

PROBLEMAS VARIADOS 17

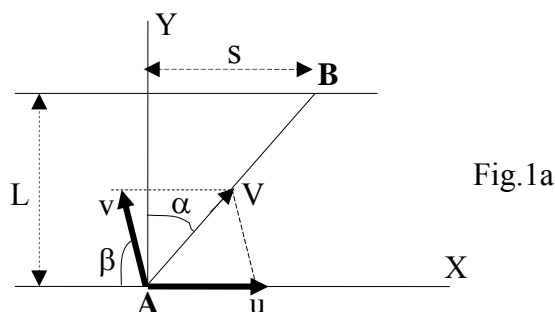
143.- Un río tiene sus orillas paralelas y la distancia entre ambas es L . La velocidad de la corriente es constante y de módulo u .

a) Con una lancha se desea ir desde A en una orilla, hasta B en la otra orilla con la condición de que la velocidad de la lancha sea la mínima posible (fig. 1a).

a) Determinar el valor de v mínima.

b) Admitiendo que $u > v$ (v , velocidad de la lancha), se parte del punto A y se desea llegar a la orilla opuesta con una deriva mínima, esto es, con un valor de s mínimo, (fig 1b). Determinar el valor de la velocidad.

a)



En la figura 1a, v es la velocidad de la lancha, V es la velocidad resultante de la velocidad del agua y de la lancha. La dirección de V es la recta AB , puesto que se pretende salir de A y llegar a B . En la mencionada figura v es una velocidad cualquiera y no la mínima que es lo que pide el problema. Observe que son invariables u y s .

Proyectamos las velocidades sobre los ejes X e Y .

$$V \operatorname{sen} \alpha = u - v \cos \beta ; \quad V \cos \alpha = v \operatorname{sen} \beta \Rightarrow \quad \operatorname{tag} \alpha = \frac{u - v \cos \beta}{v \operatorname{sen} \beta} = \frac{s}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Lu - Lv \cos \beta = s v \operatorname{sen} \beta \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Lu}{L \cos \beta + s \operatorname{sen} \beta}$$

Como el problema nos pide la velocidad mínima derivamos v respecto de β e igualamos a cero.

$$\frac{dv}{d\beta} = \frac{-Lu(-L \operatorname{sen} \beta + s \cos \beta)}{(L \cos \beta + s \operatorname{sen} \beta)^2} = 0 \Rightarrow -L \operatorname{sen} \beta + s \cos \beta = 0 \Rightarrow \operatorname{tag} \beta = \frac{s}{L} = \operatorname{tag} \alpha$$

A la vista de este resultado:

$$v_{\min} = \frac{Lu}{L \cos \alpha + s \operatorname{sen} \alpha} = \frac{Lu}{L \frac{L}{AB} + s \frac{s}{AB}} = \frac{Lu \sqrt{L^2 + s^2}}{L^2 + s^2} = \frac{Lu}{\sqrt{L^2 + s^2}}$$

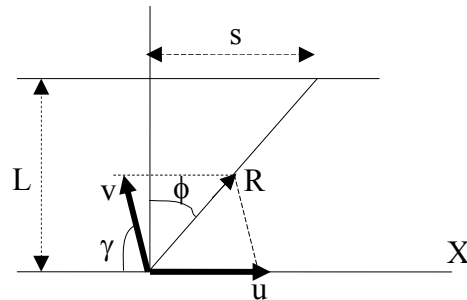


Fig.1b

En la figura 1b se ha representado un valor cualquiera de s , que no es el mínimo pedido por el problema. R representa la velocidad resultante que corresponde a s .

$$R \operatorname{sen} \phi = u - v \cos \gamma ; R \cos \phi = v \operatorname{sen} \gamma \Rightarrow \operatorname{tag} \phi = \frac{u - v \cos \gamma}{v \operatorname{sen} \gamma} = \frac{s}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = L \frac{u - v \cos \gamma}{v \operatorname{sen} \gamma} \quad (1)$$

Si s ha de ser mínimo, derivamos s con respecto a γ , e igualamos a cero.

$$\frac{ds}{d\gamma} = L \frac{v \operatorname{sen} \gamma \cdot v \operatorname{sen} \gamma - (u - v \cos \gamma) \cdot v \cos \gamma}{v^2 \operatorname{sen}^2 \gamma} = 0 \Rightarrow v^2 \operatorname{sen}^2 \gamma - u v \cos \gamma + v^2 \cos^2 \gamma = 0 \Rightarrow$$

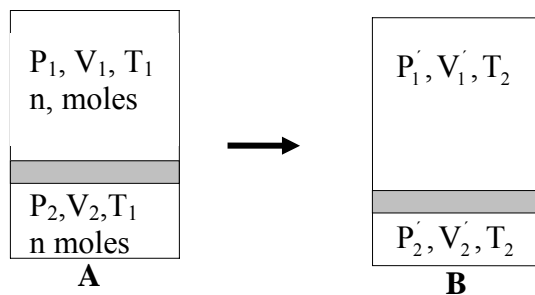
$$\Rightarrow \cos \gamma = \frac{v}{u}$$

Sustituyendo el valor del coseno en (1), resulta:

$$s_{\min} = L \frac{u - v \frac{v}{u}}{v \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}} = L \frac{\frac{u^2 - v^2}{u}}{\frac{v}{u} \sqrt{u^2 - v^2}} = \frac{L}{v} \sqrt{u^2 - v^2}$$

144.- Un cilindro cerrado por ambas bases, está dividido en dos compartimentos mediante un émbolo que tiene masa, el cual puede subir y bajar por el cilindro sin rozamiento. El compartimento superior está ocupado por n moles de un gas perfecto a la temperatura T_1 y el inferior por n moles del mismo gas y a la misma temperatura. Se varía la temperatura de ambos gases hasta T_2 . Calcular la relación de los volúmenes que ocupan ambos gases a la temperatura T_2 . Se supone que el volumen del cilindro no varía al cambiar la temperatura.

En la figura inferior se hace un esquema del proceso



Designamos con p_E la presión que ejerce el émbolo sobre el gas inferior:

$$P_2 = P_1 + p_E \quad ; \quad P_2' = P_1' + p_E \Rightarrow P_1 - P_2 = P_1' - P_2' \quad (1)$$

Dado que al variar la temperatura el volumen del cilindro no cambia, se cumplirá que

$$V_1 + V_2 = V_1' + V_2' \quad (2)$$

Relaciones en **A** y en **B** y entre **A** y **B**.

$$\text{En } \mathbf{A} \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad \text{En } \mathbf{B} \Rightarrow P_1' V_1' = P_2' V_2' \quad (3)$$

$$\text{Entre } \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_1' V_1'}{T_2} \quad ; \quad \frac{P_2 V_2}{T_1} = \frac{P_2' V_2'}{T_2} \quad (4)$$

Designamos a $\frac{V_1}{V_2} = \varepsilon$ y a $\frac{V_1'}{V_2'} = \rho$. A partir de las ecuaciones (1) y (3)

$$P_1 - P_1 \frac{V_1}{V_2} = P_1' - P_1' \frac{V_1'}{V_2'} \Rightarrow P_1(1 - \varepsilon) = P_1'(1 - \rho) \quad (5)$$

A partir de las ecuaciones (2) y (3)

$$V_1 + V_1 \frac{P_1}{P_2} = V_1' + V_1' \frac{P_1'}{P_2} \Rightarrow V_1 \left(1 + \frac{P_1}{P_2}\right) = V_1' \left(1 + \frac{P_1'}{P_2}\right) = V_1 \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) = V_1' \left(1 + \frac{V_2'}{V_1'}\right) \Rightarrow$$

$$V_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = V_2 \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \quad (6)$$

Multiplicamos miembro a miembro la ecuación (5) por la (6)

$$P_1 V_1 (1 - \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = P_1' V_1' (1 - \rho) \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \Rightarrow nRT_1 (1 - \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = nRT_2 (1 - \rho) \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) = nRT_2$$

$$\Rightarrow T_1 \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon}\right) = T_2 \left(\frac{1 - \rho^2}{\rho}\right) \Rightarrow \rho^2 - \rho \frac{T_1}{T_2} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon}\right) - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$\rho = \frac{\frac{T_1}{T_2} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon}\right)^2 + 4}}{2}$$

De las dos soluciones de la ecuación solamente es válida la positiva.

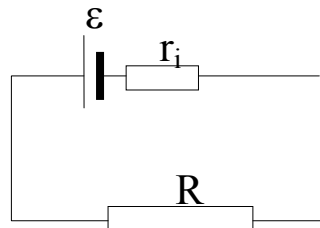
Si designamos a $\frac{T_1}{T_2} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon}\right) = \alpha$, teniendo presente que $\varepsilon > 1$, puesto que el embolo tiene masa, resulta que $\alpha > 1$, también $\rho > 1$.

$$\rho = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$$

Como no existe ningún valor de α que haga a ρ positivo, solamente es valida la solución con signo positivo delante de la raíz.

145.- Se dispone de cuatro resistencias de alambre en espiral, de valores 10, 20, 30 y 40 ohmios, respectivamente. La potencia máxima que puede disipar cada resistencia es 2 W. Utilizando esas cuatro resistencias se fabrica un calentador que se conecta a una fuente de 20 V y resistencia interna 25 Ω. Indicar cómo se han de unir las cuatro resistencias para que la potencia sea máxima en el calentador.

En el circuito de la figura la máxima transferencia de potencia de la fuente a la resistencia se produce cuando $R = r_i =$ resistencia interna de la fuente. Veamos por qué.



La intensidad de la corriente que atraviesa R y la potencia desarrollada es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r_i} ; P = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R + r_i} \right)^2 R$$

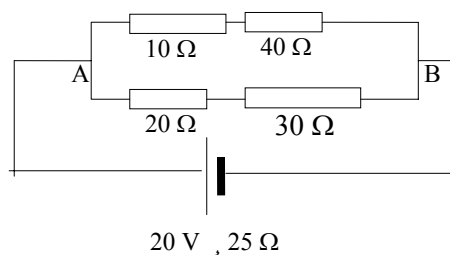
Para hallar la máxima potencia derivamos la expresión anterior respecto de R e igualamos a cero

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \frac{(R + r_i)^2 - R \cdot 2(R + r_i)}{(R + r_i)^4} = 0 \Rightarrow (R + r_i)^2 - R \cdot 2(R + r_i) = 0 \Rightarrow R + r_i - 2R = 0 \Rightarrow A$$

$$R = r_i$$

la vista del anterior resultado, las cuatro resistencias deben agruparse de modo que su resistencia total sea igual a 25 Ω o al valor más próximo a él.

De inmediato se observa que no es posible asociarlas en serie. Tampoco en paralelo. Por tanto, es preciso asociarlas de forma mixta.

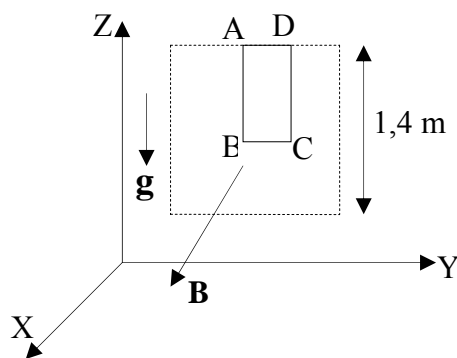


La resistencia de la agrupación anterior es 25 Ω y la caída de tensión entre A y B vale 10 V. Veamos si el circuito cumple la condición de que cada resistencia soporte una potencia igual o inferior a 2 vatios.

Entre A y B por la rama superior la intensidad es $I = \frac{10}{50} = 0,20 \text{ A}$, la potencia en la resistencia mayor es; $P = I^2 R = 0,20^2 \cdot 40 = 1,6 \text{ W}$. En las demás resistencia la potencia es menor, luego se cumplen las condiciones del problema.

146. En el plano ZY existe un campo magnético uniforme intenso de valor $B=2\text{ T}$ y dirigido en el sentido positivo del eje X (ver la figura inferior). Los límites de ese campo son 1,4 metros por 1,4 metros. En el interior del mismo existe una espira metálica ABCD rectangular de lados $AD=L=0,20\text{ m}$, $AB=h=0,60\text{ m}$, que inicialmente se encuentra en reposo. La resistencia óhmica de la espira es $R=2\ \Omega$ y su masa $m=5\cdot 10^{-2}\text{ kg}$. a) Determinar cómo varía la velocidad de la espira desde que se suelta sin velocidad inicial hasta que el lado AD sale justamente del campo, Hacer una representación gráfica. b) Repetir el apartado anterior si el campo magnético tuviese una intensidad de 6 T.

Tome $g = 10\text{ m/s}^2$. Ayuda: $\int \frac{dx}{a-bx} = -\frac{1}{b} \ln(a-bx)$



a) El movimiento de la espira se divide en dos partes: una, cuando la espira se encuentra totalmente sumergida en el campo magnético uniforme y el flujo a través de ella es constante, esto es, desde la posición inicial hasta que el lado BC llega al borde inferior del campo, otra cuando la espira comienza a abandonar el campo y una parte está dentro del campo y otra fuera, esto es, desde que la posición anterior hasta que el lado AD sale justamente del campo.

En la primera parte el movimiento es una caída libre en el campo gravitatorio terrestre y la velocidad de la espira cuando el lado BC está justamente en el límite del campo es:

$$v_i = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot (1,4 - 0,6)} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El tiempo en que se verifica el anterior movimiento

$$h = \frac{1}{2} g t_i^2 \Rightarrow t_i = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{10}} = 0,40\text{ s}$$

A partir del instante anterior, la espira sale del campo magnético y como consecuencia de ello se produce una variación del flujo magnético que la atraviesa y de ello se deriva que aparezca una fuerza electromotriz que provoca una corriente en la espira y finalmente, como veremos, una fuerza opuesta a la del campo gravitatorio.

En la figura 1 se observa la posición de la espira cuando su velocidad es v y un instante posterior Δt muy pequeño.

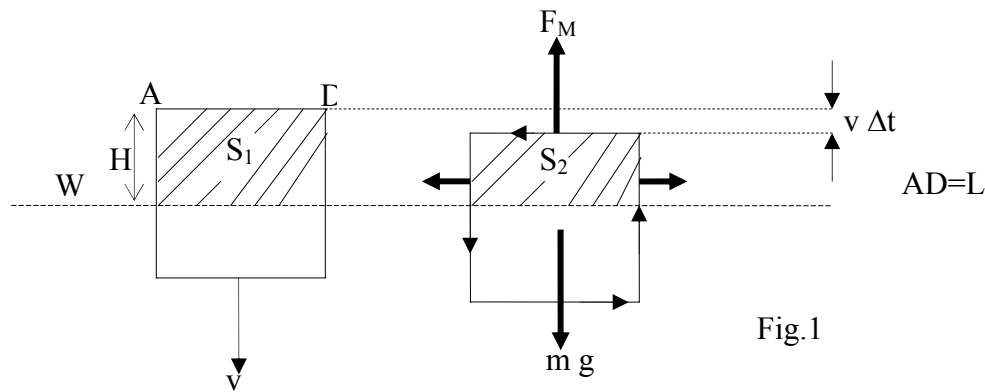


Fig.1

En la figura 1 la línea W indica el límite del campo, por encima existe un campo B perpendicular al plano del papel y dirigido hacia fuera del mismo, por debajo de L no existe campo. Observando la figura 1 se deduce que S_1 es la superficie de la espira atravesada por el campo en la posición 1 y S_2 en la posición 2.

$$S_1 = H \cdot L ; S_2 = (H - v \Delta t) \cdot L \Rightarrow S_2 - S_1 = L(H - v \Delta t - H) = -L \cdot v \cdot \Delta t$$

En la posición 1 la espira está atravesada por un flujo magnético Φ_1 . Un tiempo después Δt (muy pequeño), la espira se ha desplazado hacia abajo una distancia $v \Delta t$, y es atravesada por un flujo Φ_2 . El flujo penetra por la cara posterior de la espira y sale por la de delante, mirando la figura 2.

Podemos escribir siguiendo la ley de Lenz

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -\frac{B \cdot S_2 - B \cdot S_1}{\Delta t} = -\frac{B(S_2 - S_1)}{\Delta t} = \frac{B \cdot L \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} = B v L$$

En la espira aparecerá una corriente cuya intensidad es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B v L}{R}$$

Ahora hay que averiguar si la intensidad I en la espira forma una cara Norte o Sur tal como está la figura 2. Para ello recordemos que esa intensidad debe oponerse a la causa externa introducida, por ello la corriente tratará, dentro de lo posible, que el flujo que atraviesa la espira se conserve, en consecuencia la cara vista de frente (figura 2) debe ser una cara norte.

Finalmente la espira recorrida por la corriente I está en el seno de un campo magnético B) y por consiguiente habrá fuerzas sobre los lados de la espira

La fuerza sobre el lado $AD=L$ es:

$$\vec{F}_M = I \vec{L} \times \vec{B} = IL(-\vec{j}) \times B \vec{i} = IL B \vec{k} \Rightarrow F_M = IL B = \frac{B^2 L^2}{R} v$$

Las fuerzas sobre los lados verticales tienen el mismo módulo y son de sentido contrario, su resultante es nula.

La espira, mientras está moviéndose una parte de ella dentro del campo y otra fuera, actúan dos fuerzas, una el peso vertical y hacia abajo y otra la fuerza magnética vertical y hacia arriba.

Para calcular la velocidad habremos de integrar una ecuación diferencial y para plantearla hay que aplicar la segunda ley de Newton.

$$mg - \frac{B^2 L^2}{R} v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow mg - \beta v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = \frac{m dv}{mg - \beta v} = \frac{dv}{g - \frac{\beta}{m} v}$$

Para integrar la expresión anterior recurrimos a la ayuda que nos dan en el enunciado. Comparando las expresiones se deduce que $a = g$ y $b = \frac{\beta}{m}$.

$$t = -\frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v\right) + Cte$$

Para hallar el valor de la constante de integración observamos que cuando la espira llega a la posición en que BC está sobre la línea W, la velocidad de la espira es $v_i = 4$ m/s y el tiempo es $t_i = 0,40$ s.

$$t_i = -\frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v_i\right) + Cte \Rightarrow Cte = t_i + \frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v_i\right)$$

Sustituyendo la constante en t, resulta:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v\right) + t_i + \frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v_i\right) = t_i + \frac{m}{\beta} \ln \frac{g - \frac{\beta}{m} v_i}{g - \frac{\beta}{m} v} \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\frac{\beta}{m}(t-t_i)} &= \frac{g - \frac{\beta}{m} v_i}{g - \frac{\beta}{m} v} \Rightarrow g - \frac{\beta}{m} v = \left(g - \frac{\beta}{m} v_i\right) e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_i)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\beta}{m} v &= g - \left(g - \frac{\beta}{m} v_i\right) e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_i)} \Rightarrow v = \frac{mg}{\beta} + \left(v_i - \frac{mg}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_i)} \quad (1) \end{aligned}$$

La ecuación anterior de v es válida cuando $t \geq 0,40$ s hasta que la espira abandone el campo. Como la espira tiene una altura limitada hemos de calcular el tiempo que transcurre desde que llega el lado BC a la línea W, hasta que el lado AD llega a esa línea, en total una altura recorrida de 0,60m. Teniendo en cuenta que $h = \int v dt$, con resolver esa integral solucionaríamos el problema, pero dado que en el enunciado no se nos dice nada acerca de cómo resolver la integral, solamente podemos encontrar la solución al problema de forma aproximada, midiendo el área comprendida entre v y el tiempo.

Sustituimos valores en la ecuación (1)

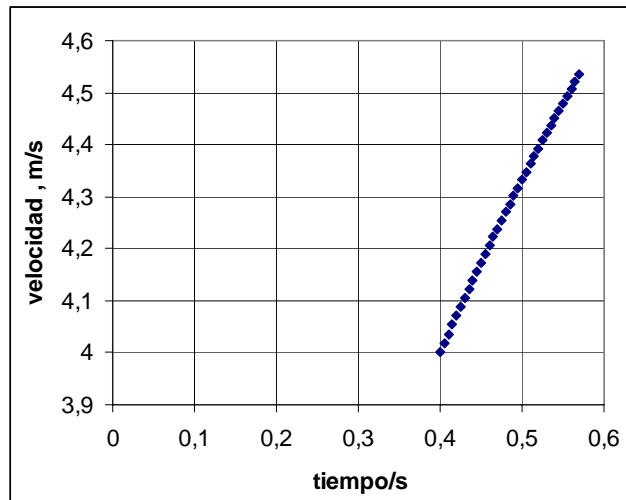
$$\begin{aligned} \beta &= \frac{B^2 L^2}{R} = \frac{2^2 \cdot 0,20^2}{2} = 0,080 \frac{T^2 m^2}{\Omega} \Rightarrow \frac{mg}{\beta} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{0,080} = 6,25 \frac{m}{s} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\beta}{m} = \frac{0,080}{5 \cdot 10^{-2}} = 1,6 \frac{T^2 m^2}{kg \Omega} \end{aligned}$$

$$v = 6,25 + (4 - 6,25) \cdot e^{-1,6(t-0,4)} = 6,25 - 2,25 \cdot e^{-1,6(t-0,4)}$$

Representamos v frente a t . Antes de hacer la representación obtengamos una idea acerca del valor de t . Si cayese libremente, con $g = 10 \text{ m/s}^2$, y su velocidad inicial 4 m/s y la altura recorrida $0,60$ metros

$$0,60 = 4 * t_e + \frac{1}{2} 10 t_e^2 \Rightarrow t_e = 0,14 \text{ segundos} \Rightarrow t = 0,4 + 0,13 = 0,53 \text{ s}$$

Como F_M se opone a g (ver la figura 1), el tiempo será algo mayor y por tanto en la gráfica damos valores a t superiores a $0,53$ segundos.



La curva de la figura se puede aproximar a una línea recta, por tanto, el área comprendida entre la curva y el eje de los tiempos es un trapecio, cuya área debe valer numéricamente $0,60$.

$$0,60 = \frac{4 + v(t)}{2} \cdot t \Rightarrow 0,60 = \frac{4 + (6,25 - 2,25e^{-1,6(t-0,4)})}{2} (t - 0,4) \Rightarrow$$

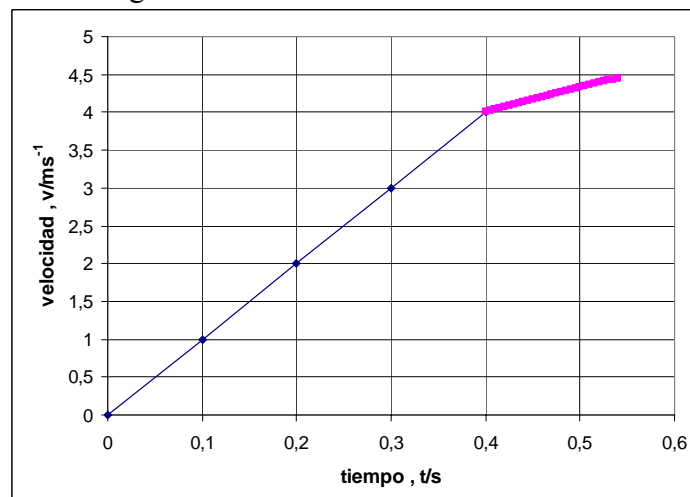
$$\Rightarrow 0,60 = \frac{10,25 - 2,25e^{-1,6(t-0,4)}}{2} (t - 0,4)$$

Resolvemos la ecuación anterior por tanteo, damos valores a t y cogemos como solución aquel valor de t , que dé como resultado $0,60$.

Cuando $t = 0,56$ segundos $0,60 < 0,68$; Cuando $t = 0,54$ segundos $0,60 > 0,59$

Cuando $t = 0,543$ segundos $0,60 = 0,60$

La velocidad de la espira es la siguiente



El primer tramo es lineal y corresponde a un movimiento uniformemente acelerado, el segundo no es lineal pero como el tiempo que dura ese movimiento es muy pequeño la curva aparece en el gráfico como si fuese una línea recta. Se observa que la velocidad siempre aumenta

b) Cuando el campo sea $B=6$ T, los valores de $v_i=4$ m/s y $t_i=0,4$ segundos no varían. Cambian los siguientes:

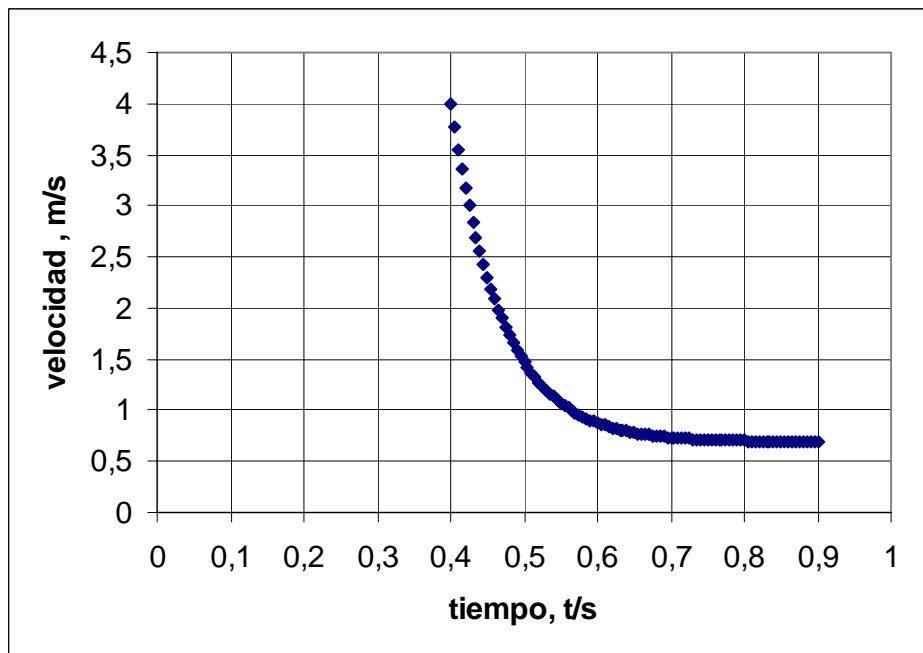
$$\beta = \frac{B^2 L^2}{R} = \frac{6^2 \cdot 0,20^2}{2} = 0,72 \frac{T^2 m^2}{\Omega} \Rightarrow \frac{mg}{\beta} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{0,72} = 0,69 \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{m} = \frac{0,72}{5 \cdot 10^{-2}} = 14,4 \frac{T^2 m^2}{kg \Omega}$$

La ecuación de la velocidad es:

$$v = \frac{mg}{\beta} + \left(v_i - \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_i)} = 0,69 + (4 - 0,69) \cdot e^{-14,4(t-0,4)} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(t-0,4)} \quad (2)$$

La representación gráfica de la velocidad frente al tiempo es la gráfica siguiente:



La velocidad cuando la espira está una parte fuera del campo y otra dentro disminuye. Por tanto el tiempo que tarda la espira en recorrer su altura $h=0,60$ metros es mayor que en el caso anterior.

Hacemos en primer lugar un cálculo aproximado del área bajo la curva suponiendo un trapecio.

$$0,60 = \frac{4 + v(t)}{2} \cdot t \Rightarrow 0,60 = \frac{4 + (0,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(t-0,4)})}{2} (t-0,4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,60 = \frac{4,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(t-0,4)}}{2} (t-0,4)$$

Para $t = 0,5$, $0,60 > 0,27$. Para $t = 0,6$, $0,60 > 0,49$. Para $t = 0,70$, $0,60 < 0,71$

A la vista de los resultados anteriores dividimos la curva entre 0,4 y 0,5 segundos.

Velocidad a los 0,4 segundos 4 m/s. Velocidad a los 0,5 segundos

$$v_{0,5} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14.4(0,5-0,4)} = 1,47 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \text{área} = \frac{4 + 1,47}{2} \cdot 0,1 = 0,27$$

Entre 0,5 y 0,6 segundos. Velocidad a los cinco segundos 1,47 m/s. Velocidad a los seis segundos

$$v_{0,6} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14.4(0,6-0,4)} = 0,88 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \text{área} = \frac{1,47 + 0,88}{2} \cdot 0,1 = 0,12$$

Entre 0,4 y 0,6 segundos el área vale $0,27 + 0,12 = 0,39$, nos falta de área $0,6 - 0,39 = 0,21$

Calculemos la velocidad para un tiempo de $t = 0,80$ segundos y el área entre 0,80 y 0,60 segundos

$$v_{0,80} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14.4(0,80-0,4)} = 0,70 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \text{área} = \frac{0,70 + 0,88}{2} \cdot 0,2 = 0,16$$

Como $0,16 < 0,21$ el tiempo debe ser superior a 0,80 segundos

Calculemos la velocidad para un tiempo de $t = 0,90$ segundos y el área entre 0,90 y 0,60 segundos

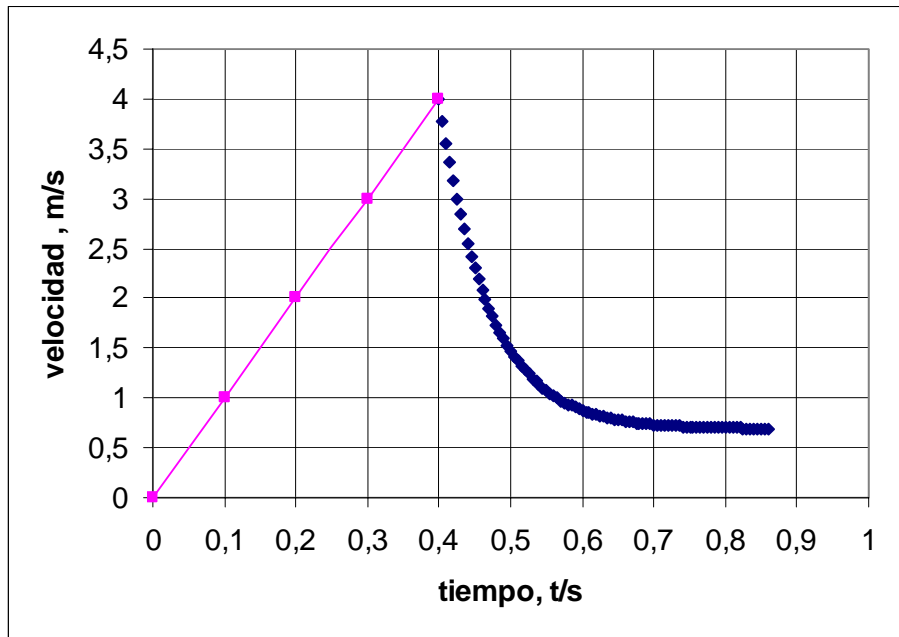
$$v_{0,90} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14.4(0,90-0,4)} = 0,69 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \text{área} = \frac{0,69 + 0,88}{2} \cdot 0,3 = 0,24$$

Como $0,24 > 0,21$ el tiempo debe ser inferior a 0,90 segundos.

Calculemos la velocidad para un tiempo de $t = 0,86$ segundos y el área entre 0,86 y 0,60 segundos

$$v_{0,86} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14.4(0,86-0,4)} = 0,69 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \text{área} = \frac{0,69 + 0,88}{2} \cdot 0,26 = 0,20$$

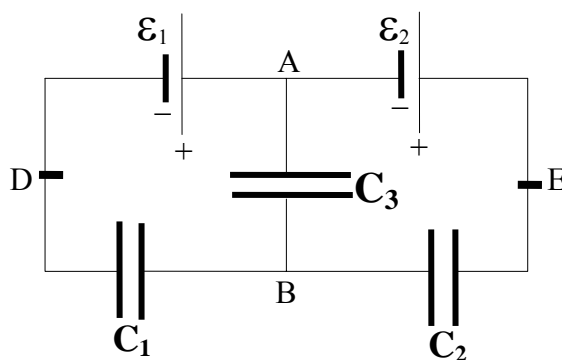
La gráfica del movimiento de la espira en un campo magnético de seis teslas es:



La espira alcanza prácticamente la velocidad límite. Calculemos el valor de ésta, que ocurrirá cuando la aceleración se anule.

$$mg - \frac{B^2 L^2}{R} v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow g - \frac{B^2 L^2}{R} v_{\text{lim}} = 0 \Rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{g m R}{B^2 L^2} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2}{6^2 \cdot 0,20^2} = 0,69 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

147.- En el circuito de la figura inferior en el que se han dispuesto tres condensadores y dos pilas sin resistencia interna, hay que calcular las diferencias de potencial entre A y B ; entre B y D ; entre E y B.



En la figura 1 se han asignado cargas a cada condensador en el 1 y el 2 no hay duda de sus cargas tal como están unidos a las pilas, en el 3 se supone implícitamente que $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$.

Asignamos un sentido positivo al recorrido por cada malla y un sentido a las fuerzas electromotrices de las pilas de menos a más

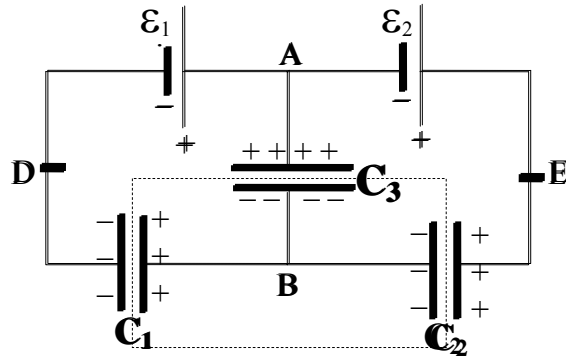


Fig.1

En el cuadrado que se ha dibujado en la figura 1 abarcando a las armaduras de los tres condensadores se cumple que

$$q_1 - q_3 - q_2 = 0 ; C_1 V_{BD} - C_3 V_{AB} - C_2 V_{EB} = 0 \quad (1)$$

Siendo q_1 , q_2 y q_3 las cargas de cada armadura.

Recorremos cada malla en el sentido de las agujas del reloj y asignamos a cada fuerza electromotriz un sentido de negativo a positivo.

$$V_{AB} + V_{BD} = \varepsilon_1 \quad (2); \quad V_{EB} + V_{BA} = \varepsilon_2 \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3) con la (1) y considerando que $V_{BA} = -V_{AB}$, resulta:

$$\begin{aligned} C_1(\varepsilon_1 - V_{AB}) - C_3 V_{AB} - C_2(\varepsilon_2 - V_{BA}) &= 0 \Rightarrow C_1 \varepsilon_1 - C_2 \varepsilon_2 = V_{AB}(C_1 + C_2 + C_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow V_{AB} &= \frac{C_1 \varepsilon_1 - C_2 \varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} \quad (4) \end{aligned}$$

Llevando (4) a (2) y (4) a (3) resulta:

$$\begin{aligned} V_{BD} &= \varepsilon_1 - \frac{C_1 \varepsilon_1 - C_2 \varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{C_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - C_3 \varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} \\ V_{EB} &= \varepsilon_2 + \frac{C_1 \varepsilon_1 - C_2 \varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{C_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - C_3 \varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} \end{aligned}$$