

## PROBLEMAS VARIADOS 29

211.-0,1 mol de un gas ideal realiza los dos ciclos siguientes: ABCA y BDCB. Las coordenadas termodinámicas de los puntos A B C y D son las siguientes:

$A(P_A, 1 \text{ L}, 280 \text{ K})$  ;  $B(P_B, 1 \text{ L}, T_B)$

$C(P_C, 1,5 \text{ L}, T_B)$  ;  $D(P_D, 1,5 \text{ L}, 629 \text{ K})$

Los puntos B y D en el diagrama V-T se encuentran sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas.

a) Dibujar los diagramas V-T y P-V de las dos transformaciones.

b) Calcular el trabajo que ejecuta el gas en cada transformación.

Calculamos  $P_A$  y  $P_D$  aplicando la ecuación de los gases perfectos.

$$P_A \cdot 1 = 0,1 \cdot 0,082 \cdot 280 \Rightarrow P_A = 2,30 \text{ atm}$$

$$P_D \cdot 1,5 = 0,1 \cdot 0,082 \cdot 629 \Rightarrow P_D = 3,44 \text{ atm}$$

Teniendo en cuenta que B y D se encuentran en una recta que pasa por el origen de coordenadas en el diagrama V-T, designamos con  $\alpha$  el ángulo que forma la recta con el eje de abscisas.

$$\text{tag } \alpha = \frac{V_D}{T_D} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow T_B = \frac{V_B T_D}{V_D} = \frac{1 \cdot 629}{1,5} = 419 \text{ K}$$

Haciendo uso de la ecuación de los gas perfectos

$$P_B \cdot 1 = 0,1 \cdot 0,082 \cdot 419 ; P_B = 3,44 \text{ atm}$$

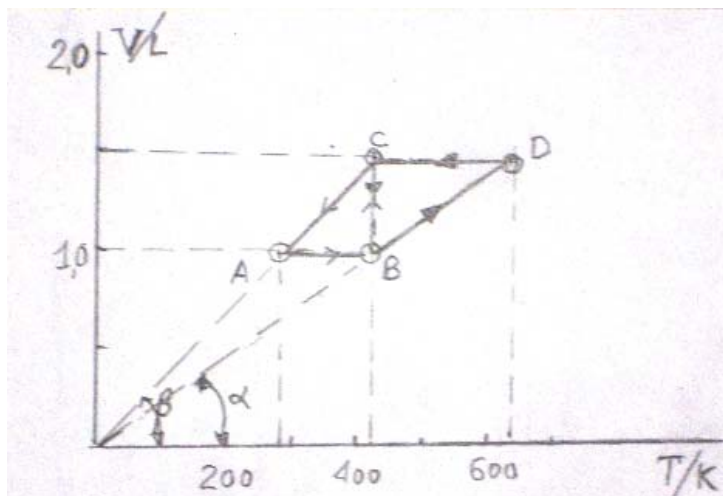
$$P_B V_B = P_C V_C \Rightarrow P_C = \frac{P_B V_B}{V_C} = \frac{3,44 \cdot 1}{1,5} = 2,30 \text{ atm}$$

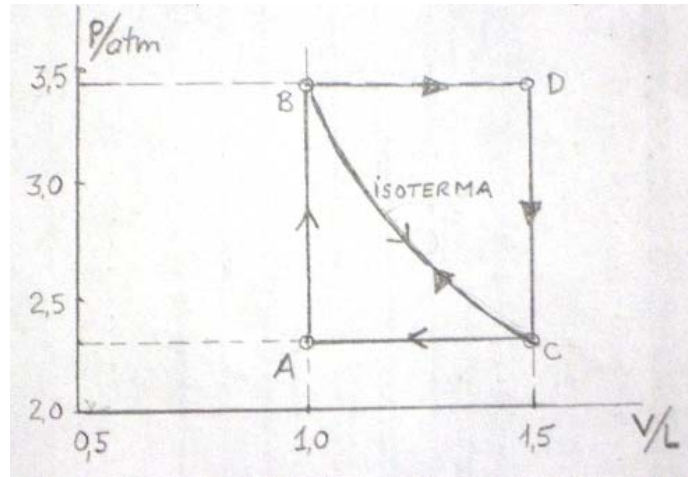
Los puntos C y A están también sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas ya que

$$\text{tag } \beta = \frac{V_C}{T_C} = \frac{V_A}{T_A} = \frac{1,5}{419} = \frac{1}{280}$$

Los puntos B y C están unidos por una isoterma de ecuación  $PV = 0,1 \cdot 0,082 \cdot 419 = 3,44$

Los diagramas V-T y P-V son los siguientes





*Trabajo del ciclo ACBA*

$$W_{AB} = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = 0 ;$$

$$W_{BC} = - \int_{V_B}^{V_C} P dV = - \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_C}{V_B} = -0,1 \cdot 8,31 \cdot 419 \cdot \ln \frac{1,5}{1,0} = -141 \text{ J}$$

$$W_{CA} = - \int_{V_C}^{V_A} P dV = -P(V_A - V_C) = -2,3 \cdot (1 - 1,5) = 1,15 \text{ atm} \cdot \text{L} =$$

$$= 1,15 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \frac{101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{\text{atm}} \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{L}} = 116,5 \text{ J}$$

$$W_{\text{ciclo}} = -141 + 116,5 = -24,5 \text{ J}$$

*Trabajo del ciclo BDCB*

$$W_{BD} = - \int_{V_B}^{V_D} P dV = -P(V_D - V_B) = -3,44 \text{ atm}(1,5 - 1) \text{L} = -1,72 \text{ atm} \cdot \text{L} =$$

$$= -1,72 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \frac{101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{\text{atm}} \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{L}} = -174,2 \text{ J}$$

$$W_{DC} = - \int_{V_D}^{V_C} P dV = 0$$

$$W_{CB} = -W_{BC} = 141 \text{ J}$$

$$W_{\text{ciclo}} = 141 - 174,2 = -33,2 \text{ J}$$

**212.-Un cuerpo de masa  $m$  se encuentra en reposo en la posición  $s_0=0$ . Sobre él comienza a actuar una fuerza definida por la ecuación**

$$F = F_0 \left[ 1 - \frac{(t-T)^2}{T^2} \right]; \text{ donde } T \text{ es una constante}$$

- a) Calcular las ecuaciones de la posición y velocidad del móvil en función del tiempo**  
**b) Calcular los tiempos para los cuales la fuerza, la velocidad y la posición tienen los valores máximos.**  
**c) Si  $F_0=1 \text{ N}$ ,  $m=1 \text{ kg}$  y  $T=5 \text{ s}$ , dibujar las gráficas frente al tiempo de  $F$ ,  $s$  y  $v$  en el intervalo entre  $t=0 \text{ s}$  y  $t=20 \text{ s}$ .**  
**d) Determinar la distancia recorrida por el cuerpo en el intervalo de  $t=0 \text{ s}$  a  $t=20 \text{ s}$**

a) De la segunda ley de Newton se deduce

$$F = F_0 \left[ 1 - \frac{t^2 + T^2 - 2tT}{T^2} \right] = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \frac{F_0}{m} \int \left( \frac{2t}{T} - \frac{t^2}{T^2} \right) dt \Rightarrow$$

$$v = \frac{F_0}{mT} \left( t^2 - \frac{t^3}{3T} \right) + \text{Cte} \Rightarrow v = \frac{F_0}{mT} \left( t^2 - \frac{t^3}{3T} \right); \text{ pues } v = 0 \text{ cuando } t = 0$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \int \frac{F_0}{mT} \left( t^2 - \frac{t^3}{3T} \right) dt \Rightarrow s = \frac{F_0}{mT} \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{12T} \right)$$

b) Para calcular los valores máximos derivamos las correspondientes ecuaciones respecto del tiempo e igualamos a cero.

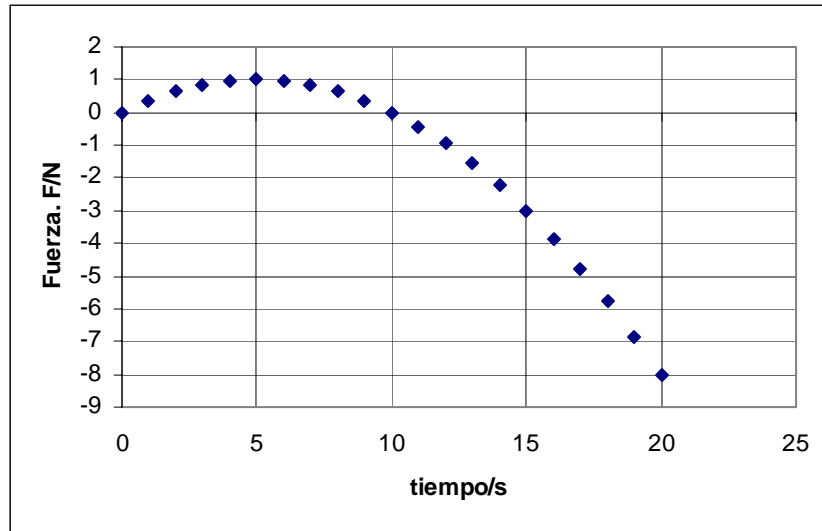
$$\frac{dF}{dt} = \frac{F_0}{T^2} (-2t + 2T) = 0 \Rightarrow t = T$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{F_0}{mT} \left( t^2 - \frac{t^3}{3T} \right) = 0 \Rightarrow \left( 1 - \frac{t}{3T} \right) t^2 = 0 \Rightarrow t = 0; t = 3T$$

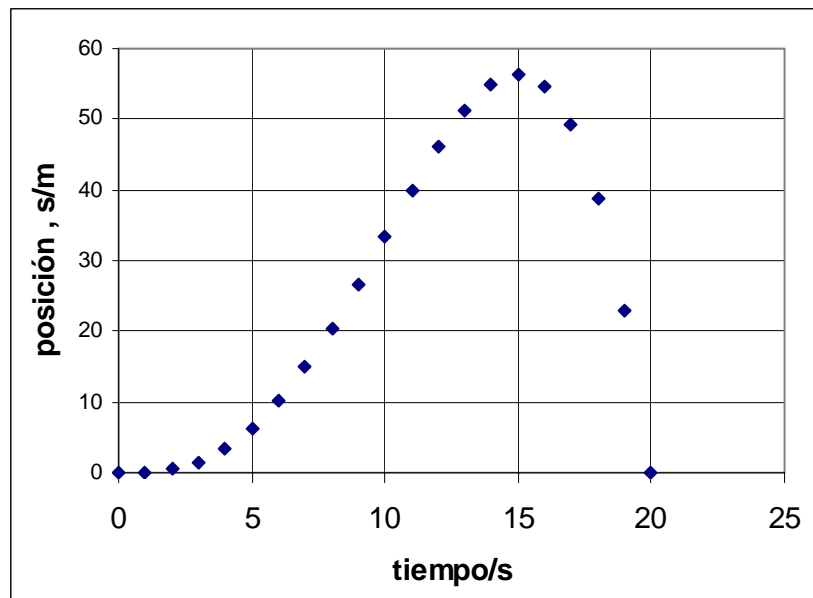
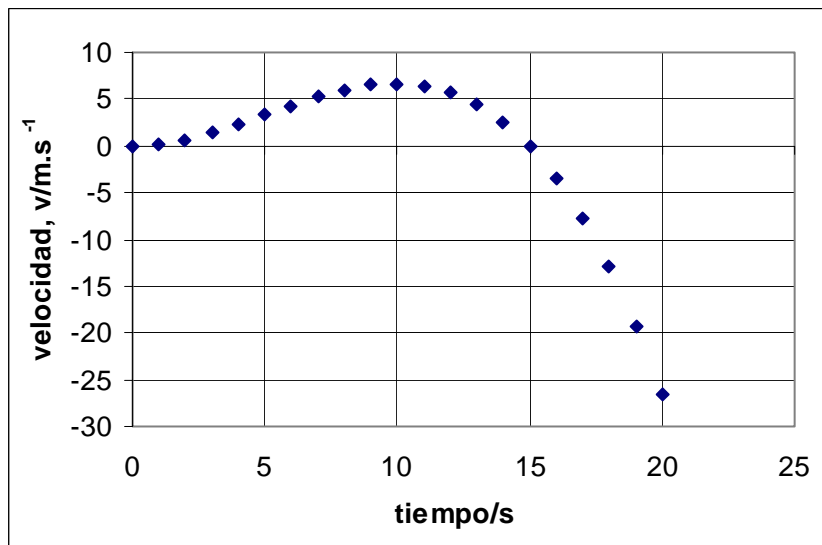
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{mT} \left( 2t - \frac{t^2}{T} \right) = 0 \Rightarrow \left( 2 - \frac{t}{T} \right) t = 0 \Rightarrow t = 0; t = 2T$$

El valor  $t=0$  aunque es solución de las ecuaciones debe ser excluido teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema

c)



c)



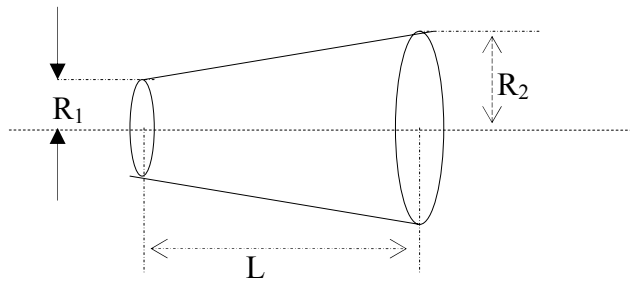
d) Según el apartado anterior el máximo en la posición del cuerpo ocurre cuando  $t=3T=3 \cdot 5=15$  s. Para calcular el valor de esa posición sustituimos el valor 15 en la ecuación de s:

$$s = \frac{F_0}{mT} \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{12T} \right) = \frac{1}{1 \cdot 5} \left( \frac{15^3}{3} - \frac{15^4}{12 \cdot 5} \right) = 56,25 \text{ m}$$

El cuerpo recorre 56,25 m hacia la derecha, luego retrocede hasta el punto de partida recorriendo los mismos metros, por tanto, en total ha recorrido

$$56,25+56,25= 112,5 \text{ m}$$

**213.-Un alambre metálico tiene la forma de un tronco de cono como se indica en la figura. El radio de la sección mayor es  $R_2$  y el de la menor  $R_1$ , la resistividad del metal  $\rho$  y su longitud  $L$ . Calcular la resistencia del conductor**



En la figura 1 se considera una sección del hilo cuyo radio es  $R$ , distancia al círculo de radio  $R_1$  ,  $x$ , y espesor  $dx$  .

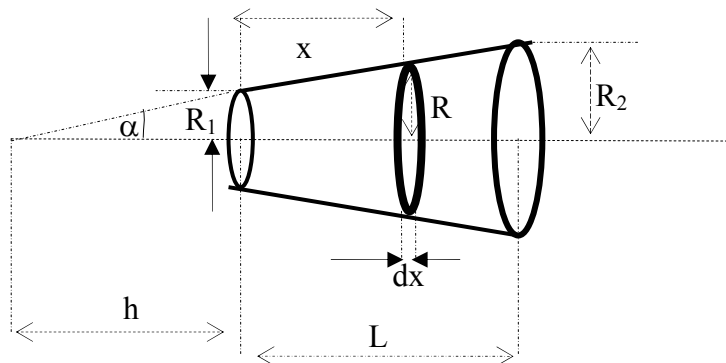


Fig.1

La resistencia óhmica de esa sección es

$$d\Omega = \frac{\rho dx}{\pi R^2} \quad (1)$$

$R$  y  $x$  son variables y debemos encontrar una relación entre ambas. De la figura 1 se deduce:

$$\text{tag } \alpha = \frac{R_1}{h} = \frac{R}{x+h} = \frac{R_2}{L+h} \Rightarrow R_1 L + R_1 h = R_2 h \Rightarrow h = \frac{R_1 L}{R_2 - R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = R_1 \frac{x+h}{h} = R_1 \left( \frac{x}{h} + 1 \right) = R_1 \left( \frac{x}{\frac{R_1 L}{R_2 - R_1}} + 1 \right) = \frac{x(R_2 - R_1)}{L} + R_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dR = \frac{(R_2 - R_1)}{L} dx \Rightarrow dx = \frac{L dR}{R_2 - R_1}$$

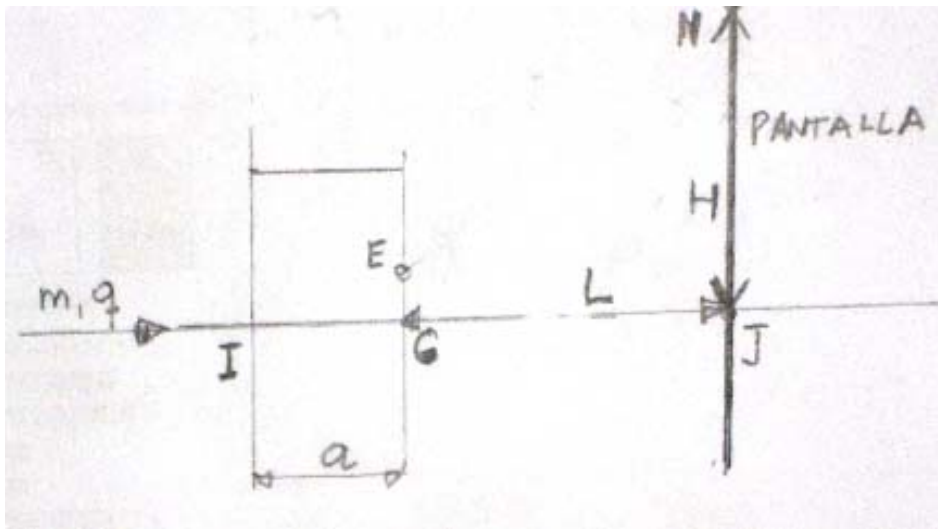
Llevando el valor de dx a la ecuación (1).

$$d\Omega = \frac{\rho}{\pi} \frac{L dR}{R^2} \Rightarrow \Omega = \frac{\rho L}{\pi(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = \frac{\rho L}{\pi(R_2 - R_1)} \left( -\frac{1}{R} \right)_{R_1}^{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{\rho L}{\pi(R_2 - R_1)} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\rho L}{\pi(R_2 - R_1)} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) = \frac{\rho L}{\pi R_1 R_2}$$

**214.-Un haz de protones se acelera con una diferencia de potencial de 50 kV, el cual se dirige hacia una zona de anchura  $a= 2 \text{ cm}$  sobre la que se puede instalar un campo magnético uniforme  $B$ .**

**Cuando el campo está ausente, los protones alcanzan la pantalla en el punto  $J$  y cuando actúa el campo magnético en un punto de altura  $H$ , siendo  $JH= 30 \text{ cm}$  y  $GJ=L= 20 \text{ cm}$ . Determinar la intensidad del campo magnético  $B$ .**



**Masa del protón =  $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .**

**Carga del protón =  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$**

Calculamos la velocidad de los protones

$$\frac{1}{2} m v^2 = q \Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 q \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 \cdot 10^3}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 3,1 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Cuando existe un campo magnético  $B$  los protones recorren un arco de circunferencia de radio  $R$ , tal como se observa en la figura 1. El módulo de la velocidad de salida de los protones en  $E$  es igual a la de entrada en  $I$ , puesto que el campo magnético no aumenta el módulo de la velocidad aunque si lo hace sobre su dirección. A partir de  $E$  el haz se dirige en línea recta hacia la pantalla.

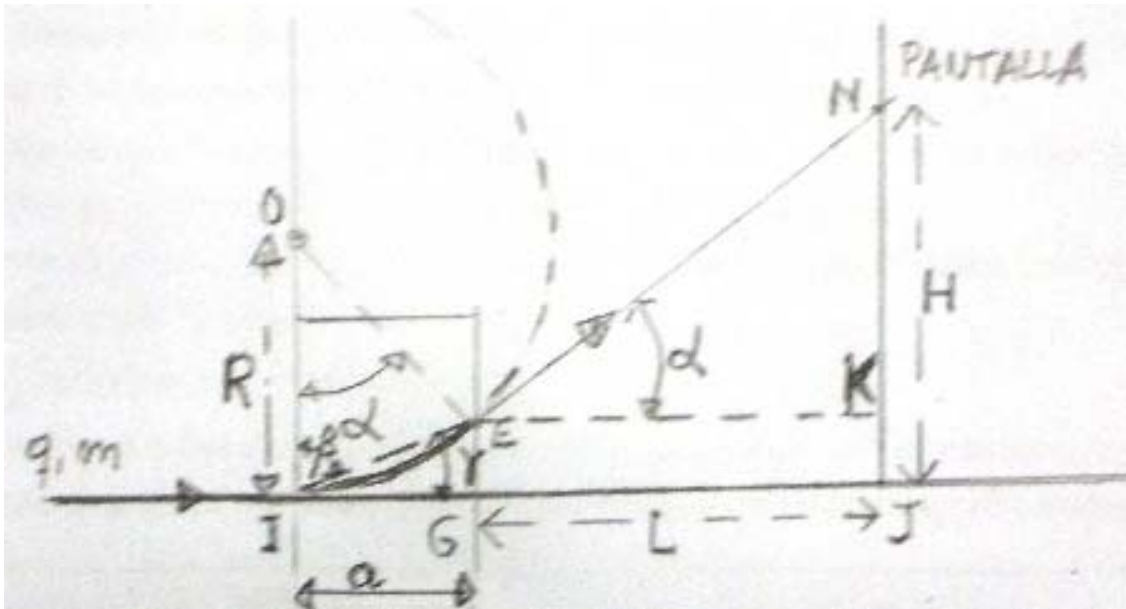


Fig 1

Cuando el haz penetra en el campo magnético la fuerza centrípeta es proporcionada por la fuerza magnética:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \Rightarrow B = \frac{mv}{Rq}$$

Para determinar el valor de R nos fijamos en la figura 1. Designamos  $GE=h$ .

Del triángulo EKN deducimos que  $\tan \alpha = \frac{H-h}{L}$  (1).

El triángulo OIE es isósceles siendo sus lados iguales a R

$$\alpha + 2\beta = \pi : \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \gamma = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{a} \quad (2); \text{ se deduce de la figura}$$

De las ecuaciones (1) y (2) resulta:

$$\tan \alpha = \frac{H - a \tan \frac{\alpha}{2}}{L} = \frac{30 - 2 \tan \frac{\alpha}{2}}{20} = 1,5 - 0,10 \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

La ecuación (3) la resolvemos por tanteo

$\alpha/\text{grado}$	$\text{tag } \alpha$	$1,5-0,10 \text{ tag } (\alpha/2)$
10	0,176	1,49
50	1,19	1,45
70	2,75	1,43
60	1,73	1,44
56	1,48	1,45
55,5	1,46	1,45
55,4	1,45	1,45

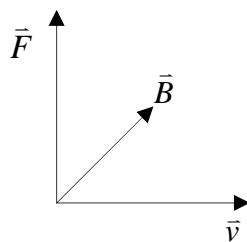
Volviendo a la figura 1:

$$R = R \cos \alpha + h = R \cos \alpha + a \text{tag} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow R = \frac{a \text{tag} \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \cdot \text{tag} 27,7}{1 - \cos 55,4} = 2,43 \text{ cm}$$

$$B = \frac{m v}{R q} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 3,1 \cdot 10^6}{2,43 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,33 \text{ T}$$

Observe que al tratarse de una carga positiva y actuar sobre ella una fuerza hacia arriba, necesariamente el campo magnético es perpendicular al papel y entrante ya verifica la ecuación vectorial

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



**215.-***Cuando se lanza un proyectil desde un suelo horizontal formando un cierto ángulo con el suelo, el proyectil, en el vacío, describe una trayectoria parabólica. El área comprendida entre la curva y el suelo se designa con  $A(\alpha)$  indicando así que esa área es función del ángulo de lanzamiento. a) Calcular el valor de  $\alpha$  para que el área tenga el máximo valor. b) Dibujar la gráfica del área frente al ángulo de lanzamiento.*

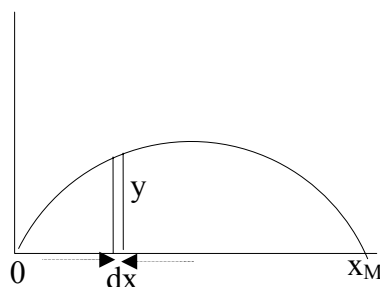


Fig.1

Si en la parábola seleccionamos una estrecha franja de altura  $y$ , y espesor  $dx$  (ver figura 1) el área vale  $dA=y dx$  y el área comprendida entre la curva y el suelo:

$$A = \int_0^{x_M} y \, dx$$

Siendo  $x_M$  la distancia desde el punto de lanzamiento hasta dónde el proyectil choca contra el suelo. Vamos a obtener la ecuación que relaciona  $y$  con  $x$

$$x = v_0(\cos\alpha)t \quad , \quad y = v_0(\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejamos la variable  $t$  en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda

$$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Para calcular el valor de  $x_M$  tenemos en cuenta que cuando el proyectil choca contra el suelo  $y=0$

$$0 = v_0(\sin\alpha)t_M - \frac{1}{2}gt_M^2 \Rightarrow t_M = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow x_M = v_0(\cos\alpha) \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_M = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Volviendo a la integral

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{x_M} \left( x \tan\alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \right) dx = \tan\alpha \frac{x^2}{2} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{x_M} = \\ &= \tan\alpha \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{2g^2} - \frac{g}{6v_0^2 \cos^2\alpha} \frac{v_0^6 \sin^3 2\alpha}{g^3} = \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{2g^2} \left( \tan\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{3 \cos^2\alpha} \right) = \\ &= \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{2g^2 \cos\alpha} \left( \sin\alpha - \frac{2 \sin\alpha}{3} \right) = \frac{v_0^4 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha \sin\alpha}{g^2 \cos\alpha} \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \frac{v_0^4}{g^2} \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha \quad (1) \end{aligned}$$

Como nos piden el área máxima derivamos la ecuación (1) respecto de  $\alpha$  e igualamos a cero.

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{2v_0^4}{3g^2} [-\sin^4\alpha + \cos\alpha \cdot 3 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha] = 0 \Rightarrow 3 \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

b)

