PROBLEMAS VARIADOS 15

128.-Un cohete posee una masa inicial m_o constituida por el armazón del cohete y el combustible. Se dispara en posición vertical. El combustible se consume de forma constante a razón de $\rho = dm/dt$ y se expele con una velocidad constante u con relación al cohete. Si se desprecia la resistencia del aire encontrar la expresión de la velocidad del cohete en un tiempo t después de la salida.

El problema se resuelve mediante la aplicación del principio según el cual, el impulso mecánico es igual a la variación de la cantidad de movimiento.

En un tiempo t después de la salida del cohete la masa del cohete es: m_o-ρt y posee una velocidad v. Transcurrido un incremento de tiempo Δt se expulsa una masa de combustible Δm con velocidad u respecto del cohete. El cohete tiene ahora una masa m_o-ρt -ρΔt y adquiere una velocidad v+Δv

1) Cantidad de movimiento del cohete: $(m_0 - \rho t)v$

2) Impulso de la fuerza peso sobre el cohete: $-(m_0 - \rho t)g\,\Delta t$

3) Cantidad de movimiento del cohete inmediatamente después de la expulsión

$$(m_o - \rho t - \rho \Delta t)(v + \Delta v)$$

4) Cantidad de movimiento de la masa expulsada: $-\Delta m\, v_e = -\rho\,\Delta t(u - v)$

Como sobre el sistema cohete-combustible las fuerzas que se producen en la combustión de los gases son interiores al sistema, entonces el momento lineal total del mismo permanece constante.

$$(m_0 - \rho t)v - (m_0 - \rho t)g\ \Delta t = (m_0 - \rho t - \rho \Delta t)(v + \Delta v) - \rho\,\Delta t(u - v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_0 - \rho t)v - (m_0 - \rho t)g\ \Delta t = (m_0 - \rho t)v + (m_0 - \rho t)\Delta v - \rho\,\Delta t\, v - \rho\,\Delta t\,\Delta v - \rho\,\Delta t\, u + \rho\,\Delta t\, v \Rightarrow \text{Si} \qquad \Delta t$$

$$\Rightarrow -(m_0 - \rho t)g\ \Delta t = (m_0 - \rho t)\Delta v - \rho\,\Delta t\, u \Rightarrow -g = \frac{\Delta v}{\Delta t} - \frac{\rho u}{m_0 - \rho t}$$

tiende a cero, separamos variables e integramos

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(-g + \frac{\rho u}{m_o - \rho t}\right)dt = -gt + \frac{\rho u}{-\rho}\left[\ln(m_o - \rho t) - \ln m_o\right] \ \Rightarrow \quad v = u \ln\frac{m_o}{m_o - \rho t} - gt$$

La manera anterior resulta tediosa de realizar, por lo que resulta más rápido utilizar la ecuación general para un sistema de masa variable.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Si la aplicamos al caso del cohete y consideramos la vertical dirigida hacia arriba como positiva, tenemos que la masa al cabo de un tiempo t es:

m_o-ρ t, $\vec{F}$ es la fuerza exterior F =-(m_o-ρ t) g , la velocidad $\vec{u}$ es –u y $\frac{dm}{dt} = -\rho$

el signo menos de este cociente es debido a que el sistema pierde masa, en el caso de que la ganase sería positivo.

$$(m_o - \rho t)\frac{dv}{dt} = -(m_o - \rho t)g + u\rho \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t \left[-g + \frac{u\rho}{m_o - \rho t} \right] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = u \ln \frac{m_o}{m_o - \rho t} - gt$$

129.-Un vagón cargado de arena tiene una masa total M en el instante inicial, y se desplaza por una vía mediante la acción de una fuerza constante F con dirección horizontal. El vagón suelta arena debido a un orificio que existe en el fondo del mismo, siendo Δm la cantidad evacuada por unidad de tiempo. En el instante t=0, la velocidad del vagón es nula. Hállese la velocidad y aceleración del vagón en función del tiempo.

Utilizamos la ecuación para un sistema de masa variable. $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt}$. Al cabo de un tiempo t de iniciado el movimiento, la masa del vagón es M- Δm t, la fuerza exterior es F y u, la velocidad de la arena respecto del vagón, es nula, por ir en él.

$$(M - \Delta m\, t)\frac{dv}{dt} = F \Rightarrow \int dv = \int \frac{F}{M - \Delta m\, t} dt \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{F}{\Delta m}\ln(M - \Delta m\, t) + Cte$$

Cuando t=0 , v=0

$$0 = -\frac{F}{\Delta m}\ln M + cte \Leftarrow Cte = \frac{F}{\Delta m}\ln M$$

$$v = -\frac{F}{\Delta m}\ln(M - \Delta m\, t) + \frac{F}{\Delta m}\ln M \quad \Rightarrow \quad v = \frac{F}{\Delta m}\ln\frac{M}{M - \Delta m\, t}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{\Delta m}\left[\frac{1}{\frac{M}{M - \Delta m\, t}} \cdot \left(\frac{-M(-\Delta m)}{(M - \Delta m\, t)^2} \right) \right] = F\left(\frac{1}{M - \Delta m\, t} \right)$$

130.-Calcular la energía almacenada en el campo eléctrico creado por una esfera de radio R y carga Q. La carga está distribuida de forma homogénea por toda la esfera.

La energía almacenada en un campo eléctrico está dada por la ecuación:

$$U = \frac{\varepsilon_o}{2}\int E^2 dV$$

La integral debe calcularse en todo el espacio en el que exista campo eléctrico..
Para el caso de la esfera dividimos el campo creado por ella en dos partes, una la que corresponde al espacio exterior a la esfera, y otra al interior de ella.

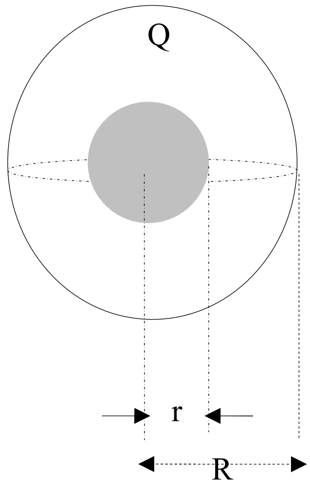
Para calcular el campo exterior aplicamos el teorema de Gauss
Consideramos una esfera de radio r>R concéntrica con la esfera que contiene la carga Q. El teorema de Gauss expresado en forma matemática es:

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_o}$$

En nuestro caso $\sum q = Q$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \;\Rightarrow\; E_e \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \;\Rightarrow\; E_e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}$$

Para calcular el campo en el interior de la esfera de radio R hacemos uso del teorema de Gauss



Consideramos una esfera concéntrica con la que tiene la carga Q de radio $r<R$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \;\Rightarrow\; E_i \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\varepsilon_o}$$

Q´ es la carga contenida en la esfera de radio r. Teniendo presente que la distribución de carga es homogénea, la densidad volumétrica de carga es la misma en la esfera de radio R que en la de radio r.

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \;\Rightarrow\; Q' = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$E_i = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Q\frac{r^3}{R^3}}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad\Rightarrow\qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

Calculamos la energía almacenada en el campo exterior a la esfera.

$$U_e = \frac{\varepsilon_o}{2}\int E^2 dV = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{R}\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad U_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R}$$

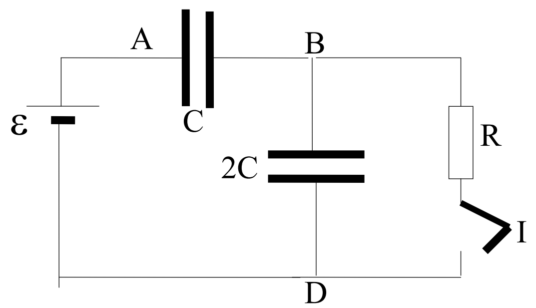
Calculamos la energía almacenada en el campo interior a la esfera.

$$U_i = \frac{\varepsilon_o}{2}\int E^2 dV = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_0^R \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^6}\int_o^R r^4 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^6}\left[\frac{R^5}{5} - \frac{0}{5}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U_i = \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R}$$

$$U_{total} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R} + \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_o R} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o R}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_o R}$$

131.-Calcular la energía calorífica que se desprende en la resistencia R al cerrar el interruptor I.



La fuerza electromotriz de la batería es ε y su resistencia interna es despreciable.

Cuando el interruptor I está abierto los dos condensadores están acoplados en serie con la batería y almacenan la siguiente energía:

$$E = \frac{1}{2}C_E\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\frac{C\cdot 2C}{C+2C}\varepsilon^2 = \frac{C\varepsilon^2}{3}$$

Designamos con q a la carga de cada condensador y las diferencias de potencial entre sus bornes son:

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} \;;\; 2C = \frac{q}{V_B - V_D} \Rightarrow (V_A - V_B) + (V_B - V_D) = \varepsilon = \frac{q}{C} + \frac{q}{2C} \Rightarrow q = \frac{2C\varepsilon}{3}$$

$$V_A - V_B = \frac{q}{C} = \frac{\frac{2C\varepsilon}{3}}{C} = \frac{2}{3}\varepsilon \quad ; V_B - V_D = \frac{q}{2C} = \frac{\frac{2C\varepsilon}{3}}{2C} = \frac{1}{3}\varepsilon$$

Al cerrar el interruptor I comienza a circular corriente por la resistencia R y este fenómeno dura hasta que la diferencia de potencial V_B-V_D se anule, y cuando ocurra esta anulación, el condensador 2C estará descargado, ya que no existe diferencia de potencial entre sus bornes. Ahora la caída de tensión ε está entre los bornes del condensador C, con lo que su nueva carga es $q_1 = C\varepsilon$.
Durante este proceso la batería ha aportado un trabajo:

$$W = (q_1 - q)\varepsilon = \left(C\varepsilon - \frac{2C\varepsilon}{3}\right)\varepsilon = \frac{C\varepsilon^2}{3}$$

La energía almacena en los condensadores es la que posee el condensador C

$$E_1 = \frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

La diferencia de energía entre la situación inicial (I abierto) a la final (I cerrado) es:

$$\frac{1}{2}C\varepsilon^2 - \frac{1}{3}C\varepsilon^2 = \frac{C\varepsilon^2}{6}$$

Dado que la batería ha aportado una energía, el exceso de energía que no está en los condensadores se ha disipado en la resistencia R

$$Q = \frac{C\varepsilon^2}{3} - \frac{C\varepsilon^2}{6} = \frac{C\varepsilon^2}{6}$$

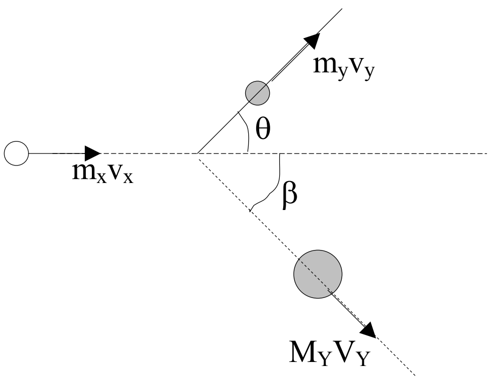
132.-Calcular el valor de Q para la reacción nuclear $^{14}N(\alpha,p)^{17}O$, sabiendo que la energía inicial de la partícula incidente vale 4,00 MeV y el protón formó con la dirección de la partícula incidente un ángulo de 60º con una energía cinética de 2,09 MeV.

Vamos a deducir la formula general utilizando la nomenclatura más habitual para una reacción nuclear

$$x + X \rightarrow y + Y$$

La partícula incidente es x, el núcleo que hace de blanco es X (admitimos como ocurre con frecuencia que está en reposo), y, es la partícula resultante de la reacción e Y es el nuevo núcleo formado. T_x , T_y y T_Y son las energías cinéticas clásicas .

El proceso puede representarse gráficamente



Aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$m_x v_x = m_y v_y \cos\theta + M_Y V_Y \cos\beta$$
$$m_y v_y \operatorname{sen}\theta = M_Y V_Y \operatorname{sen}\beta$$

Eliminamos el término que contiene el ángulo β.

$$m_x^2 v_x^2 + m_y^2 v_y^2 \cos^2\theta - 2m_x m_y v_x v_y \cos\theta = M_Y^2 V_Y^2 \cos^2\beta$$
$$m_y^2 v_y^2 \operatorname{sen}^2\theta = M_Y^2 V_Y^2 \operatorname{sen}^2\beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad M_Y^2 V_Y^2 = m_x^2 v_x^2 + m_y^2 v_y^2 - 2m_x m_y v_x v_y \cos\theta$$

Introducimos en la ecuación anterior las energías cinéticas en sentido clásico.

$$T_x = \frac{1}{2} m_x v_x^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2T_x}{m_x}} \; ; \; T_y = \frac{1}{2} m_y v_y^2 \Rightarrow v_y = \sqrt{\frac{2T_y}{m_x}} \; ; \; T_x = \frac{1}{2} M_Y V_Y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_Y = \sqrt{\frac{2T_Y}{M_Y}}$$

$$M_Y^2 \frac{2T_Y}{M_Y} = m_x^2 \frac{2T_x}{m_x} + m_y^2 \frac{2T_y}{m_y} - 2m_x m_y \sqrt{\frac{2T_x}{m_x}} \cdot \sqrt{\frac{2T_y}{m_y}} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 2M_Y T_Y = 2m_x T_x + 2m_y T_y - 4\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_Y = T_x \frac{m_x}{M_Y} + T_y \frac{m_y}{M_Y} - \frac{2\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta}{M_y}$$

El valor de Q para las reacciones nucleares es:

$$Q = T_Y + T_y - T_x = T_x \frac{m_x}{M_Y} + T_y \frac{m_y}{M_Y} - \frac{2\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta}{M_Y} + T_y - T_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = T_y \left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - T_x \left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta}{M_Y} \quad (1)$$

Cuando se aplica esta ecuación se utilizan los valores de los números másicos en lugar de las masas nucleares, ya que el error que puede cometerse es pequeño y se facilitan los cálculos.
En el problema propuesto x es la partícula alfa, y es el protón e Y es el núcleo de oxígeno. Basta sustituir los valores numéricos en la ecuación (1) para hallar Q

$$Q = 2{,}09\left(1 + \frac{1}{17}\right) - 4{,}00\left(1 - \frac{4}{17}\right) - 2\sqrt{\frac{4}{17} \cdot \frac{1}{17} \cdot 4{,}00 \cdot 2{,}09} \cdot \cos 60^{o} = -1{,}2 \text{ MeV}$$

133.-Unos protones con energía cinética 1,0 MeV bombardean un blanco de litio en reposo dando como resultado una reacción nuclear en la que se producen dos partículas alfa, las cuales forman con la dirección de los protones ángulos iguales. Calcular la energía de las partículas alfa y el ángulo que forman entre sí.
Datos: masa del protón=1,007825 u, masa de la partícula alfa = 4,00260 u , masa del núcleo de litio = 7,0160048 u, velocidad de la luz c= 2,998.10^{8} m/s, 1 u = 1,66.10^{-27} kg, carga del electrón 1,60.10^{-19} C.

El valor de Q para una reacción nuclear se puede expresar mediante la diferencia de masas. La reacción nuclear propuesta es la siguiente

$$p + {}^{7}Li \rightarrow 2 \; {}^{4}He$$

$$Q=\left[\left(M_{protón}+M_{Litio}\right)-2\,Masa\,\alpha\right]c^2=\left(1{,}007825+7{,}00160048-2\cdot 4{,}002603\right)c^2$$

$$Q=-0{,}0186\,u.\left(2{,}998.10^8\right)^2=-0{,}0186u\cdot\frac{1{,}66.10^{-27}\,kg}{1u}\cdot\left(2{,}998.10^8\right)^2=-2{,}78.10^{-12}\,J$$

$$Q=-2{,}78.10^{-12}\,J\cdot\frac{1eV}{1{,}60.10^{-19}\,J}=-1{,}74.10^7\,eV=-17{,}4\,MeV$$

También Q es la diferencia de energías

$$-17{,}4=T_{protón}-2T_\alpha\;\Rightarrow\;-18{,}4=-2\cdot T_\alpha\quad\Rightarrow T_\alpha=9{,}2\,MeV$$

Aplicamos el principio de la conservación de la cantidad de movimiento

$$m_p v_p=2m_\alpha v_\alpha\cos\theta\quad\Rightarrow\quad m_p\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 1}{m_p}}=2\,m_\alpha\cdot\sqrt{\frac{2.9{,}2}{m_\alpha}}\cos\theta\;\Rightarrow\;2m_p=8\cdot 9{,}2\,m_\alpha\cos^2\theta$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{m_p}{4\cdot 9{,}2\cdot m_\alpha}}=\sqrt{\frac{1{,}007825}{4\cdot 9{,}2\cdot 4{,}002603}}=0{,}083\;\Rightarrow\;\theta=85{,}3^{o}$$

El ángulo que forman entre sí las dos partículas alfa es: 2*85,3 =170,5º

134.-Un mesón π^+ en reposo se desintegró en un muón μ^+ y un neutrino. Determinar la energía cinética del muón y del neutrino.
Datos .Masas de las partículas: π^+=139,6 MeV/c²; μ^+=105,7 MeV/c²; neutrino =0.

Teniendo en cuenta que el mesón se desintegra desde el reposo, las otras dos partículas deben salir en direcciones opuestas y con el mismo momento lineal, al cual designamos con p.
La conservación de la energía nos dice que

$$E_\pi=E_\mu+E_\nu$$

Teniendo presente la relación relativista $E^2=p^2c^2+m^2c^4$, escribimos:

$$m_\pi c^2=\sqrt{p^2c^2+m_\mu^2c^4}+pc\Rightarrow\left(m_\pi c^2-pc\right)^2=p^2c^2+m_\mu^2c^4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_\pi^2c^4+p^2c^2-2\,m_\pi pc^3=p^2c^2+m_\mu^2c^4\Rightarrow m_\pi^2c^4-2\,m_\pi pc^3=m_\mu^2c^4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p=\frac{c\left(m_\pi^2-m_\mu^2\right)}{2m_\pi}$$

La energía del neutrino es:

$$E_\nu = pc = \frac{c^2\left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right)}{2m_\pi} = \frac{c^2\left[\left(139{,}6\dfrac{\text{MeV}}{c^2}\right)^2 - \left(105{,}7\dfrac{\text{MeV}}{c^2}\right)^2\right]}{2\cdot 139{,}6\dfrac{\text{MeV}}{c^2}}$$

$$E_\nu = \frac{139{,}6^2 - 105{,}7^2}{279{,}2}\frac{\dfrac{(\text{MeV})^2}{c^2}}{\dfrac{\text{MeV}}{c^2}} = 29{,}8\,\text{MeV}$$

La energía del muón es:

$$E_\mu = E_\pi - 29{,}8 \Rightarrow m_\mu c^2 + T_\mu = m_\pi c^2 - 29{,}8 \Rightarrow T_\mu = c^2\left(m_\pi - m_\mu\right) - 29{,}8$$
$$T_\mu = 139{,}6 - 105{,}7 - 29{,}8 = 4{,}1\ \text{MeV}$$

135.-Determinar la energía umbral necesaria para crear un antiprotón mediante la reacción: $p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$.
Realizar el mismo cálculo para la reacción: $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$
Datos: Masa del protón y antiprotón = 938,26 MeV/c²; masa del pión = 135,0 MeV/c².

En estas reacciones entre partículas un protón actúa como proyectil dotado de energía cinética y momento y el otro está en reposo. En el sistema de referencia del protón en reposo la energía inicial es

$$E_L = m_p c^2 + T + m_p c^2$$

Siendo m_p la masa del protón en reposo y T la energía cinética del protón que actúa como proyectil.
En el sistema de referencia del centro de masas los dos protones tienen momento nulo y dado que se pide la energía umbral (mínima) los cuatro protones deben estar en reposo siendo su energía

$$E_{cm} = 4m_p c^2$$

Hacemos uso del invariante relativista $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, donde E y p son la energía y el impuso totales antes de la colisión y m la masa en reposo de la/s partícula/s que se forman

$$E_L^2 - p^2c^2 = E_{cm}^2 \;\Rightarrow\; \left(2m_p c^2 + T\right)^2 - p^2c^2 = 16m_p^2c^4 \quad (1)$$

La energía del protón que actúa como proyectil

$$E_p^2 = p^2c^2 + m_p^2c^4 \;\Rightarrow\; p^2c^2 = E_p^2 - m_p^2c^4 \;\Rightarrow\; p^2c^2 = \left(m_p c^2 + T\right)^2 - m_p^2c^4$$

Combinando esta ecuación con la (1), resulta:

$$\left(2m_p c^2 + T^2\right)^2 - \left[\left(m_p c^2 + T\right)^2 - m_p^2c^4\right] = 16m_p^2c^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4m_p^2c^4 + T^2 + 4Tm_p c^2 - \left(m_p^2c^4 + T^2 + 2Tm_p c^2 - m_p^2c^4\right) = 16m_p^2c^4 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2Tm_p c^2 = 12m_p^2c^4 \;\Rightarrow\; T = 6m_p c^2 = 6\cdot 938{,}26\frac{\text{MeV}}{c^2}\cdot c^2 = 5{,}63.10^3\,\text{MeV}$$

Para la segunda reacción el procedimiento a seguir es el mismo

Ahora $E_{cm} = \left(2m_p + m_\pi\right)c^2$

$$4m_p^2c^4 + T^2 + 4Tm_pc^2 - \left(m_p^2c^4 + T^2 + 2Tm_pc^2 - m_p^2c^4\right) = \left(2m_p + m_\pi\right)^2 c^4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 4m_p^2c^4 + 2Tm_pc^2 = \left(2m_p + m_\pi\right)^2 c^4 \Rightarrow 2Tm_p = \left(2m_p + m_\pi\right)^2 c^2 - 4m_p^2c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{4m_p^2 + m_\pi^2 + 4m_pm_\pi - 4m_p^2}{2m_p} \cdot c^2 = \frac{m_\pi\left(m_\pi + 4m_p\right)}{2m_p} \cdot c^2 \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{135{,}0\left(135{,}0 + 4 \cdot 938{,}26\right)}{2 \cdot 938{,}26} = 280\,\mathrm{MeV}$$