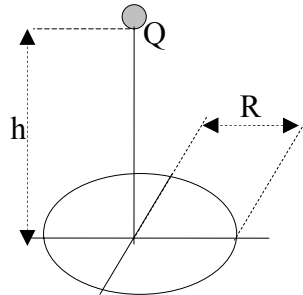


## PROBLEMAS VARIADOS 16

**136.-** Una carga puntual  $Q$  dista del centro de un círculo de radio  $R$  una distancia  $h$ . Calcular el flujo eléctrico que atraviesa la superficie circular.



Por definición el flujo eléctrico que atraviesa una superficie es:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow d\Phi = E dS \cos\theta$$

El módulo del campo eléctrico creado por una carga puntual

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Sobre el círculo escogemos una superficie  $dS$  tal que toda ella diste  $r$  de la carga  $Q$  y esa superficie debe ser una corona circular de radio  $\rho$ , tal como se indica en la figura 1.

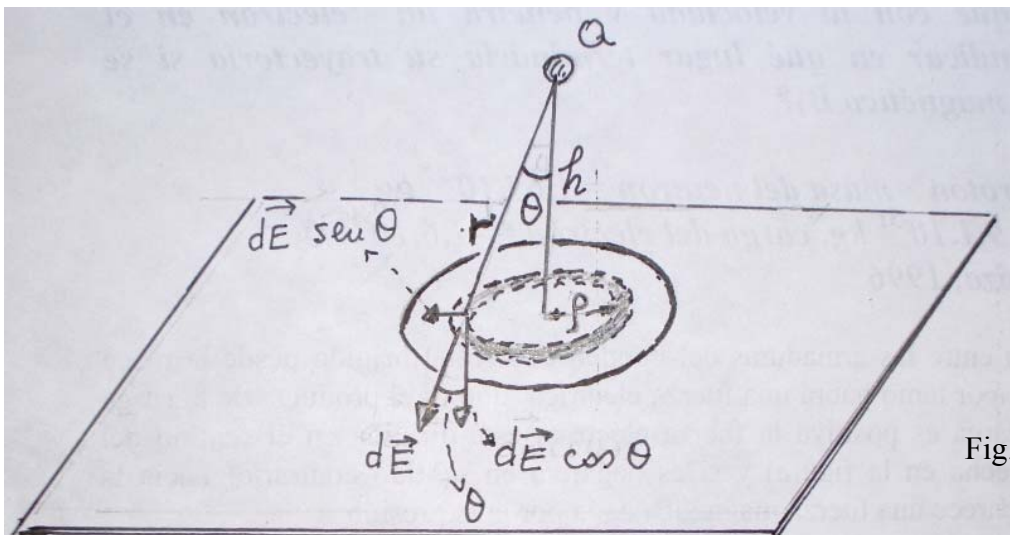


Fig. 1

Toda la corona circular dista  $r$  de la carga formando un ángulo  $\theta$  con la vertical. El vector campo es  $d\vec{E}$  y tiene dos componentes, una de ellas, perpendicular al círculo y la otra en el plano del círculo. La componente perpendicular es la que contribuye al flujo ya que el ángulo con la superficie de la corona es  $0^\circ$ .

El flujo que atraviesa la corona de radio  $\rho$  es:

$$d\Phi = E \cdot \cos\theta \cdot \text{superficie de la corona} = E \cdot \cos\theta \cdot 2\pi\rho d\rho$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h^2 + \rho^2} ; \quad \cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \rho^2}}$$

Sustituyendo los dos valores en la ecuación del flujo

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h^2 + \rho^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} \cdot 2\pi\rho d\rho = \frac{Qh}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\rho d\rho}{(h^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para calcular el flujo total a través de todo el círculo se integra la expresión anterior

$$\Phi = \frac{Qh}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(h^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Para calcular la integral hacemos el cambio de variable siguiente:

$$h^2 + \rho^2 = u^2 \Rightarrow 2\rho d\rho = 2u du$$

Con este cambio de variable resolvemos la integral siguiente:

$$\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(h^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^R \frac{u du}{u^3} = -\frac{1}{u} \Big|_0^R = -\frac{1}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} \Big|_0^R = -\frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} + \frac{1}{h}$$

La ecuación (1) queda

$$\Phi = \frac{Qh}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right) = \frac{Q}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right)$$

**137.-Calcular la distancia entre los máximos de las franjas de interferencia producidas por una fuente de luz de longitud de onda 550 nm, colocada a b=20 cm de un biprisma de Fresnel, de índice de refracción n=1,46 y ángulo  $\alpha = 2^\circ$ . La distancia del prisma a la pantalla es de D = 2m.**

En la figura 1 se ha hecho un esquema (no a escala) en el que se destaca la marcha de los rayos desde los focos virtuales S<sub>1</sub> y S<sub>2</sub>. La distancia S<sub>1</sub>S<sub>2</sub> = a. En la pantalla se ha elegido un punto arbitrario A. Si la diferencia de marcha d<sub>2</sub>-d<sub>1</sub> es un múltiplo entero de la longitud de onda, en A se producirá un máximo.

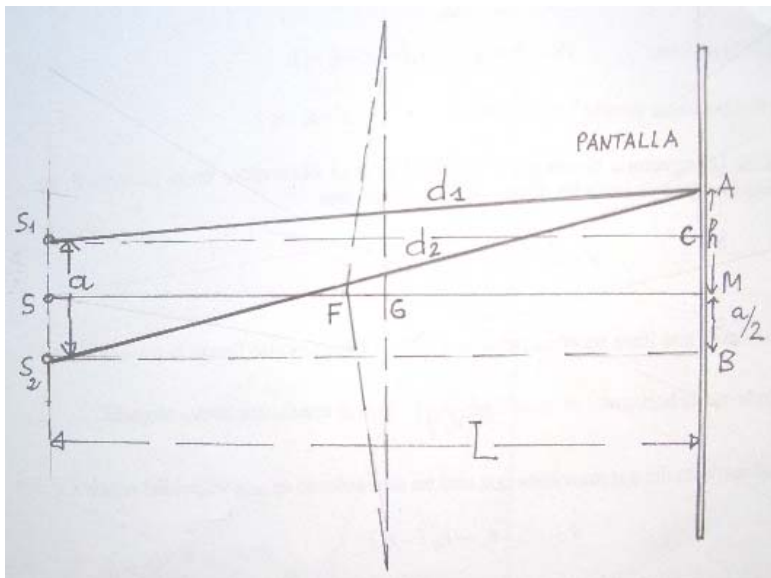


Fig.1

De la figura 1 se deduce:

$$d_2^2 = L^2 + \left(h + \frac{a}{2}\right)^2 ; d_1^2 = L^2 + \left(h - \frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow d_2^2 - d_1^2 = a h \Rightarrow (d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2 a h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 - d_1 = \frac{2 a h}{(d_2 + d_1)} = m \lambda \quad \Rightarrow \quad h = \frac{m \lambda (d_2 + d_1)}{2 a}$$

En la ecuación anterior se puede sustituir  $d_2 + d_1$  por  $2 L = 2 (D + b)$

$$h = \frac{m \lambda (D + b)}{a} \quad (1)$$

Para obtener  $h$  es preciso conocer  $a$ , esto es, la distancia entre los focos virtuales  $S_1$  y  $S_2$ .

En la figura 2 se ha hecho un esquema en la que se contempla la mitad superior de un biprisma de Fresnel. Para poder hacer el dibujo, el ángulo del prisma se ha hecho de  $20^\circ$  en lugar de los  $2^\circ$  que dice el problema.

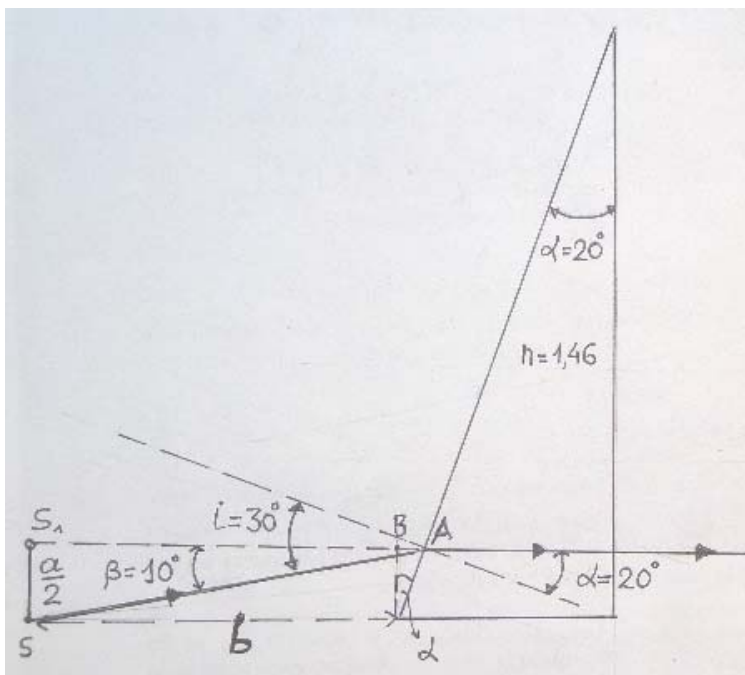


Fig.2

Queremos que el ángulo de refracción  $r$  en la primera cara del prisma sea  $20^\circ$  igual al ángulo del prisma.

$$1 \cdot \text{sen } i = 1,46 \cdot \text{sen } 20^\circ \Rightarrow i = 30^\circ$$

Teniendo en cuenta que en un prisma  $\alpha = r + r' \Rightarrow r' = 0^\circ$ . Por tanto el rayo penetra en la dirección normal de la segunda cara y su prolongación en  $S_1$ . De la figura 2 se deduce:

$$\beta = i - \alpha = 30 - 20 = 10^\circ ; \quad \text{sen } \beta = \text{sen}(i - \alpha) = \text{sen } 10^\circ = \frac{\frac{a}{SA}}{\frac{a}{b}} \approx \frac{2}{b}$$

Dado que el biprisma de Fresnel se caracteriza porque el ángulo alfa es muy pequeño, en el problema 2º, podemos escribir:

$$1 \cdot i = n\alpha \Rightarrow \beta = i - \alpha = n\alpha - \alpha = \alpha(n-1) \Rightarrow \beta = \frac{a}{b} = \alpha(n-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 2(n-1)\alpha b$$

Llevando el valor de  $a$  a la ecuación (1)

$$h = \frac{m\lambda(D+b)}{2(n-1)\alpha b} = \frac{1 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \cdot (2+0,2)}{2 \cdot (1,46-1) \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{180} \cdot 0,2} = 1,88 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

- 138.-a) Calcular el campo eléctrico de un segmento esférico, cargado uniformemente, en el centro de la esfera de radio  $R$  a la que pertenece. El área del círculo que cierra el segmento es  $r < R$  y la densidad superficial de carga  $\sigma \text{ C/m}^2$ .**  
**b) Calcular el campo eléctrico que crea un hemisferio, de radio  $R$  con densidad de carga superficial  $\sigma$ , en su centro**

En la figura 1 se ha representado el segmento esférico cuya área del círculo que lo cierra es  $r$ . El radio de la esfera es  $R$ . Sobre el segmento esférico se ha considerado una superficie de altura  $dh$ .

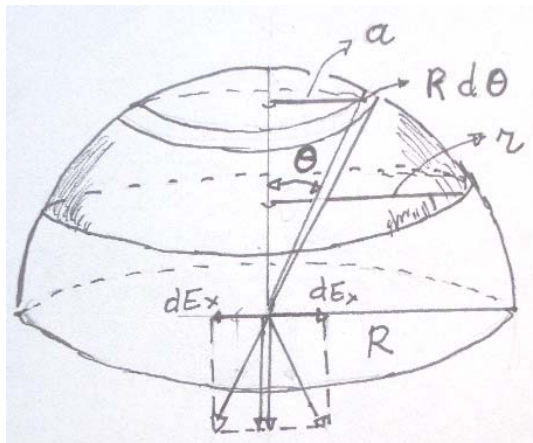


Fig.1

El área de dicha superficie es:

$$dA = R d\theta \cdot 2\pi a$$

y su carga eléctrica

$$dQ = R d\theta \cdot 2\pi a \sigma$$

Cualquier lugar que se elija de esta superficie dista  $R$  del centro de la esfera, por ello, el campo eléctrico creado son vectores que forman un ángulo  $\theta$ , pero dada la simetría del proceso las componentes horizontales se anulan y solo quedan las verticales (ver la figura 1). El módulo de esa componente es:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{R^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R \sigma d\theta \cdot 2\pi a}{R^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a \sigma}{R} \cos\theta d\theta$$

En la ecuación anterior existen dos variables, una es  $\theta$  y la otra  $a$ . Ambas están ligadas entre sí

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{R} \Rightarrow \cos\theta d\theta = \frac{1}{R} da$$

Llevando esta relación a la ecuación  $dE_y$ .

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a \sigma}{R} \cdot \frac{1}{R} da = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{2 a \sigma}{R^2} \cdot da$$

Para hallar el campo debido a todo el segmento circular integramos:

$$E_y = \int_0^r \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^2} a da = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^2} \left[ \frac{a^2}{2} \right]_0^r = \frac{\sigma r^2}{4\epsilon_0 R^2}$$

b) Para resolver este caso basta integrar como anteriormente pero cambiando el límite  $r$  por  $R$ .

$$E_y = \int_0^R \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^2} a da = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^2} \left[ \frac{a^2}{2} \right]_0^R = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

**139.-Un mol de gas perfecto con coeficiente adiabático  $\gamma$  se expansionó de forma reversible según la ley  $p = kV$ , donde  $k$  es una constante. El volumen inicial del gas es  $V_0$ . Como resultado de la expansión el volumen final alcanzado por el gas es  $nV_0$ . a) Calcular: a) el incremento de energía interna del gas. b) El trabajo realizado por dicho gas. c) Su capacidad calorífica molar para este proceso.**

a) Calculamos la presión, volumen y temperatura del gas al principio y al final de la expansión:

Inicial:  $p_0 = kV_0$ ,  $V_0$ ,  $T_0$  ; Final:  $p_f = kV_f = knV_0$ ,  $V_f = nV_0$ ,

Para calcular la temperatura final aplicamos la ley de los gases perfectos

$$\frac{kV_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{knV_0 \cdot nV_0}{T_f} \Rightarrow T_f = n^2 T_0$$

La variación de energía interna para un gas perfecto es:

$$\Delta U = C_V(T_f - T_0) = C_V(n^2 T_0 - T_0) = C_V T_0 (n^2 - 1)$$

Para un gas ideal  $C_p - C_V = R$  ;  $\frac{C_p}{C_V} = \gamma \Rightarrow C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$

$$\Delta U = C_V T_0 (n^2 - 1) = \frac{RT_0}{\gamma - 1} (n^2 - 1) = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} (n^2 - 1) = \frac{kV_0^2}{\gamma - 1} (n^2 - 1)$$

$$b) \quad W = - \int_{V_0}^{V_f} P_{\text{ext}} dV = - \int_{V_0}^{V_f} P_{\text{gas}} dV = - \int_{V_0}^{nV_0} kV dV = -k \left[ \frac{n^2 V_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right] = \frac{kV_0^2}{2} (1 - n^2)$$

dado que  $n > 1$ ,  $W$  es negativo, lo cual indica que el trabajo lo realiza el sistema al exterior.

c) A partir del primer principio  $\Delta U = Q + W$ , utilizando como criterio de signos que  $Q$  y  $W$  son positivos cuando sobre el sistema y desde el exterior se aporta trabajo o calor

$$Q = \Delta U - W = \frac{kV_0^2}{\gamma - 1} (n^2 - 1) - \frac{kV_0^2}{2} (1 - n^2) = kV_0^2 (n^2 - 1) \left( \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = kV_0^2 (n^2 - 1) \left( \frac{2 + \gamma - 1}{2(\gamma - 1)} \right) = kV_0^2 (n^2 - 1) \left( \frac{1 + \gamma}{2(\gamma - 1)} \right)$$

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\frac{kV_0^2}{2} (n^2 - 1) \left( \frac{1 + \gamma}{\gamma - 1} \right)}{n^2 T_0 - T_0} = \frac{kV_0^2}{2 T_0} \left( \frac{1 + \gamma}{\gamma - 1} \right)$$

Para un gas perfecto:  $PV = RT \Rightarrow p_0 V_0 = RT_0 \Rightarrow kV_0^2 = RT_0$

$$C = \frac{kV_0^2}{2 T_0} \left( \frac{1 + \gamma}{\gamma - 1} \right) = \frac{R}{2} \left( \frac{1 + \gamma}{\gamma - 1} \right)$$

**140.-Una pequeña masa comienza a deslizarse por un plano inclinado de ángulo  $\alpha$ . El coeficiente de rozamiento es directamente proporcional al camino recorrido por la masa ( $\mu = ks$ ). Calcular el camino recorrido por la masa hasta que se para y la velocidad máxima que ha alcanzado en dicho recorrido.**

La masa cuando inicia su movimiento tiene una cierta energía potencial y carece de cinética. Cuando se para no tiene ni energía cinética ni potencial. La energía potencial perdida se ha empleado en el trabajo de rozamiento efectuado a lo largo del camino recorrido.

$$W_{Fr} = \int_0^{s_f} k s mg \cos \alpha ds = kmg \cos \alpha \frac{s_f^2}{2}$$

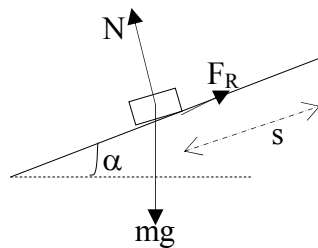
Designamos con  $h$ , la altura que desciende la masa desde que inicia el movimiento hasta que se para, teniendo en cuenta que el camino recorrido sobre el plano es  $s$ , se deduce que:

$$\text{sen} \alpha = \frac{h}{s_f} \Rightarrow h = s_f \text{sen} \alpha, \text{ y la pérdida de energía potencial es: } mgs_f \text{sen} \alpha. \text{ Igualando el trabajo}$$

de rozamiento con la pérdida de energía potencial

$$kmg \cos \alpha \frac{s_f^2}{2} = mgs_f \text{sen} \alpha \Rightarrow s_f = \frac{2 \text{tag} \alpha}{k}$$

El diagrama de fuerzas sobre el cuerpo nos conduce a



$$mg \text{sen} \alpha - F_R = ma \Rightarrow mg \text{sen} \alpha - ks mg \cos \alpha = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = m \frac{dv}{ds} v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int (g \text{sen} \alpha - ks g \cos \alpha) ds = \int v dv \Rightarrow g s \text{sen} \alpha - k g \cos \alpha \frac{s^2}{2} = \frac{v^2}{2} + \text{Cte}$$

Cuando se inicia el movimiento  $s = 0$  y la velocidad es nula, luego  $\text{Cte} = 0$ .

Para buscar la velocidad máxima derivamos la ecuación de la velocidad con respecto a la variable  $s$  e igualamos a cero

$$v = \sqrt{2 g s \text{sen} \alpha - 2 k g \cos \alpha \frac{s^2}{2}} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{2 g \text{sen} \alpha - 2 k g s \cos \alpha}{2 \sqrt{2 g s \text{sen} \alpha - 2 k g \cos \alpha \frac{s^2}{2}}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{\text{tag} \alpha}{k}$$

Llevando el valor de  $s$  a la ecuación de la velocidad

$$v = \sqrt{2g \frac{\text{tag } \alpha}{k} \cdot \text{sen } \alpha - k g \cos \alpha \cdot \frac{\text{tag}^2 \alpha}{k^2}} = \sqrt{2g \frac{\text{sen}^2 \alpha}{k \cos \alpha} - g \frac{\text{sen}^2 \alpha}{k \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{g \text{tag } \alpha \text{ sen } \alpha}{k}}$$

**141.-Un gas perfecto contiene n moles. Dicho gas se enfría a volumen constante y a continuación se expande a presión constante hasta que su temperatura es igual a la inicial y su presión varió k veces la inicial. Se pide el cambio de entropía que ocurre en el proceso total.**

Designamos con  $P_1, V_1$  y  $T_1$  las condiciones iniciales del gas (estado 1). Al enfriarlo isocóricamente (estado 2) sus variables son  $P_2, V_1, T_2$ , después del proceso isobárico, las coordenadas termodinámicas del gas son:  $P_3 = P_2 = \frac{P_1}{k}, V_3, T_1$  (estado 3).

El proceso del estado 1 al estado 2 se produce con variación de la presión y de la temperatura

De acuerdo con el primer principio  $dU = \delta Q + \delta W$ . Recordando que  $dS = \frac{\delta Q}{T}$ , y  $\delta W = -p dV = -\frac{RT}{V} dV$ , resulta:

$$dU = T dS - RT \frac{dV}{V} = C_v dT \Rightarrow dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$$

Aplicando la ecuación anterior para el proceso del estado 1 al 2.

$$S_2 - S_1 = nC_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (1)$$

El proceso del estado 2 al estado 3 se produce con variación de la temperatura y del volumen.

$$dU = T dS - p dV = C_v dT ; \quad T dS - \frac{RT}{V} dV = C_v dT \Rightarrow dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$$

Aplicando la ecuación anterior para el proceso del estado 2 al 3.

$$S_3 - S_2 = nC_v \ln \frac{T_3}{T_2} + nR \ln \frac{V_3}{V_2} \quad (2)$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (2).

$$S_3 - S_1 = n \left( C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v \ln \frac{T_3}{T_2} + R \ln \frac{V_3}{V_2} \right) \quad (3)$$

Según la ley de los gases perfectos

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1}{k P_1} = \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{\frac{P_1}{k} V_3}{T_1} \Rightarrow V_3 = k V_1$$

Sustituyendo en la ecuación (3)

$$S_3 - S_1 = n \left( C_v \ln \frac{1}{k} + R \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v \ln \frac{T_1}{T_2} + R \ln \frac{k V_1}{V_2} \right)$$

$$S_3 - S_1 = n R \left( \ln \frac{V_2}{V_1} - \ln \frac{V_2}{k V_1} \right) = n R \ln k$$

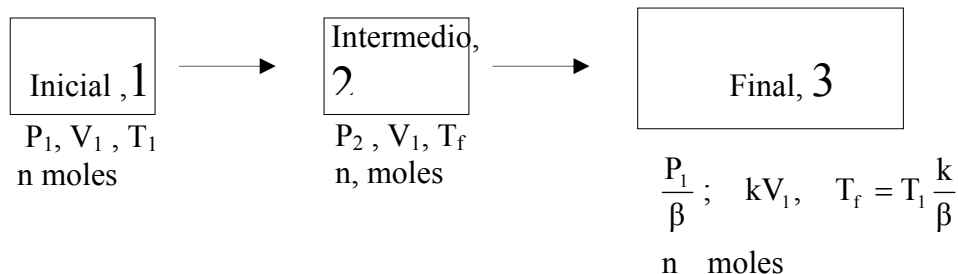
**142.-Calcular el aumento de entropía de  $n$  moles de un gas perfecto cuyo exponente adiabático es  $\gamma$ , si el gas sufre un proceso por el que su volumen aumento  $k$  veces y su presión disminuyo  $\beta$  veces.**

**Hacer el calculo para  $n = 2$  moles ,  $\gamma=1,30$  ,  $k = 2$  ,  $\beta=3$ .**

En el estado inicial, las coordenadas del gas son:  $P_1, V_1$  y  $T_1$  y en el estado final  $\frac{P_1}{\beta}, kV_1, T_f$  .la relación entre ambos estado es:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{\frac{P_1}{\beta} \cdot k V_1}{T_f} \Rightarrow T_f = T_1 \frac{k}{\beta}$$

Para calcular el aumento de entropía podemos establecer caminos entre el estado inicial y el final ya que la entropía es función de estado y no depende del camino seguido sino del estado inicial y final.



Desde el estado 1 al 2 el gas evoluciona cambiando su presión y temperatura y manteniendo constante su volumen

De acuerdo con el primer principio  $dU = \delta Q_R + \delta W$ . Recordando que  $dS = \frac{\delta Q_R}{T}$ , y  $\delta W = -p dV = -\frac{RT}{V} dV$ , resulta:

$$dU = T dS - RT \frac{dV}{V} = C_v dT \Rightarrow dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \quad (1)$$

Para un mol de gas

$$PV = RT \Rightarrow P dP + V dV = R dT \Rightarrow \frac{P dP}{PV} + \frac{V dV}{PV} = \frac{R}{PV} dT \Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = C_v \frac{dT}{T} + R \left( \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \right) = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad (2)$$

Aplicamos la ecuación (2) para n moles de gas entre los estados 1 y 2.

$$S_2 - S_1 = nC_p \ln \frac{T_f}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1} = nC_p \ln \frac{T_1 \frac{k}{\beta}}{T_1} - nR \ln \frac{\frac{RT_1 \frac{k}{\beta}}{V_1}}{\frac{RT_1}{V_1}} = nC_p \ln \frac{k}{\beta} - nR \ln \frac{k}{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_2 - S_1 = nC_v \ln \frac{k}{\beta}$$

Desde el estado 2 al 3 el gas evoluciona cambiando su presión y volumen y manteniendo constante su temperatura.. Sustituyendo en (1)

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = C_v \left( \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} \right) + R \frac{dV}{V} = C_v \frac{dP}{P} + C_p \frac{dV}{V} \quad (3)$$

Aplicamos la ecuación (3) para n moles de gas entre los estados 2 y 3.

$$S_3 - S_2 = nC_v \ln \frac{P_1}{P_2} + nC_p \ln \frac{kV_1}{V_1} = nC_v \ln \frac{\frac{nRT_1}{\beta V_1}}{\frac{nRT_f}{V_1}} + nC_p \ln k = nC_v \ln \frac{T_1}{\beta T_1 \frac{k}{\beta}} + nC_p \ln k$$

$$S_3 - S_2 = nC_v \ln \frac{1}{k} + nC_p \ln k$$

$$(S_3 - S_2) + (S_2 - S_1) = S_3 - S_1 = nC_v \ln \frac{1}{k} + nC_p \ln k + nC_v \ln \frac{k}{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 - S_1 = n(-C_v \ln k + C_p \ln k + C_v \ln k - C_v \ln \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 - S_1 = n(C_p \ln k - C_v \ln \beta) = n(C_v \ln k + R \ln k - C_v \ln k)$$

La diferencia de las capacidades caloríficas es igual a R

$$C_p - C_v = R \Rightarrow \frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{R}{C_v} \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$S_3 - S_1 = n \left( \frac{R}{\gamma - 1} \ln k + R \ln k - \frac{R}{\gamma - 1} \ln \beta \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} [\ln k + (\gamma - 1) \ln k - \ln \beta] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 - S_1 = \frac{nR}{\gamma - 1} (\gamma \ln k - \ln \beta) = \frac{2 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}}{1,30 - 1} (1,30 \cdot \ln 2 - \ln 3) = -10,9 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$