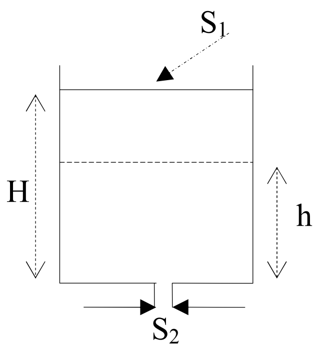
PROBLEMAS VARIADOS 2 (2011-2012)

251.- Un depósito de forma cilíndrica tiene agua hasta una altura de H=4 m, siendo el área de la base S_1= 3 m^2. En el fondo del mismo existe una válvula que al abrirla ofrece una sección S_2. Se abre la válvula del fondo y el depósito se vacía completamente en media hora.
Calcular:
a) el valor de S_2
b) La variación del nivel del agua con el tiempo.
c) La variación de la velocidad de salida del agua con el tiempo

Designamos con t, a la variable tiempo y tomamos t =0 en el instante cuando se abre la válvula y por tanto la altura del agua en el depósito es H= 4m. La altura del agua en el depósito es h, en cualquier instante posterior, al de la apertura de la válvula.



Sea v_1 la velocidad con que desciende el nivel del agua cuando está a la altura h y v_2 la velocidad de salida del agua por el fondo ; tomamos un nivel h = 0 en el fondo del depósito. Aplicando el teorema de Bernoulli.

$$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g 0 \Rightarrow \quad 2\,gh = v_2^2 - v_1^2$$

Según la ecuación de continuidad: $S_1\, v_1 = S_2 v_2$; $\quad v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$

$$2\,gh = v_2^2 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 v_2^2 = v_2^2\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right] \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2\,gh}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2\,ghS_1^2}{S_1^2 - S_2^2}} \quad (1)$$

Cuando transcurre un tiempo dt posterior a t, el nivel del depósito disminuye en dh y el volumen disminuye en dV y por este motivo hay que introducir un signo menos en la ecuación diferencial $dV = -S_1 dh$. Las variaciones de volumen y de altura en el depósito se relacionan con la variable tiempo del siguiente modo.

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{S_1 dh}{dt} = S_1\left(-\frac{dh}{dt}\right) = S_1 v_1 \Rightarrow \quad v_1 = -\frac{dh}{dt}$$

Como $v_1 = \frac{-dh}{dt} = \frac{S_2}{S_1} v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{dh}{dt}$

Sustituyendo en (1)

$$-\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{dh}{dt} = S_1 \sqrt{\frac{2g}{S_1^2 - S_2^2}} \cdot \sqrt{h}$$

Separando variables e integrando resulta:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{\frac{2gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \int dt \quad ; \qquad \sqrt{h} = -\sqrt{\frac{2gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \cdot t + Cte$$

De las condiciones iniciales, cuando t =0, h=H , por tanto, la constante vale: $Cte = \sqrt{H}$

$$\sqrt{h} = -\sqrt{\frac{2gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \cdot t + \sqrt{H} \quad ; \quad t = \frac{\sqrt{H} - \sqrt{h}}{\sqrt{\frac{2gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}}} = \sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{2gS_2^2}} \cdot \left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)$$

Cuando el depósito se vacía completamente t = 0,5 horas = 1800s y h=0

$$1800^2 = \frac{9 - S_2^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot S_2^2} \cdot \sqrt{4} \Rightarrow 6{,}35.10^7 S_2^2 = 18 - 2S_2^2 \Rightarrow S_2 = \sqrt{\frac{18}{6{,}35.10^7}} = 5{,}3.10^{-4} \, m^2$$

$$S_2 = 5{,}3 \, cm^2$$

252.- La distancia focal de una lente delgada biconvexa sumergida en un líquido A, índice de refracción n_1, es f_1 y sumergida en un líquido B, índice de refracción n_2, es f_2. a) Calcular el índice de refracción de la lente y su distancia focal en el aire en función de los datos anteriores.
b) Aplicar las ecuaciones obtenidas cuando: A = agua, índice de refracción, n_1= 1,33, f_1= 1,10 m ; B = disulfuro de carbono, índice de refracción, n_2=1,63 , f_2=10,10 m.
c)Calcular la potencia de la lente.

Aplicamos la ecuación de las lentes delgadas en los distintos medios, siendo R_1 y R_2 los radios de la lente biconvexa, n el índice de refracción de la lente y n´ el del medio en el que se encuentra:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n - n'}{n'}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Cuando la lente se encuentra en el aire n´= 1.

Aire: $$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad (1)$$

La distancia focal en el líquido A es f_1 y $n' = n_1$

Líquido A $$\frac{1}{f_1}=\left(\frac{n-n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad (2)$$

La distancia focal en el líquido B es f_2 y $n'= n_2$.

Líquido B $$\frac{1}{f_2}=\left(\frac{n-n_2}{n_2}\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) se deduce

$$\frac{n_1}{f_1(n-n_1)}=\frac{n_2}{f_2(n-n_2)} \quad \Rightarrow \quad f_2n_1n-f_2n_1n_2=f_1n_2n-f_1n_1n_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n(f_2n_1-f_1n_2)=n_1n_2(f_2-f_1) \quad \Rightarrow \quad n=\frac{n_1n_2(f_2-f_1)}{f_2n_1-f_1n_2} \quad (4)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce:

$$\frac{1}{f(n-1)}=\frac{n_1}{f_1(n-n_1)} \quad \Rightarrow \quad f_1n-f_1n_1=f\,n\,n_1-f\,n_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f=\frac{f_1n-f_1n_1}{n_1(n-1)} \quad \Rightarrow \qquad (5)$$

De la ecuación (5) despejamos n:

$$f\,n\,n_1-f\,n_1=f_1n-f_1n_1 \Rightarrow n(f\,n_1-f_1)=f\,n_1-f_1n_1 \Rightarrow n=\frac{f\,n_1-f_1n_1}{f\,n_1-f_1} \quad (6)$$

Igualamos las ecuaciones (4) y (6)

$$\frac{n_1n_2(f_2-f_1)}{f_2n_1-f_1n_2}=\frac{f\,n_1-f_1n_1}{f\,n_1-f_1} \Rightarrow n_1n_2(f_2-f_1)\cdot(f\,n_1-f_1)=(f\,n_1-f_1n_1)\cdot(f_2n_1-f_1n_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,n_1^2n_2\,f_2-n_1n_2\,f_2f_1-f\,n_1^2n_2\,f_1+n_1n_2f_1^2=f\,n_1^2f_2-f\,n_1n_2f_1-n_1^2f_1f_2+n_1n_2f_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,(n_1n_2f_2-n_1n_2f_1-n_1f_2+n_2f_1)=f_1f_2(n_2-n_1) \Rightarrow \qquad f=\frac{f_1f_2(n_2-n_1)}{n_1n_2(f_2-f_1)+n_2f_1-n_1f_2} \quad (7)$$

b)

$$n=\frac{1{,}33\cdot 1{,}63\cdot(10{,}1-1{,}1)}{10{,}1\cdot 1{,}33-1{,}1\cdot 1{,}63}=1{,}68$$

$$f = \frac{1{,}1 \cdot 10{,}1 \cdot (1{,}63 - 1{,}33)}{1{,}33 \cdot 1{,}63 \cdot (10{,}1 - 1{,}1) + 1{,}63 \cdot 1{,}1 - 1{,}33 \cdot 10{,}1} = 0{,}42\,\mathrm{m} = 42\,\mathrm{cm}$$

c) La potencia de la lente es la inversa de su distancia focal expresada en metros.

$$P = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}42} = 2{,}38\,\mathrm{D}$$; Se trata de una lente positiva o convergente.

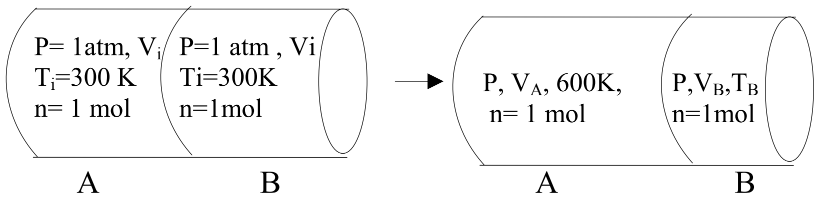
253.- Un cilindro rígido de paredes adiabáticas tiene un pistón, también adiabático, que se desplaza sin rozamiento dentro del cilindro. Inicialmente el pistón divide al cilindro en dos volúmenes iguales A y B que contienen cada uno de ellos un mol de gas ideal de C_v=20,9J/mol K, a la presión de 1 atmósfera y a 300 K de temperatura. En A existe un calentador que suministra energía de manera muy lenta al gas de A, hasta que su temperatura se eleva a 600 K. Se desprecian las capacidades caloríficas del pistón y del cilindro y se pide:

a) Presiones, volúmenes y temperaturas finales de ambos gases

b) Energía eléctrica suministrada

c) Variación de entropía en el proceso.

a) En la figura inferior se representan los estados inicial y final. Cuando se alcance un equilibrio, las presiones en los compartimientos A y B son iguales.



Estado inicial   Estado final

Calculamos el valor numérico del volumen inicial, aplicando la ecuación de los gases perfectos

$$1\,\mathrm{atm} \cdot V_i = 1 \cdot 0{,}082 \frac{\mathrm{atm\,L}}{\mathrm{mol\,K}} \cdot 300\mathrm{K} \Rightarrow V_i = 24{,}6\,\mathrm{L}$$

Cuando en el compartimento A se suministra energía el gas de ese lugar aumenta lentamente su temperatura y presión al mismo tiempo que el émbolo móvil se desplaza hacia la derecha comprimiendo al gas de B. El gas de B sufre un proceso adiabático ya que no intercambia calor con el exterior.

Aplicamos para ese gas entre los estados inicial y final la ecuación de una adiabática, relacionando la temperatura y el volumen.

$$300 \cdot 24{,}6^{\gamma-1} = T_B \cdot V_B^{\gamma-1}$$

De la ecuación de los gases perfectos aplicada a los gases de ambos lados, resulta:

$$\frac{1 \cdot 24{,}6}{300} = \frac{P \cdot V_A}{600} \; ; \qquad \frac{1 \cdot 24{,}6}{300} = \frac{P \cdot V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{600}{T_B}$$

Como el cilindro es de paredes rígidas

$$V_A + V_B = 2V_i = 2 \cdot 24{,}6 \text{ L} = 49{,}2 \text{ L} \Rightarrow V_A = 49{,}2 - V_B$$

Operando con estas tres ecuaciones

$$\frac{49{,}2 - V_B}{V_B} = \frac{600}{T_B} \Rightarrow T_B = \frac{600\,V_B}{49{,}2 - V_B} \Rightarrow 300 \cdot 24{,}6^{\gamma-1} = \frac{600\,V_B}{49{,}2 - V_B} V_B^{\gamma-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300 \cdot 24{,}6^{\gamma-1} = \frac{600\,V_B^{\gamma}}{49{,}2 - V_B} \quad (1)$$

El valor numérico del coeficiente adiabático lo calculamos a partir del dato del problema C_v. Recordando que $C_P - C_V = R$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{R + C_V}{C_V} = \frac{8{,}31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} + 20{,}9 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}}{20{,}9 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = 1{,}40$$

Si en la ecuación (1) sustituimos el valor de γ.

$$24{,}6^{0{,}40} = \frac{2\,V_B^{1{,}40}}{49{,}2 - V_B} \Rightarrow 1{,}80 = \frac{V_B^{1{,}40}}{49{,}2 - V_B}$$

La ecuación la resolvemos por tanteo

Si V_B=17 L el segundo miembro vale 1,64
Si V_B=18L el segundo miembro vale 1,83
Si V_B=17,8 L el segundo miembro vale 1,79

Tomando como solución de la ecuación el valor aproximado de 17,8 L resulta que:

$$V_A = 49{,}2 - 17{,}8 = 31{,}4 \text{ L} \quad ; \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{31{,}4}{17{,}8} = \frac{600}{T_B} \Rightarrow T_B = 340 \text{ K}$$

$$P \cdot 17{,}8 = 1 \cdot 0{,}082 \cdot 340 \Rightarrow P = 1{,}57 \text{ atm}$$

b) Escogemos como sistema termodinámico todo el cilindro y aplicamos el primer principio de la Termodinámica. Como el cilindro es de paredes rígidas no se ejerce trabajo sobre el exterior y por consiguiente:

$$\Delta U = Q \Rightarrow \Delta U_A + \Delta U_B = C_V(600 - 300) + C_V(340 - 300)) = 7{,}11.10^3 \text{ J}$$

c) La variación de entropía de un gas perfecto esta dada por la ecuación

$$\Delta S = n\,C_v \ln\frac{T_f}{T_i} + n\,R \ln\frac{V_f}{V_i}$$

Aplicamos la citada ecuación para los dos gases

$$\Delta S_A = 1\cdot 20{,}9\cdot \ln\frac{600}{300} + 1\cdot 8{,}31\cdot \ln\frac{31{,}4}{24{,}6} = 16{,}5\frac{J}{K};$$
$$\Delta S_B = 1\cdot 20{,}9\cdot \ln\frac{340}{300} + 1\cdot 8{,}31\cdot \ln\frac{17{,}8}{24{,}6} = -0{,}07\frac{J}{K}$$

La variación de entropía es:

$$\Delta S_T = \Delta S_A + \Delta S_B = 16{,}4\frac{J}{K}$$

254.- Un condensador plano está formado por dos armaduras verticales de superficie 8.10^{-3} m^2 y separadas entre sí por una distancia de d=1 cm. La masa de cada una de de las armaduras es m=100 gramos.
Se suministra a las armaduras cargas de Q = $+10^{-9}$ C y Q´ = -10^{-9} C.
Admitiendo que las armaduras se pueden desplazar libremente sin rozamiento y que las cargas citadas se mantienen constantes; determinar el tiempo que tardan en chocar las armaduras y la velocidad en ese instante.

La capacidad de un condensador plano, cuyas armaduras tienen una superficie S y están separadas una distancia x, está dada por la ecuación $C = \varepsilon_o \frac{S}{x}$ y la energía electrostática almacenada en el condensador es:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}C\frac{Q^2}{C^2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_o S}$$

Si la carga de las armaduras se mantiene constante, la energía del condensador depende directamente de la separación entre sus armaduras. Por ser el campo eléctrico un campo conservativo, la fuerza, se puede derivar de una función de energía potencial cambiada de signo y la relación de F con U nos permite escribir

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

La fuerza F actúa sobre cada una de las armaduras tiende a atraerlas por estar cargadas de signo contrario, de modo que ellas, si se pueden desplazar libremente, se acercan una a la otra con movimiento uniformemente acelerado, ya que la fuerza como se ve en la ecuación anterior es constante y al chocar, cada una de ellas ha debido recorrer una distancia d/2 cm.

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o Sm} \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{1}{2}a\,t^2 = t = \sqrt{\frac{d}{a}} = \sqrt{\frac{d\cdot 2\varepsilon_o Sm}{Q^2}} \Rightarrow$$

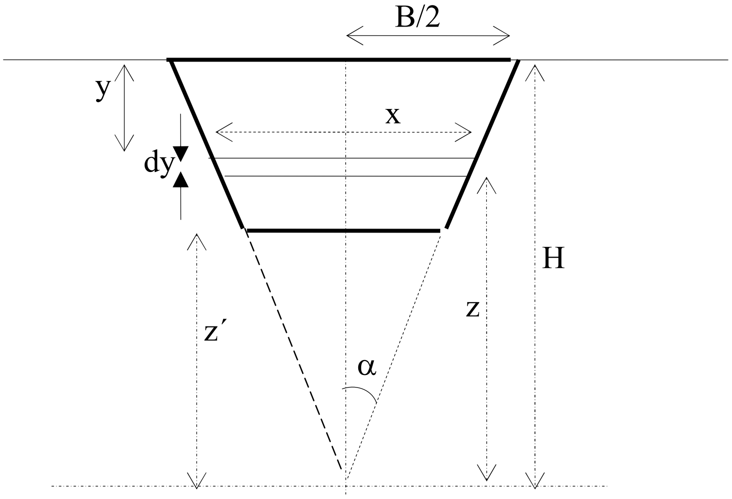
$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}\cdot 8.85.10^{-12}\cdot 8.10^{-3}\cdot 0{,}1}{\left(10^{-9}\right)^2}} = 11{,}9\,s$$

Partiendo del reposo su velocidad inicial es nula.

$$v = at = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o Sm}\cdot 11{,}9 = \frac{\left(10^{-9}\right)^2}{2\cdot 8.85.10^{-12}\cdot 8.10^{-3}\cdot 0{,}1}\cdot 11{,}9 = 8{,}4.10^4\frac{m}{s}$$

255.- Una compuerta metálica tiene forma de trapecio isósceles de base mayor B, menor b y altura h. Se encuentra sumergida en agua de manera que la base mayor está justamente sobre la superficie del agua. Calcular la fuerza que soporta dicha compuerta por la presión ejercida por el agua y determinar la posición del centro de presiones.
Realizar los cálculos numéricos para B=2m; b=1m y h=0,80 m.

En la figura se representa la compuerta y sobre ella se establece una superficie elemental dS, de altura dy y longitud x. que dista de la superficie del agua una distancia y. Tanto y como x son variables ya que depende del lugar de la compuerta donde se elija colocar la superficie dS.



La presión que actúa sobre la superficie dS vale : $p = \rho\, g\, y$, siendo: ρ la densidad del agua, e y, la distancia hasta la superficie libre. La fuerza que obra sobre la superficie dS es:

$$dF = pdS = \rho\, g\, y \cdot x\, dy$$

La fuerza sobre toda la compuerta es la suma de todas las fuerzas elementales que actúan sobre toda la compuerta de altura h y se calcula mediante una integral:

$$F_T = \int_0^h \rho\, g\, x\, y dy$$

Ahora bien, como se observa en la figura las dos variable x e y están relacionadas por la ecuación de una recta y para resolver la integral hemos de poner la variable x en función de y. En la figura se han prolongado los lados iguales de la compuerta y se ha trazado la vertical que pasa por la mitad de las distancias: B, b, y x.

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{B}{2H} = \frac{b}{2z'} = \frac{x}{2z} \quad \Rightarrow ; \frac{B}{H} = \frac{b}{z'} = \frac{b}{H-h}\ \frac{B}{H} = \frac{x}{z} = \frac{x}{H-y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{B(H-y)}{H}$$

$$\Rightarrow BH - Bh = bH \Rightarrow H = \frac{Bh}{B-b} \Rightarrow x = \frac{B\left(\frac{Bh}{B-b} - y\right)}{\frac{Bh}{B-b}} = B\left(1 - \frac{y(B-b)}{Bh}\right) = B - \frac{y(B-b)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad x = B - \frac{y(B-b)}{h} (2)$$

Llevando la ecuación (2) a la integral, resulta

$$F_T = \rho g \int_0^h \left[B - \frac{y(B-b)}{h}\right] y\, dy = \rho g B \frac{h^2}{2} - \rho g \frac{B-b}{h} \cdot \frac{h^3}{3} = \rho g B \frac{h^2}{2} - \rho g \frac{B-b}{3} \cdot h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_T = \rho g h^2 \left(\frac{B}{2} - \frac{B-b}{3}\right) = \rho g h^2 \left(\frac{B+2b}{6}\right) = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}8^2 \left(\frac{2+2\cdot 1}{6}\right) = 4{,}18.10^3\ \mathrm{N}$$

Designamos con d la distancia desde la superficie al centro de empuje, donde se puede considerar aplicada la fuerza resultante. El momento de la fuerza resultante debe ser igual a la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre cada elemento que consideremos de superficie.

$$F_T d = \rho g h^2 \left(\frac{B+2b}{6}\right) \cdot d = \int_0^h (\rho g x y\, dy) y = \int_0^h \rho g \left[B - \frac{(B-b)y}{h}\right] y^2\, dy =$$

$$= \rho g B \frac{h^3}{3} - \rho g \frac{B-b}{h} \cdot \frac{h^4}{4} \Rightarrow \frac{B+2b}{6} \cdot d = \frac{Bh}{3} - \frac{B-b}{4} \cdot h = h\left(\frac{B+3b}{12}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{\frac{B+3b}{12}}{\frac{B+2b}{6}} = \frac{B+3b}{2(B+2b)} = \frac{2+3\cdot 1}{2(2+2\cdot 1)} = 0{,}625\ \mathrm{m}$$