

PROBLEMAS VARIADOS 18

148.- Una partícula P describe una trayectoria circular de radio R, con velocidad angular ω y aceleración angular α .

\vec{R} es el vector de posición de la partícula respecto del centro de la circunferencia. Determinar la velocidad y aceleración de la partícula para un observador en reposo, e identificar las componentes intrínsecas de la aceleración absoluta

El vector de posición de P en un instante t, respecto de los ejes inerciales en O es:

$$\vec{R} = R \cos \varphi \vec{i} + R \sin \varphi \vec{j} \quad \text{con } \varphi = \varphi(t)$$

El vector velocidad es su derivada respecto del tiempo:

$$\vec{v} = -\dot{\varphi} R \sin \varphi \vec{i} + \dot{\varphi} R \cos \varphi \vec{j} = \omega R (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) \quad [1]$$

El vector contenido en el paréntesis es un vector unitario situado en una dirección perpendicular al vector \vec{R} y como la trayectoria es una circunferencia tiene la misma dirección que la tangente, recibiendo el nombre de vector unitario tangente $\vec{\tau}$. La ecuación anterior [1] se puede también escribir.

$$\vec{v} = \omega R \vec{\tau}$$

Ahora bien, si definimos el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ como un vector en la dirección del eje de rotación Z, cuyo sentido lo proporciona la regla del sacacorchos, entonces $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ y si establecemos y verificamos el producto vectorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ [2]

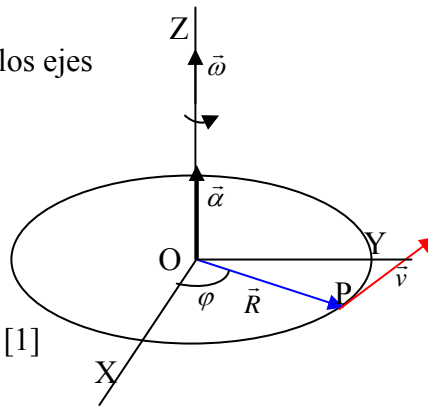
$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R \cos \varphi & R \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \omega R (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})$$

Resultado que al coincidir con [1] confirma la ecuación [2].

Para calcular la aceleración respecto de O, vamos a derivar el vector velocidad respecto del tiempo.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \dot{\omega} R (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) + \omega R (-\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{i} - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{j}) = \\ &= \dot{\omega} R (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) - \omega^2 R (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) \end{aligned}$$

Cambiando $\dot{\omega} = \alpha$ módulo de la aceleración angular resulta:



$$\vec{a} = \alpha R(-\text{sen } \varphi \vec{i} + \text{cos } \varphi \vec{j}) - \omega^2 R(\text{cos } \varphi \vec{i} + \text{sen } \varphi \vec{j}) = \alpha R \vec{\tau} - \omega^2 \vec{R} \quad [3]$$

El primer vector de [3] es tangente a la trayectoria, se conoce como aceleración tangencial, mientras que el segundo tiene dirección radial con sentido hacia O como indica el signo menos, se conoce como aceleración radial o centrípeta.

Si derivamos la ecuación vectorial [2] respecto del tiempo inmediatamente obtenemos también la aceleración.

$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad [4]$$

Estando por definición el vector aceleración angular $\vec{\alpha}$ en la dirección del eje de rotación y su sentido coincide con el de $\vec{\omega}$, en el presente caso. En consecuencia $\vec{\alpha} = \alpha \vec{k}$

El primer sumando de [4] es la aceleración tangencial y el segundo en la aceleración centrípeta. Verifíquese que sale igual que en [3]; efectuando los productos vectoriales que aparecen en los dos sumandos de [4].

Una alternativa inmediata y breve es la siguiente:

Utilizando coordenadas polares el vector de posición es $\vec{R} = R\vec{u}_r$; derivando respecto del tiempo y considerando que la derivada de un vector giratorio de módulo constante (demostración obvia que está en cualquier texto) es $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_r$

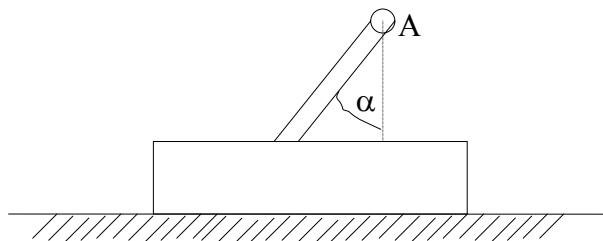
$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = R \frac{d\vec{u}_r}{dt} = R\vec{\omega} \times \vec{u}_r$$

Volviendo a derivar.

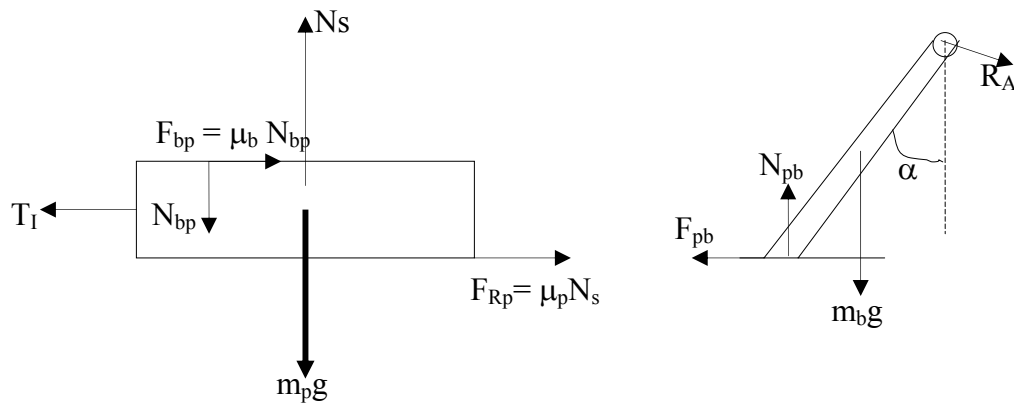
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{u}_r + R\vec{\omega} \times \frac{d\vec{u}_r}{dt} = R \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{u}_r + R\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{u}_r$$

149.-Una plancha de masa m_p está situada sobre un suelo horizontal, siendo μ_p el coeficiente de rozamiento. Una barra de masa m_b y longitud L se apoya por un extremo sobre la plancha y forma con la vertical un ángulo α , por el otro extremo está articulada en A que permanece fijo (ver la figura inferior). El coeficiente de rozamiento entre la plancha y la barra es μ_b .

a) Mediante una fuerza horizontal T_1 aplicada en la plancha se desea que ésta se deslice hacia la izquierda a velocidad constante, determinar T_1 . b) Realizar el mismo caso pero para que la plancha deslice hacia la derecha.



a) Cuando la plancha deslice hacia la izquierda los diagramas de fuerzas sobre la plancha y la barra son los siguientes:



Fuerzas sobre la plancha:

Peso de la plancha = $m_p g$; Fuerza que el suelo ejerce sobre la plancha = N_s

Fuerza con que la barra empuja a la plancha = N_{bp}

Fuerza de rozamiento entre la plancha y el suelo = F_{Rp}

Fuerza de rozamiento entre la plancha y la barra = F_{bp}

Fuerza aplicada en la plancha para que deslice hacia la izquierda con velocidad constante = T_I

Fuerzas sobre la barra:

Peso de la barra = $m_b g$; Fuerza con que la plancha empuja a la barra = N_{pb} : Las fuerzas N_{bp} y N_{pb} son acción y reacción y por tanto tienen el mismo módulo.

Fuerza de rozamiento entre la barra y la plancha = F_{pb} Las fuerzas F_{bp} y N_{pb} son acción y reacción y por tanto tienen el mismo módulo.

Reacción en la articulación $A = R_A$. En la figura se ha dibujado en una dirección cualquiera, pues a priori no puede saberse cómo esta dirigida.

Como la plancha desliza a velocidad constante se cumple: que la suma de todas las fuerzas aplicadas debe ser nula:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$T_I - \mu_p N_s - \mu_b N_{bp} = 0 \quad ; \quad N_s = m_p g + N_{bp} \Rightarrow T_I - \mu_p (m_p g + N_{bp}) - \mu_b N_{bp} = 0 \quad (1)$$

La barra se encuentra en reposo, si empleamos la condición de que la suma de los momentos respecto de la articulación A es cero, evitamos introducir la reacción en la articulación R_A y así calculamos directamente la reacción N_{pb} . Los momentos que sean perpendiculares a la barra y dirigidos según el dibujo hacia fuera del papel, se tomarán positivos y en sentido contrario negativos.

$$m_b g \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \alpha - N_{pb} \cdot L \cdot \sin \alpha - F_{pb} \cdot L \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha - N_{bp} \sin \alpha - F_{bp} \cos \alpha = 0$$

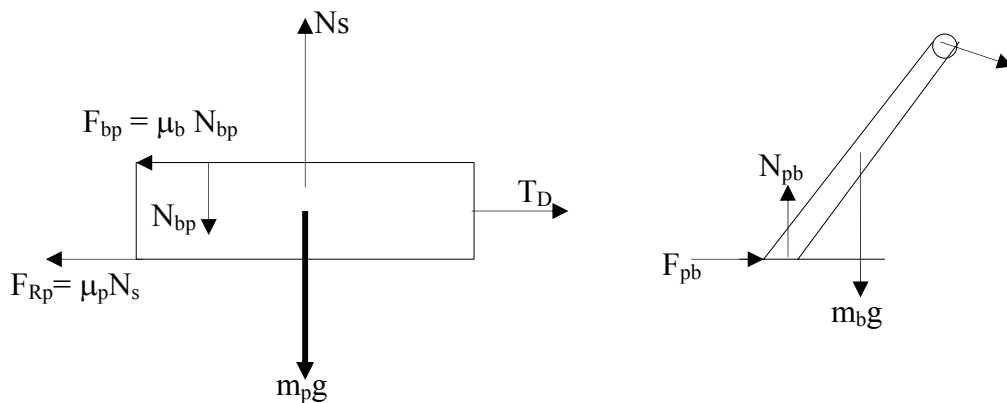
$$\Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha - N_{bp} \sin \alpha - \mu_b N_{bp} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{bp} = \frac{\frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu_b \cos \alpha}$$

Sustituyendo N_{bp} en la ecuación (1)

$$T_I - \mu_p m_p g - (\mu_p + \mu_b) \cdot \frac{m_b g \sin \alpha}{2(\sin \alpha + \mu_b \cos \alpha)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_I = \mu_p m_p g + (\mu_p + \mu_b) \cdot \frac{m_b g \sin \alpha}{2(\sin \alpha + \mu_b \cos \alpha)} \quad (2)$$

b) El diagrama de fuerzas cuando la plancha desliza hacia la derecha



Aplicando de nuevo las condiciones $\sum \vec{F} = 0$ a la plancha y $\sum \vec{M} = 0$ a la barra, resulta:

$$T_D - \mu_p (m_p g + N_{bp}) - \mu_b N_{bp} = 0 \quad (1)$$

$$m_b g \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \alpha - N_{pb} \cdot L \cdot \sin \alpha + F_{pb} \cdot L \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha - N_{bp} \sin \alpha + F_{bp} \cos \alpha = 0$$

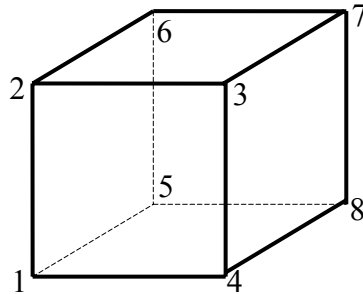
$$\Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha - N_{bp} \sin \alpha + \mu_b N_{bp} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{bp} = \frac{\frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha - \mu_b \cos \alpha}$$

Si se compara con las ecuaciones anteriores resulta que la única diferencia es cambiar un signo más por uno menos.

$$T_D = \mu_p m_p g + (\mu_p + \mu_b) \cdot \frac{m_b g \sin \alpha}{2(\sin \alpha - \mu_b \cos \alpha)} \quad (3)$$

Si se compara T_I con T_D resulta que siempre $T_D > T_I$, además puede ocurrir que T_D sea infinito si se cumple que $\sin \alpha = \mu_b \cos \alpha \Rightarrow \mu_b = \tan \alpha$, con lo cual es imposible deslizar la plancha hacia la derecha si $\mu_b \geq \tan \alpha$.

150.- En el cubo de la figura cada lado tiene una resistencia R . Hallar la resistencia equivalente cuando el cubo se conecta entre a) 1 y 7 b) entre 1 y 2 c) entre 1 y 3.



a) Supongamos que la corriente de intensidad I , llega por 1 y sale por 7. Al llegar a 1 se reparte por tres ramas (1-2; 1-4; 1-5). Para llegar a 7 tenemos los siguientes caminos. 1267 ; 1487 y 1567, por los tres caminos se recorren las mismas resistencias. Por tanto, cuando I se divide en 1, las intensidades por 1-2; 1-4 y 1-5 son las mismas y las designamos con i .

$$I = 3i$$

Por 7 debe salir la misma corriente que entra por 1, luego las corrientes que llegan a 7 tienen que ser i por cada ramal 6-7, 3-7 y 8-7.

Por simetría, al dividirse las corrientes en 4, 5 y 2 por cada rama la intensidad es $i/2$. La figura 1 indica las corrientes en cada rama.

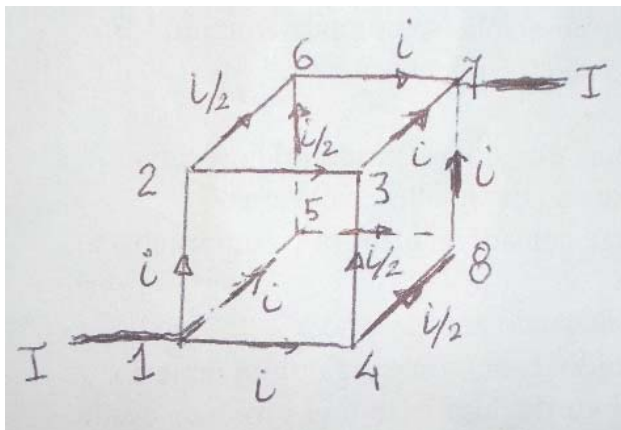


Fig.1

De la figura 1 se deduce

$$V_1 - V_7 = (V_1 - V_4) + (V_4 - V_3) + (V_3 - V_7) \Rightarrow IR_E = iR + \frac{i}{2}R + iR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3iR_E = i\left(2R + \frac{R}{2}\right) \Rightarrow R_E = \frac{5R}{6}$$

b) La corriente I penetra por 1 y sale por 2. . Al dividirse la corriente en 1, los caminos 1432 y 1562 son equivalentes, por tanto, las corrientes 1-4 y 1-5 son iguales y las designamos con i . El camino de 1-2 es diferente a los dos anteriores y lo designamos con j .

$$I = 2i + j$$

La corriente i de 1-4 al llegar a 4 se bifurca y designamos con k a la corriente por 4-8 y por $i-k$ a la corriente por 4-3..

En la cara 1584 se cumple:

$$I_{1-5}R + I_{5-8} + I_{8-4} + I_{4-1} = 0 \Rightarrow iR + I_{5-8}R - kR - iR = 0 \Rightarrow I_{5-8} = k$$

De lo anterior se deduce que $I_{8-7} = 2k$ y $I_{5-6} = i - k$

En la cara 4378 se cumple $(i - k)R - I_{3-7}R - 2kR - kR = 0 \Rightarrow I_{3-7} = i - 4k$

Si la corriente entrase por 2 y saliese por 1 sería semejante a que entrase por 1 y saliese por 2, luego si entra por 1 y sale por 2, $I_{6-2} = i$ e $I_{3-2} = i$

En el nudo 3 : $I_{4-3} + I_{3-7} = I_{3-2} \Rightarrow (i - k) + (i - 4k) = i \Rightarrow i = 5k$

En la cara 1256

$$I_{1-2}R + I_{2-6}R + I_{6-5}R + I_{5-1}R = 0 \Rightarrow j - i - i + k - i = 0 \Rightarrow j = 3i - k \Rightarrow j = 14k$$

En la figura 2 aparecen las corrientes.

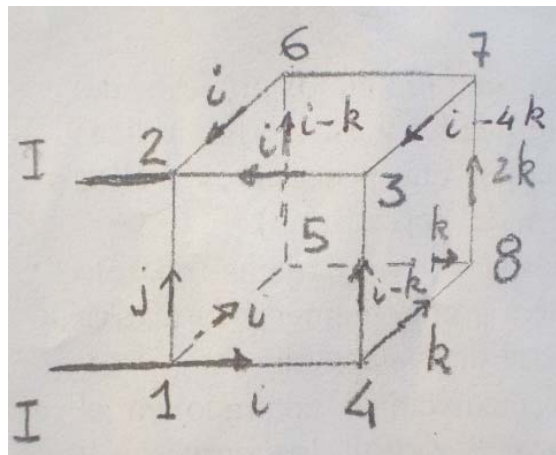


Fig.2

$$I \cdot R_E = V_{12} \Rightarrow (2i + j) \cdot R_E = j \cdot R \Rightarrow R_E = \frac{j}{2i + j} R = \frac{14k}{24k} R = \frac{7}{12} R$$

c) La corriente I entra por 1 y en ese nudo se divide en dos corrientes de valor i cada una i, y una tercera de valor j.

$$I = 2i + j$$

Al salir la corriente por el vértice 7 llegan a él las corrientes i y j para que se cumpla la ecuación anterior. Esto trae como consecuencia que la intensidad por 4-8 sea nula y también la 2-6.

Cara 4378 $iR - jR - I_{87}R = 0 \Rightarrow I_{87} = i - j$

Nudo 7 $(i - j) - I_{67} = j \Rightarrow I_{67} = 2j - i$

$$(2i + j)R_E = iR + 0 \cdot R + (i - j)R + jR = 2iR \Rightarrow R_E = \frac{2i}{2i + j}$$

$$\text{Cara 1584} \quad jR + (j - v)R - iR = 0 \Rightarrow v = 2j - i$$

$$\text{Cara 5678} \quad vR + (2j - i)R - (i - j)R - (j - v)R = 0 \Rightarrow v = i - j$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce:

$$2j - i = i - j \Rightarrow j = \frac{2}{3}i$$

$$R_E = \frac{2i}{2i + 2j} R = \frac{2i}{2i + 2 \cdot \frac{2}{3}i} R = \frac{3R}{4}$$

En la figura 3 se indican las corrientes.

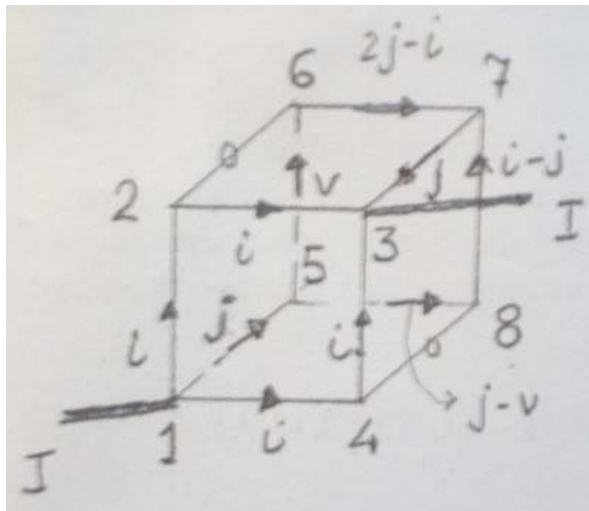
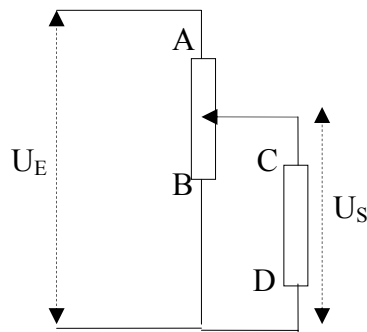


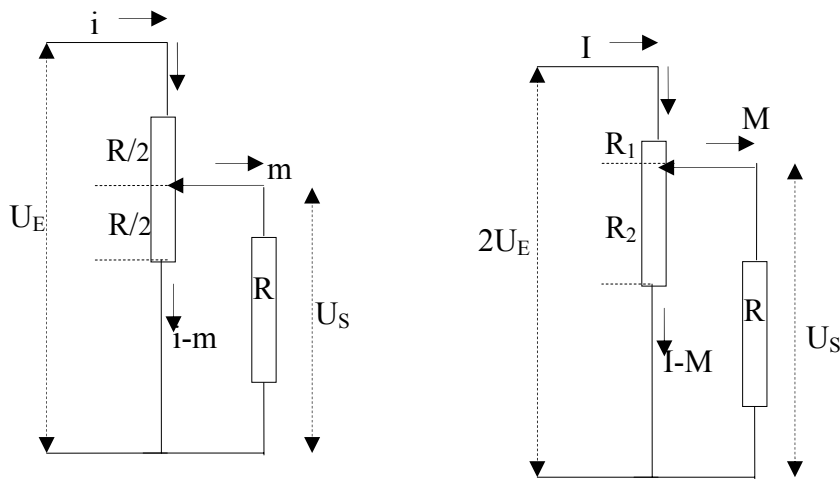
Fig.3

La aceleración absoluta: $\vec{a} = -\omega^2(1 - v_o t)\vec{i}' - 2\omega v_o \vec{j}'$

152.- En el circuito de la figura inferior AB es un potenciómetro de resistencia total R y CD es una resistencia de carga de valor R. Si el cursor del potenciómetro se coloca en la mitad de éste y se aplica una tensión U_E a la entrada, la tensión de salida en la resistencia de carga es U_S . Ahora se duplica la tensión de entrada pero se quiere mantener la de salida y se pregunta cómo se ha de desplazar el cursor para lograrlo.



Cuando la tensión de entrada es $2U_E$, designamos con R_1 y R_2 a las resistencias del potenciómetro por encima y por debajo del cursor, como indica a figura 1. En la misma figura se indican las intensidades de corriente, en el caso primero y en el segundo.



Caso primero

Fig.1

Caso segundo

De la figura 1 se deduce que R_2 y R se encuentran en paralelo, siendo, por tanto, su resistencia equivalente igual a $\frac{R_2 R}{R_2 + R}$. Esta resistencia equivalente está en serie con R_1 , luego la resistencia total es

$$R_{T2} = R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R}$$

En el caso primero: $R_1 = R_2 = \frac{R}{2} \Rightarrow R_{T1} = \frac{R}{2} + \frac{\frac{R}{2} \cdot R}{\frac{R}{2} + R} = \frac{5R}{6}$

$$U_E = i \cdot R_{T1} = \frac{5}{6}iR \quad (1)$$

En la malla inferior $mR - (i - m)\frac{R}{2} = 0 \Rightarrow i = 3m \Rightarrow U_S = mR = \frac{i}{3}R \quad (2)$

Para el caso segundo: $IR_1 + MR = 2U_E$

En la malla inferior: $IR - (I - M)R_2 = 0 \Rightarrow M = \frac{IR_2}{R + R_2}; U_S = MR = \frac{IR_2 R}{R + R_2} \quad (3)$

En todo el circuito: $2U_E = I \cdot R_{T2} = I \left(R_1 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \right) \quad (4)$

Combinado las ecuaciones (1) y (4)

$$2 \cdot \frac{5}{6}iR = I \left(R_1 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \right) \Rightarrow \frac{5iR}{3} = I \left(R - R_2 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \right) \quad (5)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3)

$$\frac{iR}{3} = I \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \quad (6)$$

De (5) y (6)

$$5I \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} = I \left(R - R_2 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \right) \Rightarrow 4 \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} = R - R_2$$

Establecemos que R_2 es una fracción de R , esto es, $R_2 = \alpha R$

$$4 \frac{\alpha R^2}{\alpha R + R} = R - \alpha R \Rightarrow 4 \frac{\alpha R}{1 + \alpha} = R(1 - \alpha) \Rightarrow 4\alpha = 1 - \alpha^2$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

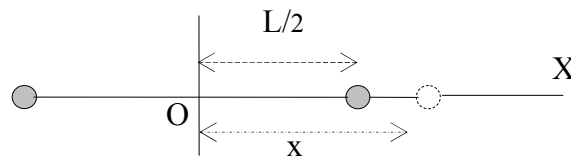
$$\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

La solución válida del problema es: $R_2 = \alpha \cdot R = (\sqrt{5} - 2)R$

153.- Dos cargas eléctricas puntuales, e iguales y del mismo signo, se encuentran en reposo a una distancia L . Se dejan en libertad con velocidad inicial nula y se determina que al cabo de un tiempo t_1 se encuentran a una distancia $2L$. Si las mismas cargas estuviesen en reposo a una distancia inicial $3L$ y se dejarasen en libertad con velocidad inicial cero, al cabo de un tiempo t_2 se encontrarían a una distancia $6L$. Calcular la relación entre ambos tiempos.

En ambos caso las cargas se mueven debido a que cada una sufre la acción de una fuerza de repulsión, cuya característica es la de ser variable, pues varía con el inverso del cuadrado de la distancia, y a medida que se alejan las cargas entre sí la fuerza disminuye.

Analicemos el primer caso



Inicialmente cada carga dista $L/2$ de un origen de coordenadas OX , dicho origen se ha situado en el medio de las cargas. Al dejar dichas cargas en libertad, una se desplaza hacia la derecha y otra a la izquierda. Por simetría siempre tendrán el mismo módulo de velocidad y estarán a la misma distancia de O .

Cuando la distancia x a O sea $x = L/2 + L/2 = L$, la distancia entre las cargas es $2L$.

Supongamos que la carga de la derecha se encuentra en un momento determinado a la distancia x de O . En ese instante actuará sobre ella una fuerza de repulsión de valor

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2x)^2}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x^2} &= m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} \Rightarrow \int \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x^2} dx = \int mv dv \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right) = m \frac{v^2}{2} + Cte \quad (1) \end{aligned}$$

Según el enunciado del problema cuando $x=L/2$ su velocidad es cero, por tanto

$$\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{L} \right) = Cte \Rightarrow v = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{L} - \frac{1}{x} \right)} \quad (2)$$

Nota.- Esto se podría hacer por la ecuación de la energía. $W = \Delta E_C$, calculando el trabajo realizado por la fuerza electrostática desde la posición inicial en la que $v_0 = 0$; hasta la posición x , en la que la velocidad es v .

$$\int_{\frac{L}{2}}^x \frac{q}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} mv^2 - 0$$

Si analizamos el segundo caso, llegamos a la misma ecuación (1), aunque ahora varía la constante, ya que cuando $x = 3L/2$ la velocidad es cero

$$\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{3L} \right) = \text{Cte} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{3L} - \frac{1}{x} \right)} \quad (3)$$

Cuando $x=(3L/2)+(3L/2)=3L$, la distancia entre las cargas es $6L$.

Por claridad, a partir de ahora, designamos a la velocidad en el primer caso por v_1 y por v_2 en el segundo caso y a la variable x por x_1 y en el primer caso y x_2 en el segundo caso.

Supongamos que para el caso 1 un cuerpo se desplazase con velocidad media constante y recorriese la distancia $L/2$ en el tiempo t_1 .

$$\frac{L}{2} = v_{m(1)} \cdot t_1$$

Hagamos lo mismo para el caso 2.

$$\frac{3L}{2} = v_{m(2)} t_2$$

Dividiendo ambas ecuaciones

$$\frac{\frac{L}{2}}{\frac{3L}{2}} = \frac{1}{3} = \frac{v_{m(1)} t_1}{v_{m(2)} t_2} \Rightarrow t_2 = 3 \frac{v_{m(1)}}{v_{m(2)}} t_1 \quad (4)$$

La ecuación (2) la aplicamos cuando $x=x_1=L$, esto es, cuando la distancia entre las cargas es $2L$.

$$v_1(t_1) = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{L} - \frac{1}{L} \right)} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{L}}$$

La ecuación (3) la aplicamos cuando $x=x_2=3L$, esto es, cuando la distancia entre las cargas es $6L$.

$$v_2(t_2) = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{3L} - \frac{1}{3L} \right)} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{3L}}$$

El cociente de estas velocidades instantáneas es:

$$\frac{v_1(t_1)}{v_2(t_2)} = \frac{\sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{L}}}{\sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{3L}}} = \sqrt{3}$$

Si escogiésemos para el primer caso cuando la carga ha recorrido la mitad del camino, esto es, cuando $x_1=L/2+L/4=3L/4$, la velocidad instantánea en ese lugar es:

$$v_1(3L/4) = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{L} - \frac{4}{3L} \right)} = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3L}}$$

Si escogiésemos para el segundo caso cuando la carga ha recorrido la mitad del camino, esto es, cuando $x_2 = 3L/2 + 3L/4 = 9L/4$, la velocidad instantánea en ese lugar es:

$$v_2(9L/4) = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{3L} - \frac{4}{9L} \right)} = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{9L}}$$

El cociente entre esas velocidades instantáneas:

$$\frac{v_1(3L/4)}{v_2(9L/4)} = \sqrt{3}$$

Escogiendo cuando en cada caso la carga ha recorrido $1/4$ o $1/8$ o $1/16$ de su camino el cociente entre las velocidades instantáneas es $\sqrt{3}$, en consecuencia, también tienen que guardar la misma proporción las velocidades medias que aparecen en la ecuación (4).

$$t_2 = 3 \frac{v_{m(1)}}{v_{m(2)}} t_1 = 3\sqrt{3} t_1$$