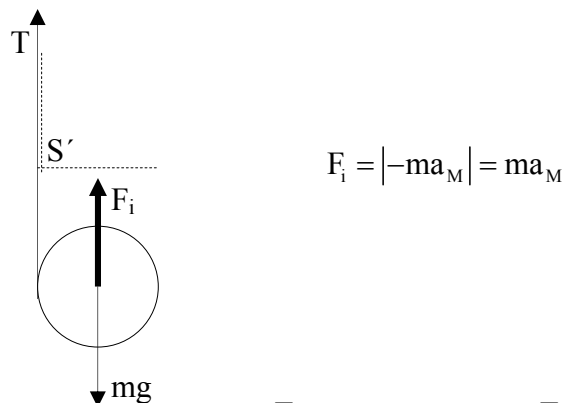
$$a_M = \frac{T}{M} - \mu g = \frac{14,7}{10} - 0,05 \cdot 9,8 = 0,98 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_m = \frac{2T}{m} = \frac{2 \cdot 14,7}{5} = 5,88 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La aceleración lineal de la polea móvil respecto del suelo es:

$$a = a_M + a_m = 0,98 + 5,88 = 6,86 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Podemos calcular la aceleración de la polea móvil de otra manera y es tomando un sistema de referencia no inercial S' situado en la cuerda que desciende con aceleración a_M . En este sistema hemos de introducir una fuerza de inercia contraria a esta aceleración. Calculamos la aceleración relativa a_m respecto de S' .



$$mg - T - ma_M = ma_m \Rightarrow a_m = g - \frac{T}{m} - a_M \Rightarrow a_m = g - \frac{T}{m} - \frac{T}{M} + \mu g =$$

$$= g(1 + \mu) - T\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow a_m = 9,8 \cdot 1,05 - 14,7\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) = 5,88 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

De igual modo, para conocer la aceleración absoluta sumáramos a esta aceleración relativa a_m la de arrastre a_M .

105.- En un sistema de referencia S dos sucesos están separados por $\Delta t=8,0$ s y $\Delta x = 2 \cdot 10^9$ m. ¿Existe un sistema de referencia S' para el que los dos sucesos sean simultáneos?. ¿Existe un sistema S'' en que los dos sucesos ocurran en el mismo punto del espacio?, en tal caso ¿cuál sería su separación temporal?

Designamos con v a la velocidad del sistema S' y con A y B los dos sucesos y aplicamos una de las transformaciones de Lorentz a cada suceso.

$$t'_A = \frac{t_A - x_A \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad t'_B = \frac{t_B - x_B \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t'_B - t'_A = 0 = \frac{(t_A - t_B) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - \frac{v}{9 \cdot 10^{16}} \cdot 2 \cdot 10^9 = 0 \quad \Rightarrow 72 \cdot 10^{16} = 2 \cdot 10^9 v \quad \Rightarrow v = 3,6 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dado que v supera la velocidad de la luz, el sistema S' no puede existir.

$$x'_A = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad x'_B = \frac{x_B - vt_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow x'_B - x'_A = 0 = \frac{(x_A - x_B) - v(t_A - t_B)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{x_A - x_B}{t_A - t_B} = \frac{2 \cdot 10^9}{8,0} = 2,5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad de S' es inferior a la de la luz y por tanto el sistema puede existir.

$$t'_A = \frac{t_A - x_A \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad t'_B = \frac{t_B - x_B \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t'_B - t'_A = \frac{(t_A - t_B) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t'_B - t'_A = \frac{8,0 - \frac{2,5 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{16}} \cdot 2 \cdot 10^9}{\sqrt{1 - \left(\frac{2,5 \cdot 10^8}{3,0 \cdot 10^8}\right)^2}} = 4,4 \text{ s}$$

Este problema se puede resolver más rápidamente utilizando el invariante s.

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta l^2$$

Aplicando la relación anterior para el sistema S y para el sistema S' en el que $\Delta t' = 0$

$$(3 \cdot 10^8 \cdot 8,0)^2 - (2 \cdot 10^9)^2 = -(\Delta l')^2 \Rightarrow -1,76 \cdot 10^{18} = (\Delta l')^2$$

Este sistema no existe.

Apliquemos para el sistema S'' en el que $\Delta l' = 0$

$$1,76 \cdot 10^{18} = (c\Delta t')^2 \Rightarrow \Delta t' = \sqrt{\frac{1,76 \cdot 10^{18}}{9 \cdot 10^{16}}} = 4,4 \text{ s}$$

106.- La superficie de una de las armaduras de un condensador plano vale $S = 1 \text{ cm}^2$ y la distancia entre las armaduras $d = 0,1 \text{ mm}$. La diferencia de potencial entre las armaduras $\Delta V = 2,5 \text{ V}$. Calcular:

a) El campo eléctrico entre las armaduras, la carga de una de las armaduras y la energía almacenada en el condensador.

b) Si se mantiene la carga de las armaduras y se aumenta la distancia entre ellas en 10^{-6} m , calcular la variación que experimenta la diferencia de potencial en el condensador.

c) Se une el condensador a una pila de $2,5 \text{ V}$, lo que permite mantener fija la diferencia de potencial entre las armaduras, y si una de ellas efectúa un movimiento vibratorio armónico de $f = 10^5 \text{ Hz}$ y amplitud 10^{-6} m , de tal modo que la vibración acerca y aleja a la armadura vibrante de la fija, determinar:

d) La carga de cada armadura en función del tiempo y la intensidad de la corriente que circula por el circuito.

a) El campo al ser uniforme entre las armaduras del condensador está relacionado con la diferencia de potencial por la ecuación.

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{2,5 \text{ V}}{0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2,5 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Para calcular la carga de una de las armaduras hacemos uso de la relación

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow Q = C \Delta V = \frac{\epsilon_0 S}{d} \Delta V = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-4}}{0,1 \cdot 10^{-3}} \cdot 2,5 = 2,21 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

$$E = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 S}{d} \cdot \Delta V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} \cdot 2,5^2 = 2,76 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

b) Al aumentar la distancia entre las armaduras y permanecer constante la carga de las armaduras, la nueva capacidad es:

$$C' = \frac{\epsilon_0 S}{d + 10^{-6}} \Rightarrow \Delta V' = \frac{Q}{C'} = \frac{C \Delta V}{C'} = \frac{\frac{\epsilon_0 S}{d}}{\frac{\epsilon_0 S}{d + 10^{-6}}} \cdot \Delta V = \frac{d + 10^{-6}}{d} \cdot \Delta V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V' - \Delta V = \Delta V \left(\frac{d + 10^{-6}}{d} - 1 \right) = 2,5 \cdot \left(\frac{0,1 \cdot 10^{-3} + 10^{-6}}{0,1 \cdot 10^{-3}} - 1 \right) = 0,025 \text{ V}$$

c) Suponemos que cuando $t=0$ la distancia entre las armaduras es d , al variar la distancia entre las armaduras varía la capacidad del condensador, aunque la batería mantiene la diferencia de potencial de 2,5 V. La distancia entre las armaduras en función del tiempo es $d'=d+A \sin 2\pi f t$ y la capacidad del condensador y la carga de una de sus armaduras

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d + A \sin 2\pi f t} = \frac{Q}{2,5} \Rightarrow Q = \frac{2,5 \epsilon_0 S}{d + A \sin 2\pi f t}$$

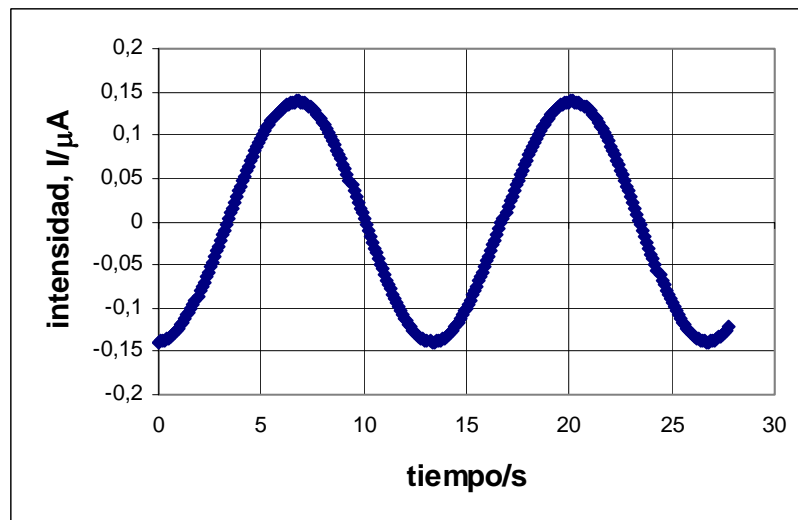
La carga es función del tiempo, por tanto cuando la carga disminuya la batería le suministra corriente al condensador y cuando la carga aumente el condensador suministra corriente, en definitiva en el circuito eléctrico aparece una corriente variable, cuyo valor es.

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2,5 \epsilon_0 S}{d + A \sin 2\pi f t} \right) = 2,5 \epsilon_0 S \left[\frac{-A \cdot 2\pi f \cdot \cos 2\pi f t}{(d + A \sin 2\pi f t)^2} \right] \Rightarrow$$

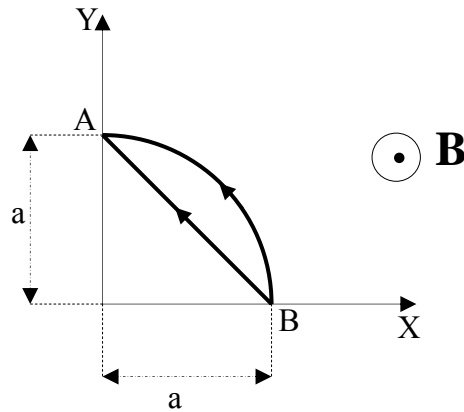
$$I(t) = \frac{2,5 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \left[\frac{-10^{-6} \cdot 2\pi 10^5 \cdot \cos 2\pi 10^5 t}{(0,1 \cdot 10^{-3} + 10^{-6} \sin 2\pi 10^5 t)^2} \right] = -\frac{1,57 \cdot 10^{-4} \cos 2\pi 10^5 t}{36\pi \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} (0,1 + 10^{-3} \sin 2\pi 10^5 t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{1,388 \cdot 10^{-9} \cos 2\pi 10^5 t}{(0,1 + 10^{-3} \sin 2\pi 10^5 t)^2}$$

La representación gráfica de la función anterior es:



107.- En el plano XY existen dos conductores entre A y B, uno es rectilíneo y el otro un arco de circunferencia. En la dirección del eje Z positivo existe un campo magnético uniforme, o lo que es lo mismo el campo magnético es perpendicular al plano del papel y saliendo de él.



La corriente que circula por los conductores es I y dirigida desde B hacia A.

- a) Calcular la fuerza magnética que sufren ambos conductores y comprobar que el módulo de la fuerza es el mismo para ambos.
- b) Ahora, el campo magnético es decreciente, de modo que cuando $y=0$ vale B_0 y cuando $y = a$ es nulo. Calcular, para ambos conductores, el valor de la fuerza que sufren por acción de este campo variable.

En primer lugar debemos considerar despreciable la interacción magnética entre ambos conductores, puesto que al estar recorridos por corrientes, también éstas crean un campo magnético que actuaría sobre el otro conductor. Es decir, que la única interacción magnética a considerar es la que tiene lugar entre los conductores y el campo magnético B dirigido según el eje Z.

a) La fuerza que sufre un elemento de corriente al estar situado en el interior de un campo magnético es:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \Rightarrow dF = I dl B \sin\alpha$$

Tanto para el conductor rectilíneo como para el arco $\alpha = 90^\circ$.

En la figura 1, se ha dibujado $d\vec{F}$, en dos lugares diferentes de los conductores

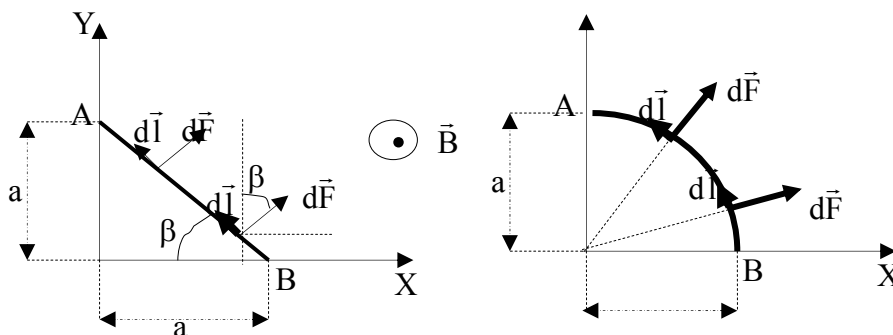


Fig.1

a1) Cuando el conductor es rectilíneo todos los vectores $d\vec{F}$ son paralelos, si el conductor es un arco de circunferencia, las rectas que contienen a los diferentes vectores $d\vec{F}$ todas pasan por el origen de coordenadas.

Para el conductor rectilíneo cada $d\vec{F}$ tiene dos componentes sobre los ejes X e Y, cuyos módulos son respectivamente

$$dF_x = dF \cdot \text{sen}\beta = IB dl \text{sen}\beta \Rightarrow dF_x = IB dl \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$dF_y = dF \cdot \text{cos}\beta = IB dl \text{cos}\beta \Rightarrow dF_y = IB dl \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para hallar las componentes F_x e F_y debemos integrar las anteriores ecuaciones:

$$F_x = IB \frac{\sqrt{2}}{2} \int dl = IB \frac{\sqrt{2}}{2} L = IB \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2a^2} = IBa$$

$$F_y = IB \frac{\sqrt{2}}{2} \int dl = IB \frac{\sqrt{2}}{2} L = IB \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2a^2} = IBa$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = IBa \vec{i} + IBa \vec{j}$$

Si se utilizan componentes cartesianas, resulta en este caso más sencillo y claro expresar $d\vec{l}$ como:
 $d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$

Al ser $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I(dx \vec{i} + dy \vec{j}) \wedge B \vec{k} = IBdx (-\vec{j}) + IBdy \vec{i}$

Integrando, $\vec{F} = -\vec{j} \int_a^0 IBdx + \vec{i} \int_0^a IBdy = -\vec{j} IB[x]_a^0 + \vec{i} IB[y]_0^a = aIB\vec{j} + aIB\vec{i}$

a2) Cuando el conductor es un arco de circunferencia, nos fijamos en la figura 2.

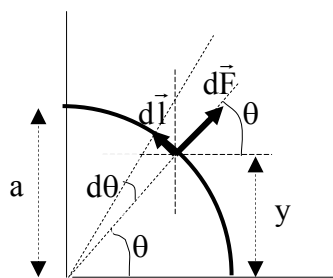


Fig.2

Hemos escogido al azar un elemento $d\vec{l}$ sobre el arco cuyo módulo se calcula teniendo en cuenta que el valor del arco es igual al del radio por el ángulo expresado en radianes.

$$dl = a d\theta$$

Las proyecciones del módulo de la fuerza elemental, $dF = I dl B \text{sen } 90 = I dl B$ sobre los ejes valen:

$$dF_x = dF \cdot \cos\theta = IB dl \cos\theta = IB a \cos\theta d\theta$$

$$dF_y = dF \cdot \sin\theta = IB dl \sin\theta = IB a \sin\theta d\theta$$

Para hallar las componentes F_x e F_y debemos integrar las anteriores ecuaciones.

$$F_x = IBa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = IBa \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0^\circ \right) = IBa$$

$$F_y = IBa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = IBa \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0^\circ \right) = IBa$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = IBa \vec{i} + IBa \vec{j}$$

b) Al ser el campo decreciente podemos escribir

$$B = B_0 - ky$$

Cuando $y = a$ $B = 0$,

$$0 = B_0 - ka \Rightarrow k = \frac{B_0}{a} \Rightarrow B = B_0 - \frac{B_0}{a}y \Rightarrow B = B_0 \left(1 - \frac{y}{a} \right)$$

b1) Para el conductor recto ahora el módulo de $d\mathbf{F}$ no es constante y se hace cero en el extremo A del conductor

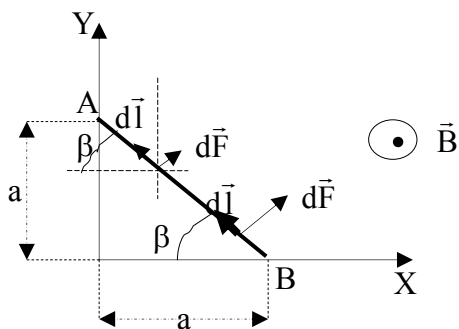


Fig.3

La componente del vector $d\mathbf{l}$ sobre el eje Y es $d\mathbf{y}$, cuyo módulo es $dy = dl \sin\beta$
 La fuerza que sufre ese elemento de corriente vale:

$$dF = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) dl = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dy}{\text{sen}\beta} \Rightarrow dF_x = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dy}{\text{sen}\beta} \cdot \text{sen}\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = IB_o \left(\int_0^a dy - \frac{1}{a} \int_0^a y dy \right) = IB_o \left(a - \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \right) = IB_o \frac{a}{2}$$

Para la componente F_y

$$dF = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) dl = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dy}{\text{sen}\beta} \Rightarrow dF_y = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dy}{\text{sen}\beta} \cdot \text{cos}\beta = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dy}{\text{tag}\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_y = IB_o \left(\int_0^a dy - \frac{1}{a} \int_0^a y dy \right) = IB_o \left(a - \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \right) = IB_o \frac{a}{2}$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = IB_o \frac{a}{2} \vec{i} + IB_o \frac{a}{2} \vec{j}$$

b2) Si en la figura 2 elegimos al azar un elemento de corriente dl , éste sufre una fuerza de módulo

$$dF = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) dl = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a d\theta \Rightarrow dF_x = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a d\theta \cdot \text{cos}\theta$$

De la figura 2 se deduce que $y = a \text{sen}\theta$

$$dF_x = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a d\theta \cdot \text{cos}\theta = IB_o \left(1 - \frac{a \text{sen}\theta}{a}\right) a d\theta \cdot \text{cos}\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = IB_o a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{cos}\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\theta \text{cos}\theta d\theta \right) = IB_o a \left[\left(\text{sen} \frac{\pi}{2} - \text{sen}0^\circ \right) - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} 2\theta d\theta \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = IB_o a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \text{cos} 2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \text{cos} 0^\circ \right) = IB_o a + IB_o a \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (-1 - 1) \right) = IB_o \frac{a}{2}$$

Calculamos la componente F_y .

$$dF = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) dl = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a d\theta \Rightarrow dF_y = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a d\theta \cdot \text{sen}\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_Y = \int IB_o \left(1 - \frac{a \sin \theta}{a}\right) a \sin \theta d\theta = IB_o \left(a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta - a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \right)$$

$$F_Y = IB_o a - IB_o a \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow F_Y = IB_o a - IB_o a \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin \pi + \frac{1}{4} \sin 0^\circ \right) \Rightarrow$$

$$F_Y = IB_o a \left(1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi - \frac{1}{4} \sin 0^\circ \right) = IB_o a \left(1 - \frac{\pi}{4} - 0 - 0 \right) = IB_o a \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = IB_o \frac{a}{2} \vec{i} + IB_o a \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \vec{j}$$

108.-Un prisma recto isósceles tiene sus caras perpendiculares plateadas. Si un rayo de luz incide sobre la cara hipotenusa con un ángulo arbitrario. Demostrar que el rayo incidente y el emergente son paralelos.

La figura inferior indica la marcha de la luz .La figura 1, a propósito, es errónea, pues admitimos que todavía no hemos demostrado lo que piden en el problema.

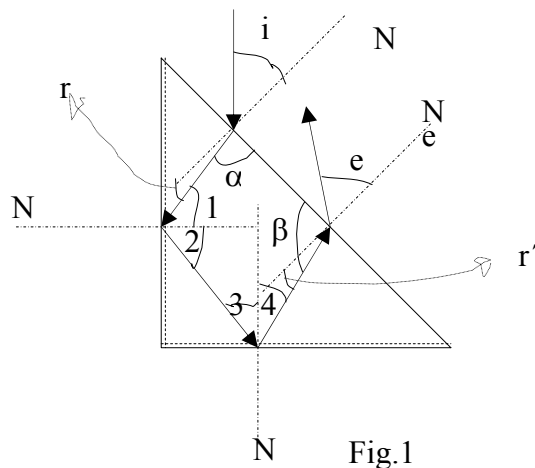


Fig.1

Designamos las siguientes magnitudes.

i ángulo de incidencia sobre la hipotenusa

r ángulo de refracción

n_1 índice del medio exterior al prisma

n_2 índice de refracción del prisma

1 y 2 ángulos de incidencia y reflexión sobre la primera cara plateada

3 y 4 ángulos de incidencia y reflexión sobre la segunda cara plateada.

e , ángulo de emergencia de la luz

Cualquier normal N es perpendicular a la cara y por tanto el ángulo que forma con ella es de 90°

Si demostramos que el ángulo r es igual al r' , entonces se deduce, a partir de la ley de Snell,

$$\left. \begin{array}{l} n_1 \sin i = n_2 \sin r \\ n_2 \sin r' = n_1 \sin e \end{array} \right\}$$

que $i = e$ y por tanto los rayos incidentes y emergentes son paralelos.

Por las leyes de la reflexión se cumple que $\hat{1} = \hat{2}$ y $\hat{3} = \hat{4}$

De la observación de la figura 1 se deduce que $\hat{2} + \hat{3} = 90^\circ$ y junto con la relaciones anteriores $\hat{1} + \hat{4} = 90^\circ$. Sumando se llega a $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$.

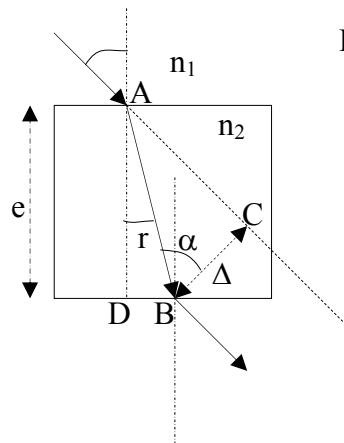
Los rayos de luz dentro del prisma forman un polígono convexo de cuatro lados, cuyos ángulos interiores suman 4 ángulos rectos

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \alpha + \beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180$$

Volviendo a la figura 1 se deduce $\alpha + r = 90^\circ$ y $\beta - r' = 90^\circ$

Combinado con la ecuación anterior $(90 - r) + (90 + r') = 180 \Rightarrow r = r'$

109.-Un rayo de luz incide con un ángulo i sobre una lámina de caras paralelas de espesor e con índice de refracción n_2 . El medio que rodea a la lámina tiene un índice de refracción n_1 . El rayo emergente se desplaza lateralmente Δ , respecto del incidente, tal como indica la figura inferior.



Demostrar que $\Delta = e \operatorname{sen} i \left(1 - \frac{n_1 \cos i}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}} \right)$

De acuerdo con la ley de Snell $n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} r$ (1)

En el triángulo ABC, $\cos \alpha = \frac{\Delta}{AB}$; en el triángulo ADB, $\operatorname{tag} r = \frac{DB}{e}$

$$AB = \sqrt{e^2 + DB^2} = \sqrt{e^2 + e^2 \operatorname{tag}^2 r}$$

En el triángulo ADB

$$\operatorname{sen}(i - r) = \frac{\Delta}{AB} \Rightarrow \Delta = \operatorname{sen}(i - r) \cdot e \sqrt{1 + \operatorname{tag}^2 r}$$

$$\Delta = (\operatorname{sen} i \cos r - \cos i \operatorname{sen} r) \cdot e \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tag}^2 r} = (\operatorname{sen} i \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 r} - \cos i \operatorname{sen} r) e \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tag}^2 r}$$

De la ecuación (1) $\operatorname{sen} r = \frac{n_1 \operatorname{sen} i}{n_2}$

$$\sqrt{1 + \tan^2 r} = \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 r}} = \sqrt{\frac{\sin^2 r + \cos^2 r}{\cos^2 r}} = \frac{1}{\cos r}$$

Llevando estas dos ecuaciones a Δ

$$\Delta = \left(\sin i \sqrt{1 - \left(\frac{n_1^2 \sin^2 i}{n_2^2} \right)} - \cos i \frac{n_1 \sin i}{n_2} \right) e \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n_1^2 \sin^2 i}{n_2^2}}} = e \sin i - e \cos i \frac{\frac{n_1 \sin i}{n_2}}{\sqrt{1 - \frac{n_1^2 \sin^2 i}{n_2^2}}} \Rightarrow$$

$$\Delta = e \sin i - e \cos i \frac{\frac{n_1 \sin i}{n_2}}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}} = e \sin i - e \cos i \frac{n_1 \sin i}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}} = e \sin i \left(1 - \frac{n_1 \cos i}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}} \right)$$

110.-Un sistema óptico consta de dos lentes de la misma distancia focal, una convergente y la otra divergente, separadas entre sí una distancia a y con el mismo eje óptico. Si desde un objeto muy lejano llega la luz al sistema incidiendo primero en la lente divergente se forma una imagen, pero si la luz incide primero sobre la lente convergente la imagen aparece desplazada 20 cm. Calcular la distancia focal de las lentes.

Como la luz proviene de un objeto muy lejano la distancia a la lente divergente es infinita y la imagen que forma esta lente del objeto estará en la distancia focal imagen de la lente divergente (recuérdese que esta lente tiene las distancias focales objeto e imagen cambiadas) Esta imagen es objeto para la lente convergente y distará de ella una distancia $|-f'| + a = f' + a$, siendo f' la distancia focal de la lente divergente.

Aplicando la ley de las lentes delgadas a la lente convergente

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{-(f'+a)} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{(f'+a)} \Rightarrow s' = \frac{f'(f'+a)}{a}$$

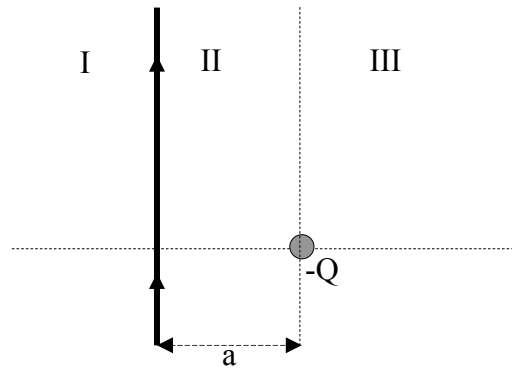
Si la luz incide desde el infinito sobre la lente convergente, esta lente formará una imagen a su derecha a una distancia f' , esta imagen es objeto para la lente divergente y distará de ella $a - f'$. Aplicando para la lente divergente la ley de las lentes delgadas

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{-(a-f')} + \frac{1}{s''} = -\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s''} = -\frac{1}{f'} - \frac{1}{(a-f')} \Rightarrow s'' = \frac{f'(f'-a)}{a}$$

De acuerdo con el enunciado del problema

$$s' - s'' = \frac{f'(f'+a) - f'(f'-a)}{a} = 2f' = 20 \Rightarrow f' = 10 \text{ cm}$$

111.- Un hilo de longitud infinita posee una carga positiva por unidad de longitud λ , a una distancia mínima a de ese hilo existe una carga puntual $-Q$ y ambos yacen en el plano XY. En la figura se observa su disposición y las tres regiones del plano designadas con I, II y III. Se pide determinar en qué regiones puede ser el campo eléctrico nulo y cuáles son sus posiciones.



En primer lugar determinamos cuál es el campo creado por un hilo de longitud infinita y con densidad lineal de carga $+\lambda$

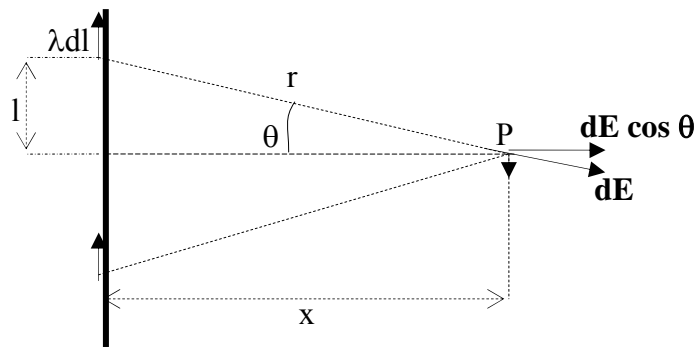


Fig.1

Consideramos un punto cualquiera del plano XY que se designa con P y que dista una distancia x del hilo. Sobre éste aparece un elemento de longitud dl que posee una carga positiva λdl y que en el punto P crea un campo $d\mathbf{E}$. Este vector campo tiene dos componentes una horizontal $d\mathbf{E} \cos \theta$ y otra vertical $d\mathbf{E} \sin \theta$. El módulo de dE vale :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{\left(\frac{x}{\cos\theta}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos^2\theta dl}{x^2}$$

De la figura 1 se deduce:

$$\text{tag } \theta = \frac{l}{x} \Rightarrow dl = x \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot d\theta$$

Llevando el valor de dl a la ecuación de dE

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos^2\theta dl}{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x^2} d\theta$$

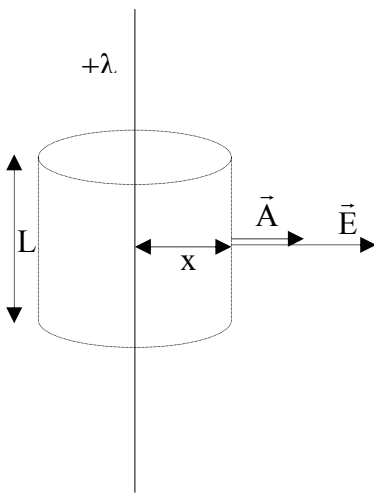
Si volvemos a la figura 1 observamos que para el elemento dl considerado existe otro situado simétricamente sobre la línea a que crea un campo en que la componente horizontal se suma y la vertical se anula, en consecuencia el campo en P tiene la dirección horizontal (por tanto perpendicular al hilo) y dirigido hacia fuera del hilo. Designamos a este campo con $dE_p = dE \cos \theta$

$$dE_p = dE \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos\theta d\theta$$

Para calcular E_p hemos de sumar las contribuciones de todos los elementos dl .

$$E_p = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos\theta d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \left| \sin\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$

Aplicando el teorema de Gauss se resuelve en dos líneas, dado que la distribución del campo tiene simetría cilíndrica.



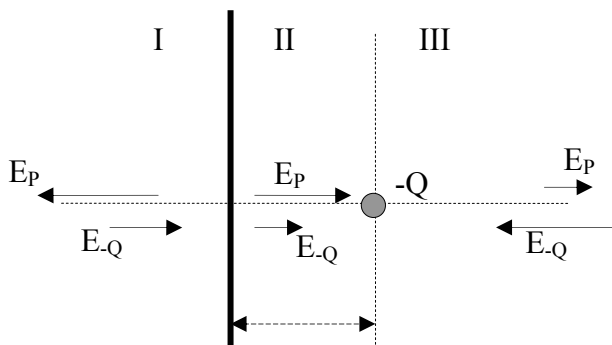
El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que contiene cargas en su interior es igual a la suma de las cargas dividido por la constante dieléctrica del medio ϵ_0 . Debido a la simetría cilíndrica del campo tomaremos como superficie de Gauss un cilindro de eje en la línea de carga, altura L y radio, la distancia x a la línea.

$$\Phi = \Phi_{\text{Lateral}} + \Phi_{\text{base}} + \Phi_{\text{tapa}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Como el flujo es $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A \cos\alpha$; en la base y en la tapa es nulo puesto que $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$ y todo el flujo sale por la superficie lateral.

$$\Phi = \Phi_{\text{Lateral}} = E \cdot A \cos 0 = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad \Phi = E \cdot 2\pi x L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}; \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en una región es la suma vectorial de los campos existentes. En la región I es posible que el campo se anule porque E_p y E_Q tienen la misma dirección y sentidos opuestos y además debe ser en algún lugar de la recta perpendicular al hilo y que pase por la carga Q . En la región II es imposible que el campo sea nulo ya que ambos campos tienen la misma dirección y sentido y en la III es posible que sí lo sea, porque los campos tienen la misma dirección pero distinto sentido. La figura 2 aclara la dirección y sentido de los campos.



Región I

Fig. 2

Llamamos x a la distancia que existe desde el hilo al punto donde se anulan los campos

$$E_p = E_{-Q} \Rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(a+x)^2} \Rightarrow \frac{\lambda}{x} = \frac{1}{2} \frac{Q}{a^2 + x^2 + 2ax} \Rightarrow a^2 + x^2 + 2ax = \frac{xQ}{2\lambda} \Rightarrow$$

$$x^2 + x\left(2a - \frac{Q}{2\lambda}\right) + a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\left(\frac{Q}{2\lambda} - 2a\right) \pm \sqrt{\left(2a - \frac{Q}{2\lambda}\right)^2 - 4a^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(\frac{Q}{2\lambda} - 2a\right) \pm \sqrt{4a^2 + \frac{Q^2}{4\lambda^2} - \frac{2aQ}{\lambda} - 4a^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\left(\frac{Q}{\lambda} - 2a\right) \pm \sqrt{\frac{Q}{\lambda}\left(\frac{Q}{4\lambda} - 2a\right)}}{2}$$

Para que exista valor de x, la raíz cuadrada debe ser de un número positivo, por tanto

$$\frac{Q}{4\lambda} - 2a \geq 0 \Rightarrow \frac{Q}{4\lambda} \geq 2a \Rightarrow Q \geq 8a\lambda \quad (1)$$

Si $Q = 8a\lambda$, existe **un sólo valor de x**, si $Q > 8a\lambda$ existirán **dos valores de x**, lo cual requiere que

$$\left(\frac{Q}{2\lambda} - 2a\right)^2 > \frac{Q^2}{4\lambda^2} - \frac{2aQ}{\lambda} \Rightarrow \frac{Q^2}{4\lambda^2} + 4a^2 - \frac{2aQ}{\lambda} > \frac{Q^2}{4\lambda^2} - \frac{2aQ}{\lambda} \Rightarrow 4a^2 > 0$$

Como a es una distancia se cumple la condición y existen dos soluciones.

La figura 3 representa el campo E (escala arbitraria) en la zona I cuando solamente hay una solución

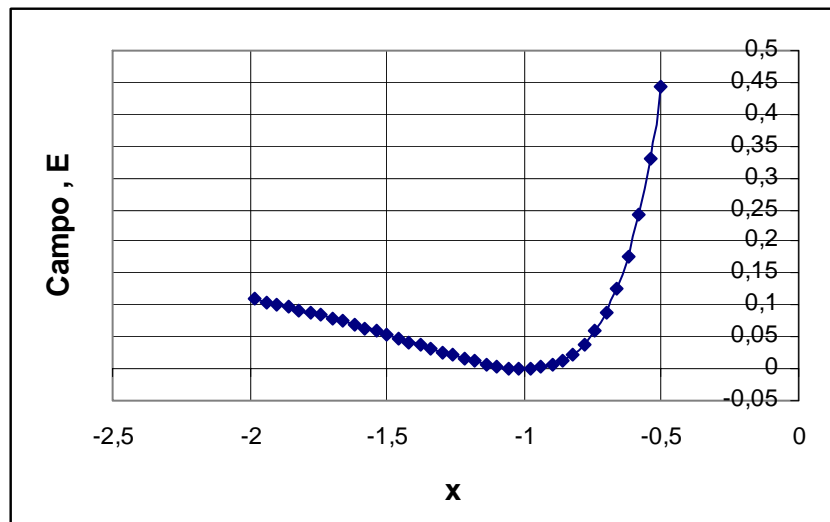


Fig.3

La figura 4 representa el campo cuando hay dos soluciones.

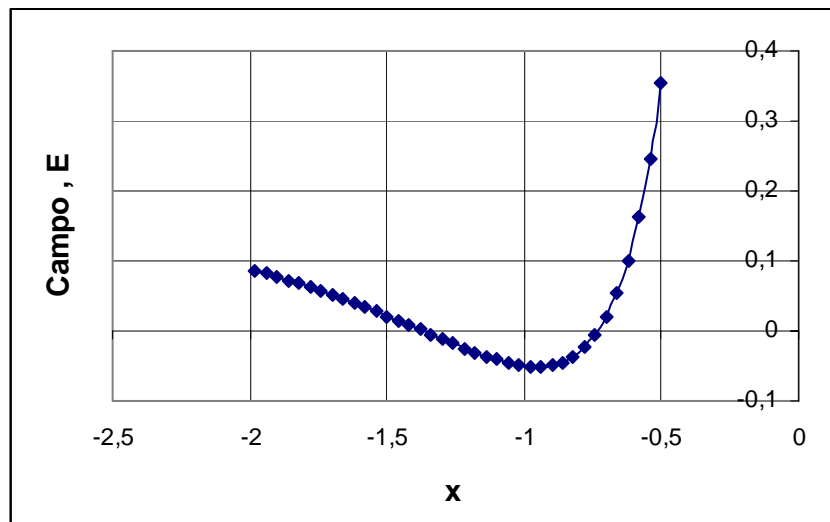


Fig.4

Zona III

$$E_p = E_{-Q} \Rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x-a)^2} \Rightarrow \frac{\lambda}{x} = \frac{1}{2} \frac{Q}{x^2 + a^2 - 2ax} \Rightarrow x^2 + a^2 - 2ax = \frac{xQ}{2\lambda}$$

$$x^2 - x\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right) + a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right) \pm \sqrt{\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right)^2 - 4a^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right) \pm \sqrt{4a^2 + \frac{Q^2}{4\lambda^2} + \frac{2aQ}{\lambda} - 4a^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right) \pm \sqrt{\frac{Q}{\lambda} \left(\frac{Q}{4\lambda} + 2a\right)}}{2}$$

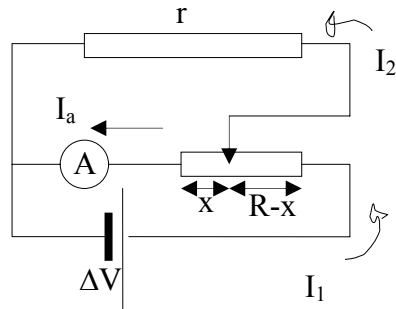
Si $Q = 8a\lambda$ entonces. $x = \frac{6a \pm \sqrt{8a(2a + 2a)}}{2} = \frac{6a \pm a\sqrt{32}}{2} = 3a \pm 2a\sqrt{2}$, existen dos soluciones en la zona III., 5,83 a y 0,17 a.

Si $Q > 8a\lambda$ habrá dos soluciones si

$$\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right)^2 > \frac{Q}{\lambda} \left(\frac{Q}{4\lambda} + 2a\right) \Rightarrow 4a^2 + \frac{Q^2}{4\lambda^2} + \frac{2aQ}{\lambda} > \frac{Q^2}{4\lambda^2} + \frac{2aQ}{\lambda} \Rightarrow 4a^2 > 0$$

Como se cumple la condición, existen dos posiciones en la zona III donde se anula el campo.

112.- En el circuito de la figura inferior A es un amperímetro sin resistencia interna. La resistencia total del reóstato es R y la batería mantiene una diferencia de potencial $\Delta V = 10V$, constante, siendo su resistencia interna despreciable. A) Calcular la intensidad de la corriente I_a que pasa por el amperímetro en función de la posición del cursor sobre el reóstato, b) Dibujar las curvas I_a frente a x cuando $R = 10 \Omega$ y $r = 1\Omega$ y $0,5 \Omega$, c) Calcular matemáticamente cuando la intensidad I_a es mínima.



a) Aplicamos las leyes de Kirchoff a un nudo, a la malla total y a la malla superior. En la figura x representa la resistencia que existe entre un extremo del reóstato y el amperímetro. I_1 la intensidad que pasa por la batería, I_2 la que pasa por la resistencia r y I_a la que pasa por el amperímetro

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_a \\ I_1(R - x) + I_2 r &= \Delta V \\ I_2 r - I_a x &= 0 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación despejamos I_2 y la llevamos a la primera

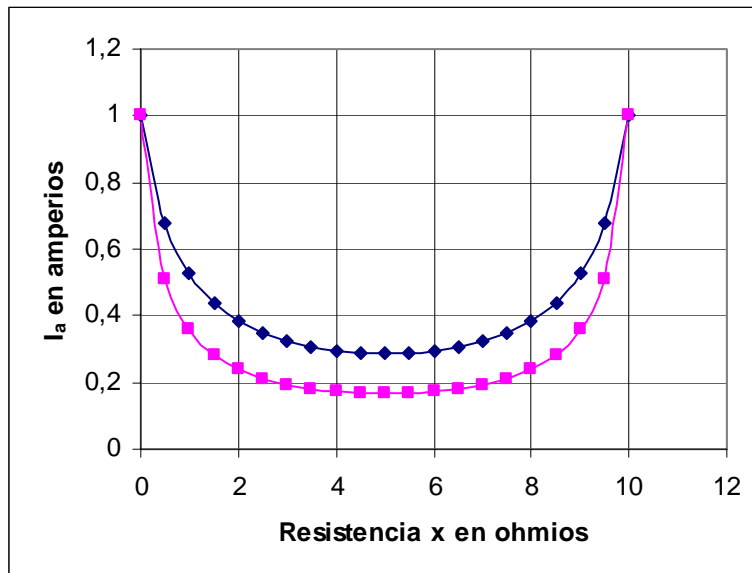
$$I_2 = \frac{I_a x}{r} ; I_1 = \frac{I_a x}{r} + I_a$$

Las dos últimas ecuaciones se combinan con la segunda

$$\begin{aligned} \left(I_a \frac{x}{r} + I_a \right) (R - x) + I_a \frac{x}{r} r &= \Delta V \Rightarrow I_a x \frac{R}{r} - I_a \frac{x^2}{r} + I_a R - I_a x + I_a x = \Delta V \Rightarrow \\ I_a R x - I_a x^2 + I_a R r &= \Delta V \cdot r \Rightarrow I_a = \frac{\Delta V \cdot r}{x(R - x) + R r} \quad (1) \end{aligned}$$

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación (1)

$$I_a = \frac{10}{x(10 - x) + 10} \quad y \quad I_a = \frac{5}{x(10 - x) + 5}$$



c) Las gráficas nos indican que existe un mínimo de corriente,. Para calcular ese mínimo derivamos la ecuación (1) respecto de \$x\$ e igualamos a cero

$$\frac{dI_a}{dx} = \frac{-\Delta V \cdot r(R - 2x)}{[x(R - x) + Rr]^2} = 0 \Rightarrow R - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{2}$$

Cuando el cursor se encuentra justamente en la mitad del reóstato es cuando la intensidad que pasa por el amperímetro es mínima.
