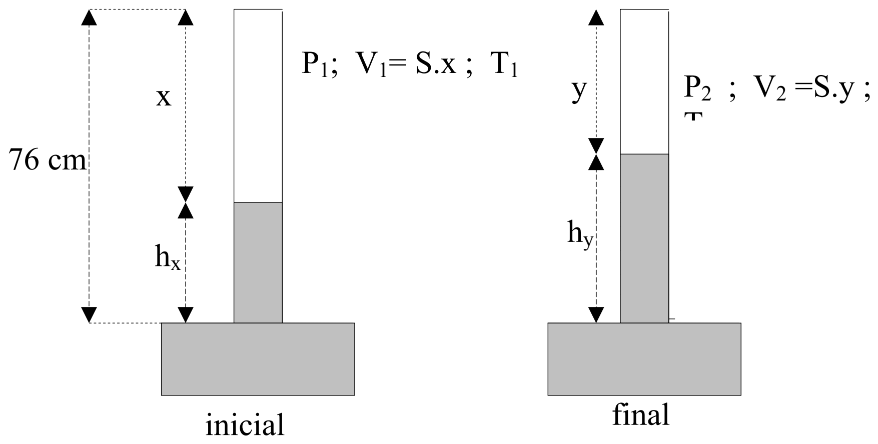
PROBLEMAS VARIADOS 12

113.- Un tubo cilíndrico de sección S y altura 76 cm, está cerrado por un extremo. El tubo está sobre mercurio (densidad ρ) de modo que éste penetra en el tubo hasta una altura h_x. Entre el extremo cerrado del tubo y el nivel del mercurio existen 0,001 mol de un gas ideal cuya capacidad calorífica molar es C_v = 20,5 J/mol K. La presión exterior al tubo equilibra la de una columna de mercurio de 76 cm de altura. Si la temperatura del gas desciende 10ºC ¿cuánto calor cede dicho gas al ambiente?

En la figura 1 se representa la situación inicial y la final



.

De acuerdo con la ecuación de la hidrostática la presión del gas más la de la columna de mercurio es igual a la presión exterior. Lo aplicamos a la situación inicial y final.

$$P_1 + \rho g h_x = P_{atm} = \rho g 76 \ \Rightarrow \ P_1 = \rho g(76 - h_x) = \rho g x$$
$$P_2 + \rho g h_y = P_{atm} = \rho g 76 \ \Rightarrow \ P_2 = \rho g(76 - h_y) = \rho g y$$

Multiplicamos P_1 por V_2 y P_2 por V_1.

$$P_1 V_2 = \rho g x S y \quad ; \quad ; P_2 V_1 = \rho g y S x \ \Rightarrow \quad P_1 V_2 = P_2 V_1 \quad (1)$$

Para un estado intermedio (con presión P y volumen V) entre la situación inicial y la final podemos escribir:

$$P V_1 = P_1 V \quad (2)$$

Aplicamos el primer principio de la termodinámica entre el estado inicial y final.

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow nC_v(T_2 - T_1) = Q + W \Rightarrow \quad Q = nC_v(T_2 - T_1) - W \ (3)$$

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{P_1 V}{V_1}\,dV = -\frac{P_1}{V_1}\int_{V_1}^{V_2} V\,dV = -\frac{P_1}{V_1}\left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}\right) = -\frac{P_1 V_2 \cdot V_2}{2V_1} + \frac{P_1 V_1}{2}$$

En la ecuación anterior sustituimos la (1) y la ecuación de los gases perfectos:

$$W = -\frac{P_2V_1 \cdot V_2}{2V_1} + \frac{P_1V_1}{2} = -nR\frac{T_2}{2} + nR\frac{T_1}{2} = \frac{nR}{2}(T_1 - T_2)$$

Llevando esta ecuación a la (3).

$$Q = nC_V(T_2 - T_1) + \frac{nR}{2}(T_2 - T_1) = n(T_2 - T_1)\left(C_v + \frac{R}{2}\right) = 0{,}001 \cdot (-10)\left(20{,}5 + \frac{8{,}3}{2}\right)$$
$$Q = -0{,}247 \text{ J}$$

114.- Sobre una película transparente de espesor $5{,}2.10^{-7}$ m incide luz blanca con un ángulo de 31º respecto de la normal. El índice de refracción de la película es 1,35. Determinar la longitud de onda de la luz, en la zona del espectro visible (380-780 nm), que no aparece en la luz reflejada.

En la figura 1 se observa que el rayo AB penetra en la película mientras que el rayo DE se refleja. Ambos rayos interfieren debido a que hay diferencia en el camino óptico recorrido por ellos.

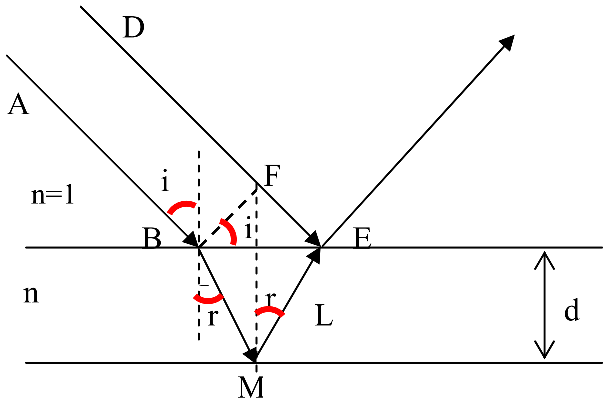


Fig.1

La diferencia de caminos recorrido por los dos rayos es: $2nL - FE + \frac{\lambda}{2}$. En la expresión anterior aparece el termino de media longitud de onda debido a que el rayo DE se refleja en un medio de mayor índice de refracción y eso supone una inversión de fase por lo que es preciso sumar esa media longitud de onda. Se producirá una interferencia destructiva si la diferencia de caminos ópticos es un múltiplo impar de la semilongitud de onda.

$$2nL - FE + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

De la figura 1 se deduce:

$$FE = BE\,\mathrm{sen}\,i \quad ; \quad \mathrm{tag}\,r = \frac{\frac{BE}{2}}{d} \Rightarrow BE = 2\,d\,\mathrm{tag}\,r \quad \Rightarrow \quad FE = 2\,d\,\mathrm{tag}\,r \cdot \mathrm{sen}\,i == 2\,d\frac{\mathrm{sen}\,r}{\cos r}\mathrm{sen}\,i$$

$$\mathrm{sen}\,r = \frac{\frac{BE}{2}}{L} \quad \Rightarrow L = \frac{BE}{2\,\mathrm{sen}\,r} = \frac{2d\,\mathrm{tag}\,r}{2\mathrm{sen}\,r} = \frac{d}{\cos r} = \frac{d}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 r}}$$

Según la ley de Snell: $1 \cdot \mathrm{sen}\,i = n\,\mathrm{sen}\,r \;\Rightarrow\; \mathrm{sen}\,r = \frac{\mathrm{sen}\,i}{n}$, llevando esta ecuación a las dos anteriores:

$$FE = 2d\frac{\frac{\mathrm{sen}\,i}{n}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{sen}^2 i}{n^2}}} \cdot \mathrm{sen}\,i = \frac{2d \cdot \mathrm{sen}^2 i}{\sqrt{n^2 - \mathrm{sen}^2 i}}$$

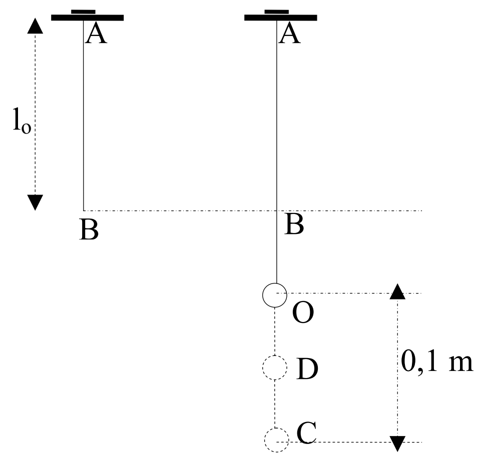
$$L == \frac{d}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{sen}^2 i}{n^2}}} = \frac{d\,n}{\sqrt{n^2 - \mathrm{sen}^2 i}}$$

$$2nL - FE + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2n\frac{d\,n}{\sqrt{n^2-\mathrm{sen}^2 i}} - \frac{2d\,\mathrm{sen}^2 i}{\sqrt{n^2-\mathrm{sen}^2 i}} = \frac{\lambda}{2}(2k+1-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\,d\left(n^2-\mathrm{sen}^2 i\right)}{\sqrt{n^2-\mathrm{sen}^2 i}} = k\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\,d\sqrt{n^2-\mathrm{sen}^2 i}}{k} = \frac{2 \cdot 5{,}2.10^{-7}\sqrt{1{,}35^2-\mathrm{sen}^2 31}}{k} = \frac{1{,}30.10^{-6}}{k}$$

Si en la ecuación anterior damos hacemos k=2, resulta: $\lambda = 6{,}50.10^{-7}$ m = 650 nm
y si hacemos k =3 , resulta : $\lambda = 4{,}33.10^{-7}$ m = 433 nm

115.- Una cuerda elástica que tiene una longitud natural l_o, sigue la ley de Hooke (la fuerza es directamente proporcional al alargamiento).Un extremo de la cuerda está sujeta firmemente en A y en el otro (B) se ha colocado una masa m= 0,2 kg como indica la figura.



La masa m se lleva suavemente hasta que alcanza la posición de equilibrio en O. Después se estira la cuerda hasta la posición C y desde allí se deja en libertad a la masa m y se mide el periodo de oscilación que es T = 2 s.
a) Calcular la constante k de la ley de Hooke para la cuerda
b) La velocidad de la masa m en el D siendo OD =0,05 m
c) El tiempo que emplea la masa m en ir desde C a D
d) La máxima energía cinética de m.
e) Ahora la masa m se lleva hasta el punto A y se deja caer libremente se pide calcular el tiempo que emplea en retornar por primera vez al punto A.

a) El periodo de oscilación de la masa m está relacionado con la constante k y la masa m

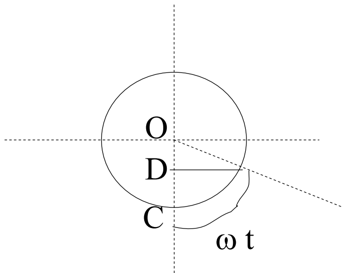
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}2}{2^2} = 1{,}97\,\frac{N}{m}$$

b) En la posición C la velocidad de la masa m es cero y la distancia a O es 0,1 m , por tanto, la ecuación del movimiento armónico que describe la masa m oscilando a uno y otro lado del punto O , es :

x= A cos ωt $= 0{,}1\cos\frac{2\pi}{T}t$ o también $x = 0{,}1\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

En la posición D el ángulo ωt es:



OD= 0,05 m
OC=A =0,1 m
cos ω t =OD/OC=0,05/0,1
ω t =60º

$$v = -0{,}1 \cdot \frac{2\pi}{2} \operatorname{sen} 60^{\circ} = -0{,}27 \frac{m}{s}$$

c)

$$\omega t = 60^{\circ} = \frac{60 \cdot \pi}{180} \text{rad} = \frac{\pi}{3} \text{rad} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{1}{3} s$$

d) La máxima energía cinética ocurre cuando la masa m pase por el punto O de equilibrio y debido a que el sistema es conservativo esa energía cinética es igual a la potencial en el punto C.

$$Ec(O) = Ep(C) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}97 \cdot 0{,}1^2 = 9{,}9.10^{-3} \text{ J}$$

e) Al llevar la masa m al punto A, la cuerda se dobla y la masa m cae libremente desde A hasta el punto B en que la cuerda tienen su longitud natural, a partir de ese lugar la cuerda comienza a estirarse, siguiendo la ley de Hooke, como consecuencia de ello, la masa m empieza a disminuir su energía cinética que se convierte en potencial elástica en la cuerda, esto ocurre hasta que la velocidad de la masa es cero. Si tomamos como referencia de la energía potencial gravitatoria la posición de la masa m cuando su velocidad es cero (punto que designamos con Q) resulta que m en A tiene energía cinética y energía potencial gravitatoria . Designamos con Δx la distancia entre el punto A y la posición en que la masa m tiene velocidad cero.

$$Ec(A) + Ep(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg\,\Delta x = \frac{1}{2} m(2gl_o) + mg\,\Delta x = \frac{1}{2} k(\Delta x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2mgl_0 + 2mg\,\Delta x = k(\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta x^2 - \frac{2mg}{k}\Delta x - \frac{2mgl_0}{k} = 0 \Rightarrow$$

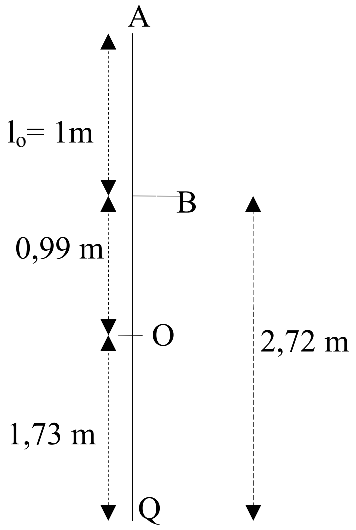
$$\Rightarrow \Delta x^2 - 1{,}99\,\Delta x - 1{,}99 = 0 \Rightarrow \Delta x = 2{,}72\,m$$

La posición del punto O corresponde al lugar en que equilibran el peso de la masa m y la fuerza elástica que sobre ella ejerce la cuerda.

$$mg = k\overline{OA} \Rightarrow \overline{OA} = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}8}{1{,}97} = 0{,}99\,m$$

La masa m cae libremente de A hasta B, luego efectúa un movimiento armónico de periodo T=2 segundos y amplitud 2,72-0,99=1,73 m entre B y Q, sigue con movimiento armónico entre Q y B y finalmente a partir de B se mueve libremente en el campo gravitatorio. El tiempo total en retornar a A es:

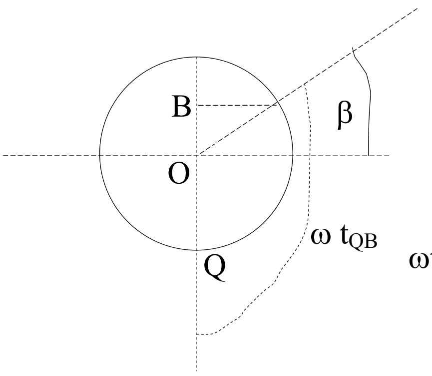
2(tiempo de caída libre desde A a B + tiempo desde B a Q)



Velocidad en Q =0
Velocidad en O, máxima
Velocidad en B= $\sqrt{2gl_o}$

Tiempo desde A hasta B $\quad l_o = \frac{1}{2} g t_{AB}^2 \Rightarrow t_{AB} = \sqrt{\frac{2l_o}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9{,}8}} = 0{,}45\,\mathrm{s}$

El tiempo de B a Q es igual al tiempo desde Q a B
Posición de la masa m en B



OB = 0,99 m
OQ =1,73 m
sen β= OB/OQ=0,99/1,73
β=34,9º

ωt_{QB}=90+34,9=124,9º

$$\omega t_{QB} = 124{,}9^o = 124{,}9 \cdot \frac{\pi}{180} rad = 2{,}18 rad \Rightarrow t_{QB} = \frac{2{,}18}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{2{,}18}{\pi} = 0{,}69\, s$$

Tiempo de retornar a A = 2*(0,45+0,69) = 2,28 s

116.- Dos gases ideales, uno monoatómico y el otro diatómico, están mezclados para formar un gas de comportamiento ideal. La ecuación que rige un proceso adiabático de esta mezcla de gases es : $\mathbf{PV^{\chi}}$***, donde*** $\chi = \frac{11}{7}$***. Sean*** n_1 ***el número de moles del gas monoatómico y*** n_2 ***del gas diatómico en la mezcla. Determinar la relación*** $\frac{n_1}{n_2}$***.***

Imaginemos que los gases están en compartimientos diferentes, separados por un tabique pero a la misma presión P y temperatura T, el gas monoatómico ocupa un volumen V_1 y el diatómico V_2. Luego, se rompe el tabique de separación y los gases se mezclan. Al ser gases de comportamiento ideal el volumen resultante es la suma de V_1+V_2. Designaremos respectivamente los calores específicos de cada gas a volumen y presión constante, como: $C_V(1)$; $C_P(1)$ y $C_V(2)$; $C_P(2)$.

Teniendo en cuenta que la energía interna y la entalpía son magnitudes extensivas, la energía interna de la mezcla es la suma de las energías internas de cada gas y la entalpía es la suma de las entalpías de cada gas.

P, V_1, T, n_1	P, V_2, T , n_2	→	P, V_1+V_2, T , n_1+n_2
U_1, H_1, $C_V(1)$	U_2,H_2, $C_V(2)$		U_M, H_M, $C_V(M)$

Fig.1

La energía interna de cada uno de los gases es:

$$U_1 = n_1 C_V(1)\cdot(T-T_o) \;\; ; \;\; U_2 = n_2 C_V(2)\cdot(T-T_o)$$

Siendo T , la temperatura del gas y T_o la temperatura de referencia a la cual se la da el valor nulo a la energía interna .
Designando como $C_V(M)$ al calor específico a volumen constante de la mezcla y con U_M a su energía interna, resulta:

$$U_M = (n_1 + n_2)C_V(M)\cdot(T-T_0)$$

$$n_1 C_V(1)\cdot(T-T_o) + n_2 C_V(2)\cdot(T-T_o) = (n_1+n_2)C_V(M)\cdot(T-T_o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_V(M) = \frac{n_1 C_V(1) + n_2 C_V(2)}{n_1+n_2} \qquad (1)$$

La entalpía de cada uno de los gases es:

$$H_1 = n_1 C_P(1)\cdot(T-T_X) \;\; ; \;\; H_2 = n_2 C_P(2)\cdot(T-T_X)$$

Siendo T , la temperatura del gas y T_X la temperatura de referencia a la cual se la da el valor nulo de la entalpía. Designamos con $C_P(M)$ al calor específico a presión constante de la mezcla.

La entalpía de la mezcla $H_M = (n_1 + n_2) C_P(M) \cdot (T - T_X)$

$$n_1 C_P(1) \cdot (T - T_X) + n_2 C_P(2) \cdot (T - T_X) = (n_1 + n_2) C_P(M) \cdot (T - T_X) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_P(M) = \frac{n_1 C_P(1) + n_2 C_P(2)}{n_1 + n_2} \quad (2)$$

Dividiendo la ecuación (2) por la (1)

$$\frac{C_P(M)}{C_V(M)} = \chi = \frac{11}{7} = \frac{n_1 C_P(1) + n_2 C_P(2)}{n_1 C_V(1) + n_2 C_V(2)} \quad (3)$$

Para los gases ideales se cumple: $C_P - C_V = R$, y además para los gases monoatómicos

$C_V = \frac{3}{2}R$ y para los diatómicos, $C_V = \frac{5}{2}R$, por lo que la ecuación (3) queda así:

$$\frac{C_P(M)}{C_V(M)} = \chi = \frac{11}{7} = \frac{n_1 C_P(1) + n_2 C_P(2)}{n_1 C_V(1) + n_2 C_V(2)} = \frac{n_1 R + n_1 C_V(1) + n_2 R + n_2 C_V(2)}{n_1 C_V(1) + n_2 C_V(2)} \Rightarrow$$
$$\frac{11}{7} = \frac{n_1 R + n_1 \frac{3}{2}R + n_2 R + n_2 \frac{5}{2}R}{n_1 \frac{3}{2}R + n_2 \frac{5}{2}R} = \frac{n_1 \frac{5}{2} + n_2 \frac{7}{2}}{n_1 \frac{3}{2} + n_2 \frac{5}{2}} = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{7}{2}}{\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{2}} \Rightarrow$$
$$\frac{11}{7} = \frac{5\frac{n_1}{n_2} + 7}{3\frac{n_1}{n_2} + 5} \quad \Rightarrow \quad 33\frac{n_1}{n_2} + 55 = 35\frac{n_1}{n_2} + 49 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{n_2} = 3$$

117.-La punta de un cono con un ángulo 2α se examina con una lente convergente de distancia focal imagen f´, situado a la distancia a. El eje principal de la lente coincide con el eje de simetría del cono. Calcular el ángulo bajo el cual se ve el del cono a través de la lente.

En la figura 1se hace una imagen esquemática del problema

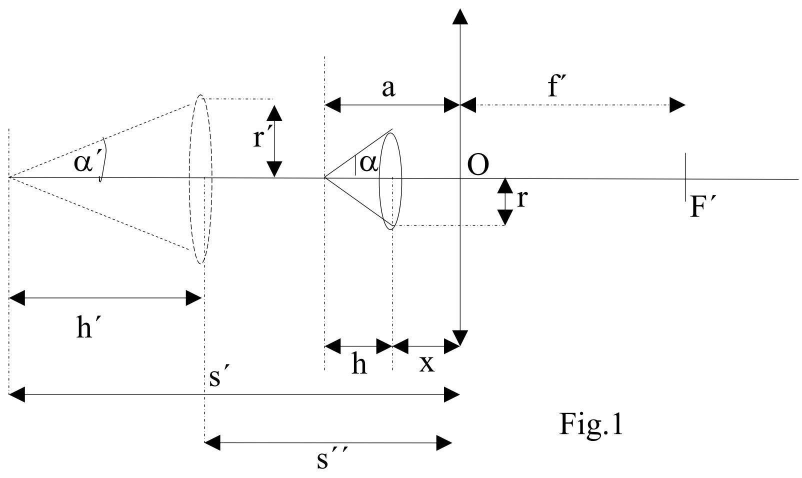


Fig.1

La altura del cono se designa por h y el radio del círculo por r. El centro de la base del cono dista, en valor absoluto, x de la lente, siendo x= a-h La imagen de la punta del cono dista, en valor absoluto de la lente, s´ y el centro de la base s´´. Por r´ se designa al radio de la imagen del cono y por h´ su altura.
Utilizamos como criterio de signos que el punto O es el origen de las medidas y las distancias de O a la izquierda son negativas y a la derecha positivas, según este criterio la ecuación de las lentes delgadas se escribe:

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$$

Imagen de la punta del cono

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \quad \frac{1}{f'}+\frac{1}{a}=\frac{1}{s'} \Rightarrow \quad s'=\frac{f'a}{a+f'}$$

Imagen del centro de la base del cono

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{s''}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \quad \frac{1}{f'}+\frac{1}{x}=\frac{1}{s''} \Rightarrow \quad s''=\frac{f'x}{x+f'}$$

$$h'=s'-s''=\frac{f'a}{a+f'}-\frac{f'x}{x+f'}=\frac{f'ax+f'^2a-f'ax-f'^2x}{(a+f')(x+f')}=\frac{f'^2(a-x)}{(a+f')(x+f)}$$

$$\frac{r'}{s''}=\frac{r}{x} \Rightarrow \quad r'=\frac{r\,s''}{x}=\frac{r\,f'}{x+f'}$$

La tangente del ángulo α' vale:

$$\operatorname{tag}\alpha' = \frac{r'}{h'} = \frac{\dfrac{r f'}{x+f'}}{\dfrac{f'^2(a-x)}{(a+f')(x+f')}} = \frac{r f'(a+f')(x+f')}{f'^2(a-x)(x+f')} = \frac{r f'(a+f')}{f'^2(a-x)} = \frac{r(a+f')}{f'\ (a-x)}$$

Sustituimos x por a-h

$$\operatorname{tag}\alpha' = \frac{r'}{h'} = \frac{r(a+f')}{f'\ (a-x)} = \frac{r(a+f')}{f(a-a+h)} = \frac{r(a+f')}{f'h} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\alpha' = \left(\frac{a}{f'}+1\right)\operatorname{tag}\alpha'$$

118.-Desde una altura h sobre el suelo y en dirección horizontal se lanzan simultáneamente dos cuerpos con velocidades v_1 y v_2. El primero hacia la derecha y el segundo hacia al izquierda. Calcular la distancia entre ambos cuerpos cuando sus vectores velocidad sean perpendiculares entre sí.

Tomando los ejes X e Y sobre el suelo, las ecuaciones de los cuerpos son

$$x_1 = v_1 t \quad y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v(1)_X = \frac{dx_1}{dt} = v_1 \quad ; v(2)_Y = -gt$$

$$x_2 = -v_2 t \quad y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v(2)_X = \frac{dx_1}{dt} = -v_2 \quad ; v(2)_Y = -gt$$

Escribimos los vectores velocidad de cada cuerpo en función de los vectores unitarios sobre los ejes:

$$\vec{v}(1) = v_1\vec{i} - gt\,\vec{j} \qquad ; \qquad \vec{v}(2) = -v_2\vec{i} - gt\,\vec{j}$$

Si los vectores velocidad son perpendiculares su producto escalar es nulo, lo que sucederá en un instante t_p.

$$\vec{v}(1)\cdot\vec{v}(2) = 0 = v_1 v_2 - g^2 t_P^2 \quad \Rightarrow \quad t_P = \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g}$$

Llevamos el instante t_P , a las ecuaciones de las posiciones en la dirección del eje X de los cuerpos y restándolas calculamos la distancia entre ellos.

$$\Delta x = x_1(t_P) - x_2(t_P) = v_1\frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} - \left(-v_2\frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g}\right) = \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g}(v_1+v_2)$$