PROBLEMAS VARIADOS 19

154.-Un satélite de la Luna se encuentra a una altura h de su centro. Va provisto de una cámara fotográfica de distancia focal 500 mm. En la Tierra existe una cámara igual a la anterior. Se realizan al mismo tiempo dos fotografías de la Luna, una desde la Tierra y otra desde el satélite. Los diámetros de la imagen de la Luna obtenidos en cada caso son d_1= 4,5 mm y d_2=250 mm. Determinar el periodo de rotación del satélite.
La intensidad del campo gravitatorio en la Luna es 1/6 del de la Tierra. La distancia Tierra Luna es D = 380000 km.

La distancia Tierra-Luna es tan grande que en la cámara fotográfica situada en la Tierra se obtendrá una fotografía completa de la Luna y la imagen está situada en el plano focal.

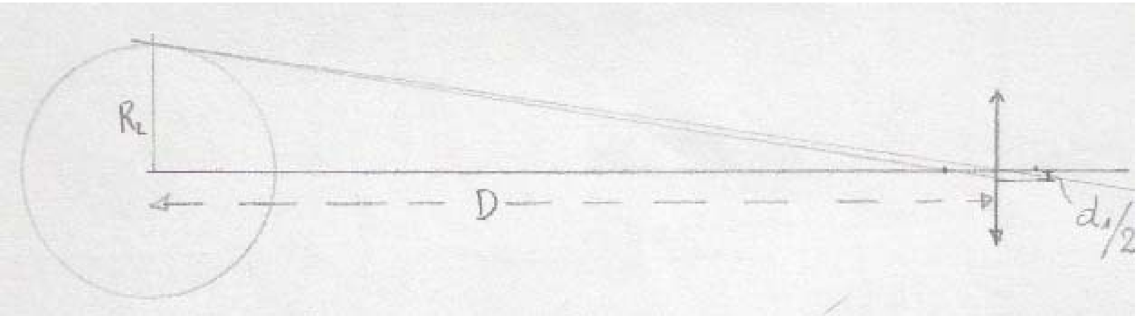


Fig.1

La figura 1 es un dibujo (no a escala) cuando la fotografía se hace desde la Tierra. De los triángulos se deduce:

$$\frac{D}{R_L} = \frac{f}{\frac{d_1}{2}} \quad \Rightarrow \quad R_L = \frac{D d_1}{2f} = \frac{380000\text{km} \cdot 4{,}5.10^{-3}\,\text{m}}{2 \cdot 500.10^{-3}} = 1710\,\text{km}$$

Cuando la fotografía se hace desde el satélite no se puede abarcar toda la Luna sino una parte de ella, como indica la figura 2 (no está a escala).

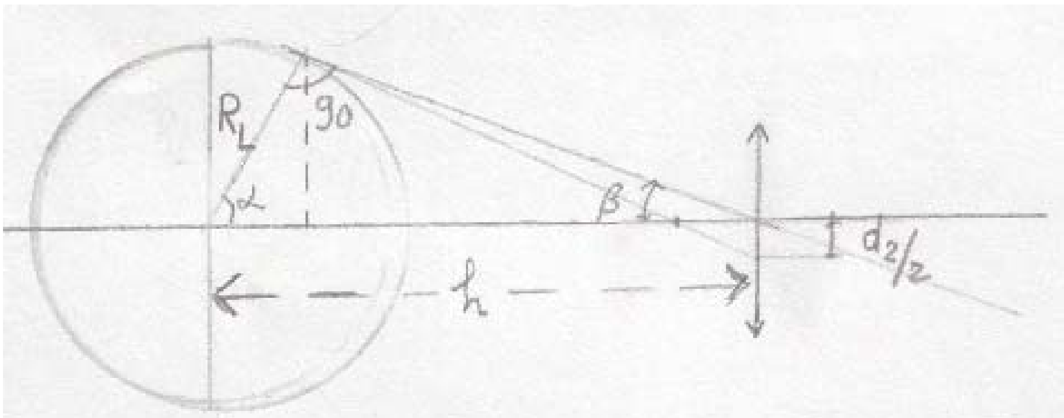


Fig.2

El ángulo α es complementario del β. De la figura 2 se deduce: $\operatorname{sen}\beta = \frac{R_L}{h}$

$$\frac{h - R_L \operatorname{sen}\beta}{R_L \cos\beta} = \frac{f}{\frac{d_2}{2}} = \frac{2f}{d_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{h - R_L \cdot \frac{R_L}{h}}{R_L\sqrt{1-\frac{R_L^2}{h^2}}} = \frac{2f}{d_2} \Rightarrow \frac{\frac{h^2 - R_L^2}{h}}{\frac{R_L}{h}\sqrt{h^2 - R_L^2}} = \frac{2f}{d_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{h^2 - R_L^2}}{R_L} = \frac{2f}{d_2} \Rightarrow h^2 - R_L^2 = \frac{4f^2}{d_2^2}R_L^2 \Rightarrow h = R_L\sqrt{1+\frac{4f^2}{d_2^2}} = 1710\text{km}\sqrt{1+\frac{4.(500.10^3)^2}{\left(250.10^3\right)^2}}$$

$$h = 1710\text{km}\cdot\sqrt{17} = 7051\text{km}$$

La fuerza de atracción gravitatoria entre la Luna y el satélite de masa m´, (despreciando la atracción de la Tierra sobre el satélite por encontrarse muy lejos) proporciona la fuerza centrípeta a éste.

$$G\frac{M_L m'}{h^2} = \frac{m'v^2}{h} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_L}{h}} = \frac{2\pi h}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi h\sqrt{\frac{h}{GM_L}}$$

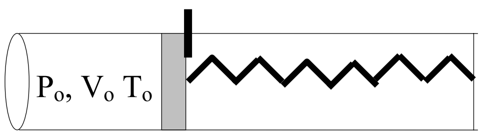
La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna es:

$$g_L = \frac{GM_L}{R_L^2} \quad \Rightarrow \quad GM_L = g_L R_L^2$$

El periodo de rotación del satélite vale:

$$T = 2\pi h\sqrt{\frac{h}{g_L R_L^2}} = \frac{2\pi h}{R_L}\sqrt{\frac{h}{g_L}} = \frac{2\pi 7051}{1710}\sqrt{\frac{7051.10^3}{\frac{9,8}{6}}} = 5,4.10^4\,\text{s} \approx 15\,\text{horas}$$

155.- En la figura inferior el cilindro lleva un émbolo que se puede desplazar sin rozamiento. Inicialmente el émbolo se encuentra sujeto y el muelle tiene su longitud natural (no está estirado ni comprimido). En la parte izquierda existe un mol de gas perfecto cuyas coordenadas termodinámicas son (P_o, T_o , V_o). En la parte derecha se ha hecho el vacío y el sistema está termoaislado. Si se deja en libertad el émbolo, el gas adquiere un volumen $2V_o$. Calcular los valores de la temperatura y presión del gas, suponiendo despreciables los calores específicos del émbolo y del cilindro.



Al dejar en libertad el émbolo el gas se expansiona hasta un volumen 2Vo y adquiere una presión P_f y una temperatura T_f. El muelle se comprime una longitud Δx. En consecuencia el muelle almacena una energía potencial elástica de valor $\frac{1}{2}k\,\Delta x^2$.

De acuerdo con el primer principio de la termodinámica $\Delta U = Q + W$, y al estar el sistema termoaislado, Q=0 . La disminución de energía interna del gas es igual al trabajo realizado, y ese trabajo se acumula en energía potencial en el muelle.

$$\Delta U = C_V\left(T_f - T_o\right) = -\frac{1}{2}k\,\Delta x^2 \qquad (1)$$

El signo menos aparece porque según el criterio termodinámico, el trabajo realizado por el gas contra el exterior es negativo.

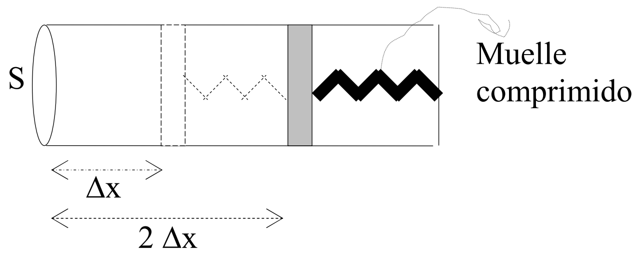


Fig.1

En la figura 1, designamos con S la sección de la base del cilindro. Δx es la altura inicial cuando el émbolo está sujeto, por tanto, $V_o = S \cdot \Delta x$. El émbolo está en equilibrio y en dirección horizontal actúan de izquierda a derecha la fuerza que ejerce el gas de valor $P_f S$, y de derecha a izquierda la fuerza con que el muelle empuja al émbolo de valor $k\,\Delta x$. Estas dos fuerzas son iguales en módulo, puesto que el émbolo está en equilibrio.

$$P_f S = k\,\Delta x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P_f S}{\Delta x} = \frac{P_f V_o}{\Delta x^2}$$

Por otra parte de la ecuación de estado del gas ideal, se cumple que

$$P_f \cdot 2V_o = RT_f \;\Rightarrow\; P_f = \frac{RT_f}{2V_o} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\frac{RT_f}{2V_o} \cdot V_o}{\Delta x^2} = \frac{RT_f}{2\,\Delta x^2}$$

Llevando el valor de k a la ecuación (1)

$$C_V\left(T_f - T_o\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R\,T_f}{2\Delta x^2} \cdot \Delta x^2 = -\frac{R\,T_f}{4} \Rightarrow T_f\left(C_V + \frac{R}{4}\right) = C_V T_o \Rightarrow \qquad T_f = \frac{T_o}{\left(1 + \frac{R}{4C_V}\right)}$$

En la ecuación de los gases perfectos

$$P_f \cdot 2V_0 = RT_f = R\left(\frac{T_o}{1+\frac{R}{4C_v}}\right) \Rightarrow P_f = \frac{RT_o}{2V_o\left(1+\frac{R}{4C_v}\right)} = \frac{P_oV_o}{2V_o\left(1+\frac{R}{4C_v}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P_f = \frac{P_o}{2\left(1+\frac{R}{4C_v}\right)}$$

***156.- Se lanza un cuerpo de masa m, considerado puntual, con una velocidad inicial vertical v_o. La resistencia que opone el medio es directamente proporcional a la velocidad R = kv.* Se considera despreciable el empuje de Arquímedes sobre el cuerpo al ser puntual.**

a) Determinar la ecuación que relaciona la velocidad con el tiempo

b) Dibujar juntas las gráficas de la velocidad en el caso indicado y si no hubiese resistencia del medio.

c) Calcular para ambos casos la altura alcanzada por la masa m.

Datos g = 10 m/s², k=0,4 Ns/m , v_o = 20 m/s, m= 1 kg

a) Al ascender el cuerpo existen dos fuerzas verticales dirigidas hacia abajo. Si $\vec{k}$ es el vector unitario en dirección vertical y hacia arriba, escribimos de acuerdo con la segunda ley de Newton

$$(mg+kv)(-\vec{k}) = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad -(mg+kv) = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \quad dt = -\frac{dv}{\left(g+\frac{k}{m}v\right)}$$

Para resolver la ecuación diferencial hacemos el siguiente cambio de variable: $g+\frac{k}{m}v = \rho$ y de aquí

$$\frac{k}{m}dv = d\rho$$

Sustituyendo

$$\int dt = -\int \frac{\frac{m}{k}d\rho}{\rho} \Rightarrow t = -\frac{m}{k}\ln\rho + Cte = -\frac{m}{k}\ln\left(g+\frac{k}{m}v\right) + cte$$

Según las condiciones iniciales, cuando t =0, v = velocidad inicial = v_0

$$cte = \frac{m}{k}\ln\left(g+\frac{k}{m}v_o\right)$$

La ecuación del tiempo

$$t = \frac{m}{k}\ln\frac{g+\frac{k}{m}v_o}{g+\frac{k}{m}v} \Rightarrow \quad e^{\frac{kt}{m}} = \frac{g+\frac{k}{m}v_o}{g+\frac{k}{m}v} \Rightarrow g+\frac{k}{m}v = \left(g+\frac{k}{m}v_o\right)e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow$$

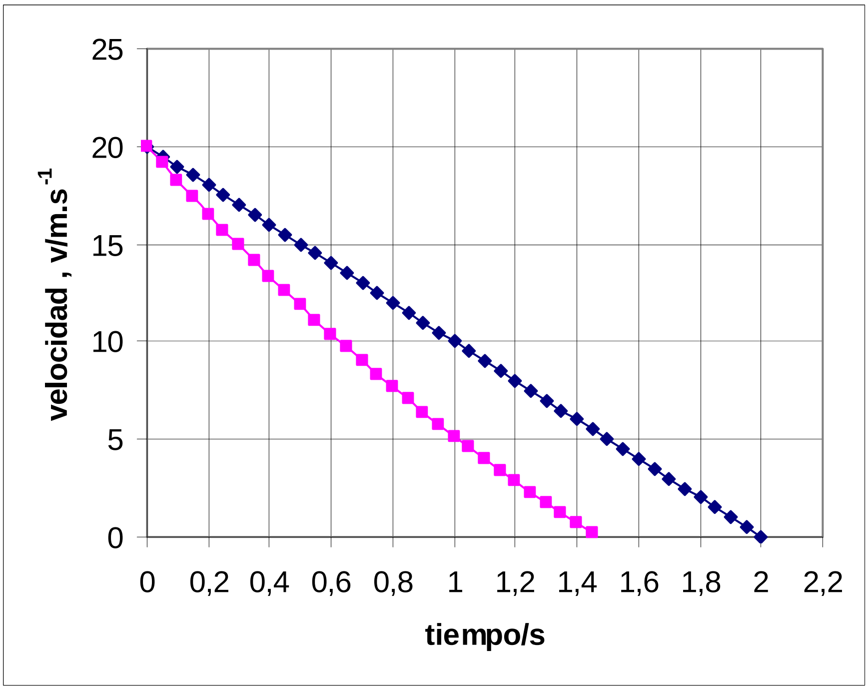
$$v = \frac{m}{k}\left(g+\frac{k}{m}v_o\right)e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} \qquad (1)$$

b) Sustituimos los datos del problema en la ecuación (1)

$$v=\frac{1}{0{,}4}\left(10+\frac{0{,}4}{1}\cdot 20\right)e^{-\frac{0{,}4}{1}t}-\frac{1}{0{,}4}\cdot 10=45\cdot e^{-0{,}4t}-25$$

Si no hubiese fuerza resistente, el movimiento de subida es uniformemente retardado

$$v=20-10\,t$$



c) Para determinar la altura alcanzada es necesario conocer previamente el tiempo que transcurre hasta que el móvil se para.

-Cuando no existe fuerza resistente es:

$$0=20-10\,t;\qquad t=2\,s;\qquad h=v_o t-\frac{1}{2}gt^2=20\cdot 2-5\cdot 2^2=20\text{ m}$$

-Cuando existe fuerza resistente:

τ significa el tiempo de subida, es decir, el tiempo que tarda en anularse la velocidad.

$$0=45\cdot e^{-0{,}4\tau}-25\;\Rightarrow\;\ln\frac{25}{45}=-0{,}4\,\tau\Rightarrow\;\tau=1{,}469\,s$$

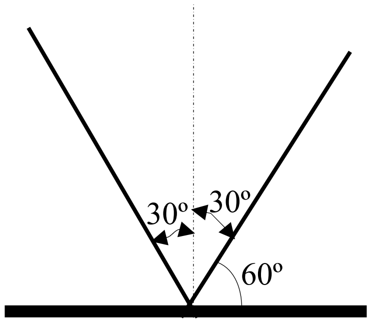
Sustituyendo en la ecuación de h´

$$h'=\int_o^\tau v\,dt=\int_o^\tau\left(45\cdot e^{-0{,}4t}-25\right)dt=45\cdot e^{-0{,}4t}\left(-\frac{1}{0{,}4}\right)-25t\Big|_o^\tau\Rightarrow$$

$$h'=-112{,}5\cdot e^{-0{,}4\tau}+112{,}5-25\tau$$

$$h'=-112{,}5\cdot e^{-0{,}4*1{,}469}+112{,}5-25\cdot 1{,}469=14{,}2\,\text{m}$$

157.- Dos planos forman entre sí un ángulo α = 60º y se disponen sobre un suelo horizontal en la forma que indica la figura inferior



Sobre estos planos se sitúa un cubo de arista a. Si no existe rozamiento entre el cubo y los planos, determinar cómo han de colocarse el cubo entre los planos para que se encuentre en equilibrio.

Para que el cubo se encuentre en equilibrio las fuerzas que actúen sobre él deben cumplir dos condiciones: una que la suma de esas fuerzas sea nula, otra que el momento resultante de las fuerzas respecto del centro de masas del cubo sea nulo.
Sobre el cubo actúan tres fuerzas, las dos reacciones de los planos y su peso. En la figura 1 se ha colocado el cubo en una determinada posición y se han dibujado las dos reacciones de los planos.

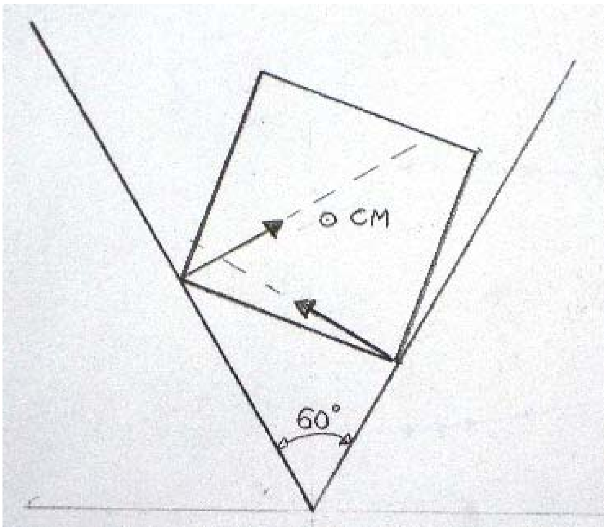


Fig.1

Las fuerzas de reacción de los planos sobre el cubo son perpendiculares a las respectivas paredes, ya que no existe rozamiento. En la figura 1 se observa que dichas fuerzas crean momentos respecto del centro de masas del cubo. Se infiere que solamente existen dos posiciones para las que los momentos sean nulos y ambas se encuentran dibujadas en la figura 2.

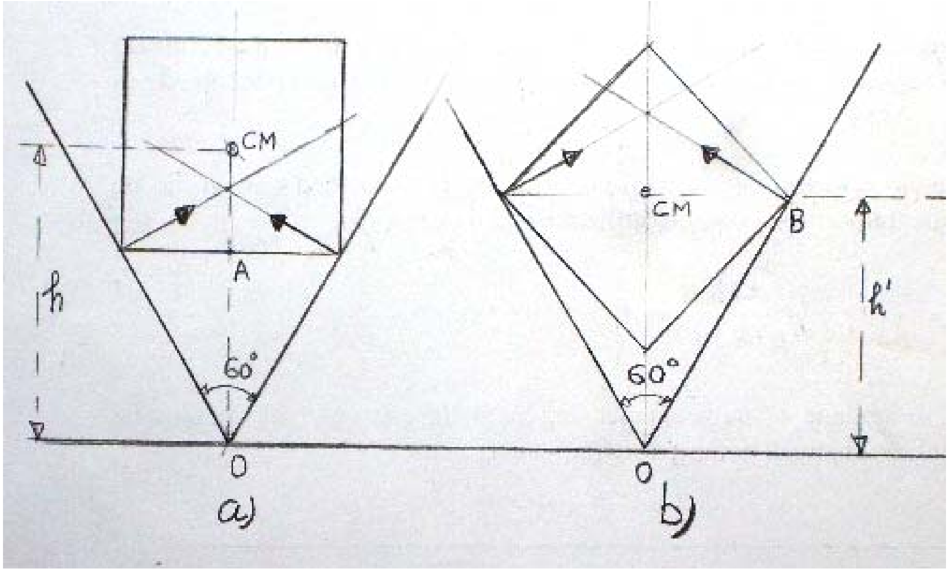


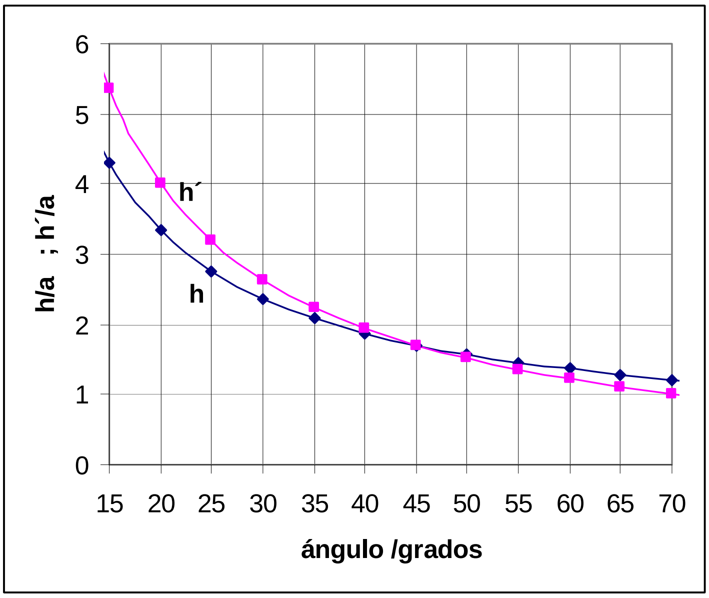
Fig.2

De las dos posiciones de equilibrio será estable la que tenga el centro de masa más bajo respecto del suelo horizontal. De la figura 2, dibujada a escala, se observa que es más estable la posición b).Calculamos las alturas del centro de masas (CM) en cada caso. Llamando α al ángulo que forman los planos entre sí.

$$h = OA + \overline{ACM} = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tag} 30}\right) = 1{,}366\,a$$

$$\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{CMB}}{h'} = \frac{a\sqrt{2}}{2h'} \Rightarrow \qquad h' = \frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tag} 30} = 1{,}225\,a$$

No siempre la posición b) tiene el centro de masas más bajo que la posición a). En la gráfica inferior se han representado los valores de h y h´ en función del ángulo alfa.



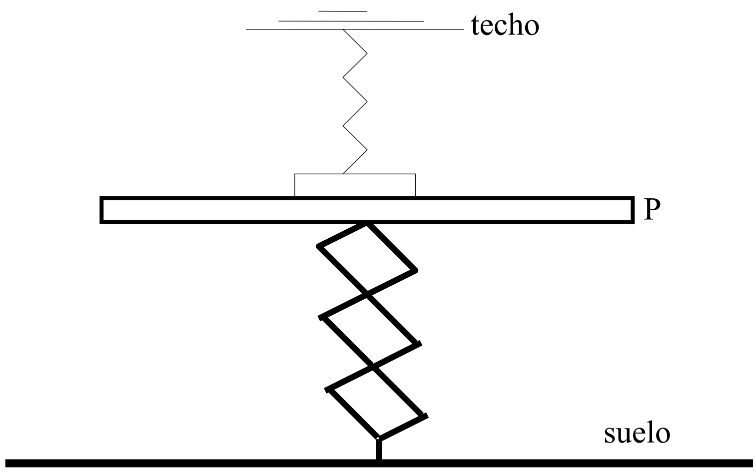
158.- En la figura inferior P es una plataforma que puede deslizarse verticalmente hacia abajo. Encima de ella está situado un cuerpo de masa m, unido a un muelle con uno de sus extremos fijo en el techo. Inicialmente el muelle no está estirado ni comprimido.

Si la plataforma comienza a moverse verticalmente hacia abajo con una aceleración a.

1) Determinar el alargamiento del muelle cuando el cuerpo se separe de la plataforma y el tiempo que transcurre.

2) El alargamiento máximo que experimenta el muelle.

3) Estudiar el movimiento del cuerpo a partir del alargamiento máximo del muelle.



1) En la figura 1 se representa el proceso:

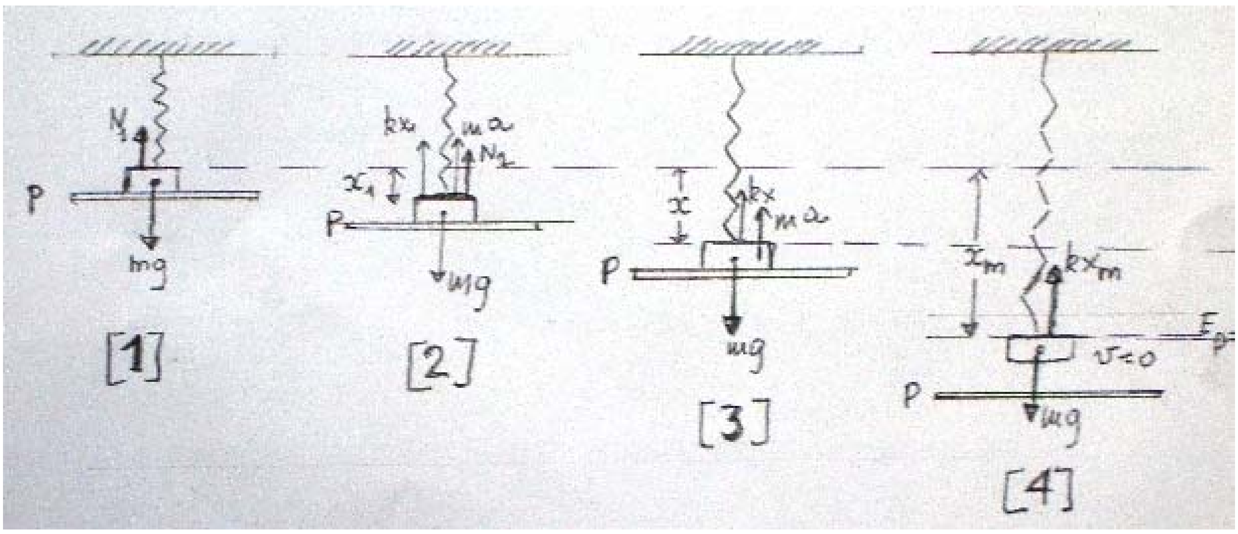


Fig.1

1) Estado inicial, tiempo t=0

2) La plataforma se ha desplazado hacia abajo una distancia x_1, todavía el cuerpo m está en contacto con la plataforma

3) Cuando el alargamiento del muelle es x, el cuerpo y la plataforma se separan, en ese instante la plataforma y el cuerpo poseen la velocidad v hacia abajo

4) Una vez separados plataforma y cuerpo, como éste tiene velocidad v hacia abajo se seguirá alargando el muelle hasta que la velocidad del cuerpo sea cero.

En (1) actúan sobre el cuerpo dos fuerzas el peso mg y la reacción N_1 que es la fuerza que ejerce la plataforma sobre el cuerpo, $N_1=mg$

En (2) situamos un sistema de referencia sobre el cuerpo, por tanto este referencial es no inercial. Sobre el cuerpo actúa el peso, mg vertical hacia abajo, la fuerza elástica del muelle, kx_1, la fuerza con que la plataforma empuja al cuerpo, N_2, y la fuerza inercial, ma. Estas tres fuerzas actúan en dirección vertical y hacia arriba. Para el observador no inercial, se cumple es su sistema de referencia, que la suma de todas estas fuerzas es igual a cero:

$$-mg + kx_1 + N_2 + ma = 0$$

En (3) el cuerpo está justamente desprendiéndose de la plataforma y en ese instante cesa la fuerza de reacción entre el cuerpo y la plataforma, y se cumple:

$$-mg + kx + ma = 0 \Rightarrow x = \frac{m(g-a)}{k}$$

En ese mismo instante la plataforma y el cuerpo poseen la velocidad v = at. Ambos se han movido con movimiento uniformemente acelerado y ha recorrido la distancia x

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ka}}$$

2) En (4) el cuerpo alcanza el máximo desplazamiento x_m y su velocidad es cero. Tomamos como nivel de referencia de la energía potencial la posición que ahora ocupa el cuerpo e igualamos las energías en (3) y (4). En tres existe energía elástica del muelle, energía potencial gravitatoria y energía cinética, en (4) energía elástica

$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}kx^2 + mg(x_m - x) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow x_m^2 = x^2 + \frac{2mg}{k}(x_m - x) + \frac{mv^2}{k}$$

Sustituimos x y v por sus respectivos valores:

$$x_m^2 - \frac{2mg}{k}x_m = \frac{m^2(g-a)^2}{k^2} - \frac{2mg}{k}\left[\frac{m(g-a)}{k}\right] + \frac{m}{k}a^2\left(\frac{2m(g-a)}{ka}\right) =$$

$$= \frac{m^2}{k^2}\left[(g-a)^2 - 2g(g-a) + 2a(g-a)\right] = \frac{m^2}{k^2}(g-a)(g-a-2g+2a) \Rightarrow$$

$$x_m^2 - \frac{2mg}{k}x_m = \frac{m^2}{k^2}(g-a)(-g+a) \Rightarrow x_m^2 - \frac{2mg}{k}x_m - \frac{m^2}{k^2}\left(-g^2 - a^2 + 2ag\right) = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$x_m = \frac{\frac{2mg}{k} \pm \sqrt{\frac{4m^2g^2}{k^2} + \frac{4m^2}{k^2}\left(-g^2 - a^2 + 2ag\right)}}{2} = \frac{mg}{k} \pm \frac{m}{k}\sqrt{a(2g-a)} \Rightarrow$$

$$x_m = \frac{m}{k}\left(g \pm \sqrt{a(2g-a)}\ \right)$$

De las dos soluciones de la ecuación debemos escoger aquella que haga $x_m > x$
Si $\sqrt{a(2g-a)} > a$ debemos elegir el valor positivo

$$a(2g-a) > a^2 \Rightarrow 2ga - a^2 > a^2 \Rightarrow 2g - a > a \Rightarrow 2g > 2a \Rightarrow g > a$$

Como es cierto que g es mayor que a, elegimos la raíz positiva

$$x_m = \frac{m}{k}\left(g + \sqrt{a(2g-a)}\right)$$

3) A partir de la posición de máxima elongación el cuerpo efectuará un movimiento vibratorio armónico, siendo su posición de equilibrio cuando el peso iguale a la fuerza elástica

$$mg = kx_o \Rightarrow \quad x_o = \frac{mg}{k}$$

x_o es el alargamiento del muelle respecto de la posición (1) de la figura 1. Si L es la longitud natural del muelle la posición de equilibrio dista del techo $L+x_o$.
La amplitud del movimiento es:

$$A = x_m - x_o = \frac{m}{k}\sqrt{a(2g-a)}$$

El periodo del movimiento: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

159.- Un kilogramo de agua hierve cuando la presión exterior es 1 atmósfera, transformándose íntegramente en vapor. Calcular la variación de entropía y de energía interna en el proceso. Se supone que el vapor de agua se comporta como un gas perfecto.
Dato : Calor de vaporización del agua λ = 2,25 kJ/g

La entropía es función de estado y por consiguiente su valor no depende del camino mediante el cual se realiza el proceso de ebullición del agua, podemos calcular la variación de entropía mediante la ecuación:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{1000\,g \cdot 2{,}25\,\frac{kJ}{g}}{373\,K} = 6{,}0\,\frac{kJ}{K}$$

La variación de energía interna viene dada por la ecuación $\Delta U = Q + W$

Q representa el calor suministrado al sistema $Q = 1000g \cdot 2{,}25\frac{kJ}{g} = 2{,}25.10^3\,kJ$

W es el trabajo que ejecuta el sistema y vale $-P \cdot \Delta V = -P\left(V_v - V_{L)}\right)$, siendo P la presión exterior, V_v el volumen del vapor de agua y V_L el volumen del líquido. El volumen del líquido es aproximadamente un litro y el volumen del vapor de agua lo calculamos mediante la ecuación de los gases perfectos

$$P\,V_v = \frac{g}{M}RT \Rightarrow V_v = \frac{g\,R\,T}{PM} = \frac{1000\,g \cdot 8{,}3\,\frac{J}{mol \cdot K} \cdot 373\,K}{101300\,\frac{N}{m^2} \cdot 18\,\frac{g}{mol}} = 1{,}70\,\frac{J \cdot m^2}{N} = 1{,}70\,\frac{N\,m^3}{N}$$

$$V_v = 1{,}70\,m^3$$

$$W = -101300\,\frac{N}{m^2}\left(1{,}70\,m^3 - 10^3\,m^3\right) = -1{,}72.10^2\,kJ \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Delta U = 2{,}25.10^3 - 1{,}72.10^2 = 2{,}1.10^3\,kJ$$