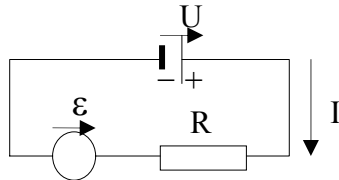


## PROBLEMAS VARIADOS 20

**160.-** Se conecta un motor eléctrico de corriente continua a una batería de fuerza electromotriz  $U$  y resistencia interna prácticamente nula. La resistencia del arrollamiento del inducido es  $R$ . ¿Para qué valor de la intensidad de la corriente que atraviesa el devanado la potencia útil del motor será máxima? ¿Cuál es esa potencia y cuál el rendimiento del motor?

En el esquema de la figura se representa el motor con fuerza contraelectromotriz  $\varepsilon$ , la resistencia del arrollamiento y la fuente de tensión continua



La intensidad de la corriente que atraviesa el motor es:

$$I = \frac{U - \varepsilon}{R} \Rightarrow \varepsilon = U - IR$$

La potencia útil del motor es:

$$P_{\text{útil}} = \varepsilon I = (U - IR)I = UI - I^2 R$$

Como nos piden la potencia máxima, derivamos la potencia respecto de la intensidad e igualamos a cero.

$$\frac{dP_{\text{útil}}}{dI} = U - 2IR = 0 \Rightarrow I = \frac{U}{2R}$$

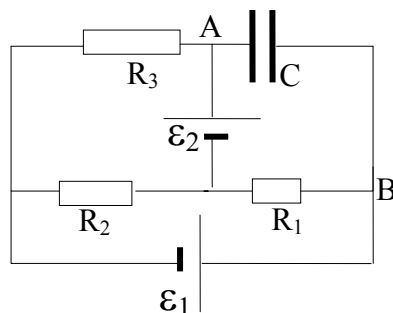
Sustituyendo en la ecuación de la potencia útil:

$$(P_{\text{útil}})_{\text{máxima}} = U \frac{U}{2R} - \frac{U^2}{4R^2} R = \frac{U^2}{4R}$$

El rendimiento

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{suministrada}}} = \frac{\frac{U^2}{4R}}{UI} = \frac{U}{4IR} = \frac{U}{4 \cdot \frac{U}{2}} = \frac{1}{2}$$

**161.-** Calcular la diferencia de potencial entre los extremos del condensador  $C$  de la figura inferior



Una vez que el condensador esté cargado, el circuito se reduce a dos mallas como indica la figura 1.

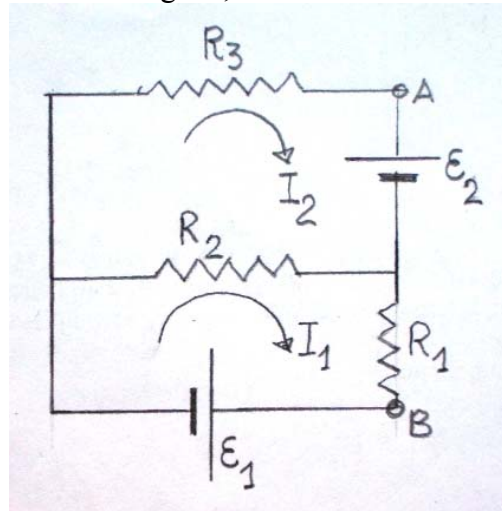


Fig.1

Para las dos mallas tenemos las siguientes ecuaciones

$$(I_1 - I_2)R_2 + I_1R_1 + \varepsilon_1 = 0 \Rightarrow I_1(R_1 + R_2) - I_2R_2 = -\varepsilon_1 \quad (1)$$

$$I_2R_3 + \varepsilon_2 + (I_2 - I_1)R_2 = 0 \Rightarrow I_2(R_2 + R_3) - I_1R_2 = -\varepsilon_2 \Rightarrow I_2 = \frac{I_1R_2 - \varepsilon_2}{R_2 + R_3}$$

Sustituyendo  $I_2$  en la ecuación (1).

$$I_1(R_1 + R_2) - \frac{I_1R_2 - \varepsilon_2}{R_2 + R_3} \cdot R_2 = -\varepsilon_1 \Rightarrow I_1 \left( R_1 + R_2 - \frac{R_2^2}{R_2 + R_3} \right) + \frac{\varepsilon_2 R_2}{R_2 + R_3} = -\varepsilon_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 \left( \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2 + R_3} \right) = -\frac{\varepsilon_2 R_2}{R_2 + R_3} - \varepsilon_1 \Rightarrow I_1 = \frac{-\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2 R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

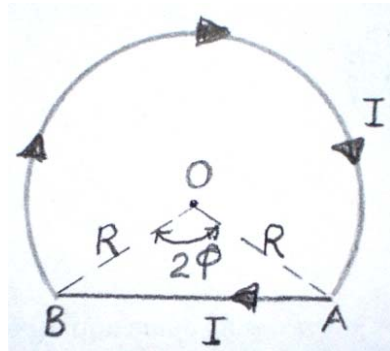
La diferencia de potencial entre A y B es la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador.

$$V_A - V_B = \varepsilon_2 + I_1R = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3)R_1 + \varepsilon_2R_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$V_A - V_B = \frac{\varepsilon_2(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) - \varepsilon_1R_1R_2 - \varepsilon_1R_1R_3 - \varepsilon_2R_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$V_A - V_B = \frac{\varepsilon_2R_3(R_1 + R_2) - \varepsilon_1R_1(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

162.- Calcular la intensidad del campo magnético en el punto O, creado por un conductor cuya forma es la de la figura inferior y por el que circula una corriente de intensidad I. R es el radio de la circunferencia del conductor BA. Calcular y dibujar el valor de B frente al ángulo  $\phi$ , cuando éste varíe entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ .



El campo magnético en O está creado por un conductor que corresponde a un arco de circunferencia BA y por un conductor rectilíneo AB.

De acuerdo con la ley de Biot-Savart determinamos que el campo creado por BA es perpendicular al plano del papel y dirigido hacia dentro y con la misma dirección y sentido es el campo creado por AB.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

Aplicamos la ecuación anterior para el conductor BA. En la figura 1 se observa que  $d\vec{l}$  y  $\vec{r}_c$  forman un ángulo de  $90^\circ$  y  $r_c = R$ .

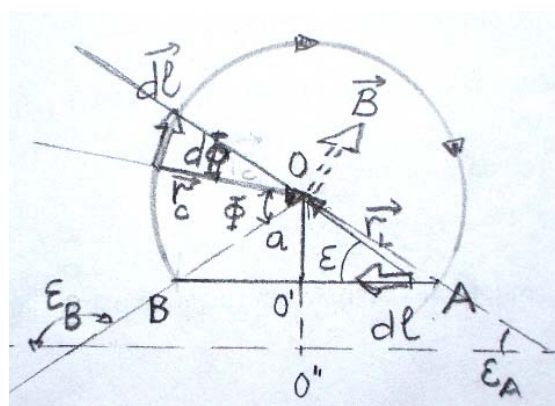


Fig.1

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_c}{r_c^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot R \cdot \sin 90^\circ}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2}$$

Como dl es un arco de circunferencia abarcado por un ángulo  $d\phi$  y el valor del arco es igual ángulo por el radio, resulta que  $dl=R d\phi$

$$dB_c = \frac{\mu_0 I R d\varphi}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\varphi \Rightarrow B_c = \int_0^{2\pi-2\varphi} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (2\pi - 2\varphi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \varphi)$$

Aplicamos la ecuación (1) al conductor rectilíneo AB. Designamos con  $a$ , la mínima distancia que existe desde el punto O al conductor rectilíneo AB. Sobre dicho conductor, y a una distancia  $l$  del punto O', tomamos un elemento de corriente  $d\vec{l}$ . El vector que une  $d\vec{l}$  con O lo llamamos  $\vec{r}_L$ . Ambos vectores forman entre sí un ángulo  $\varepsilon$  (ver la figura 2).

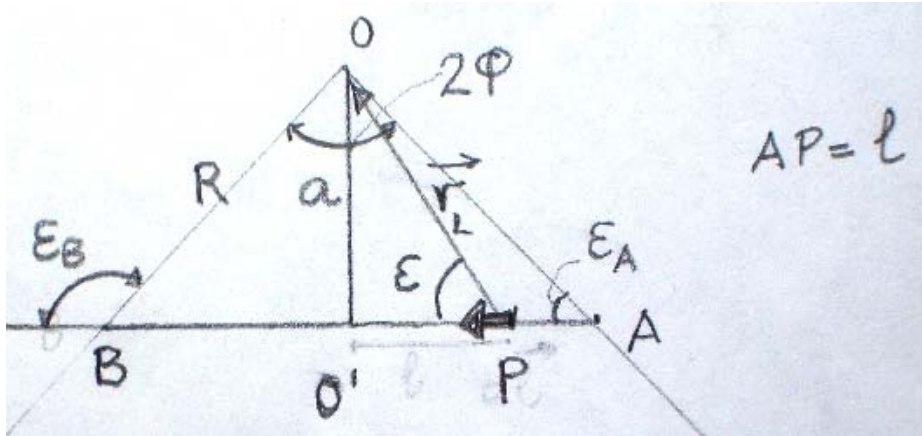


Fig. 2

$$dB_L = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}_L}{4\pi r_L^3} \Rightarrow dB_L = \frac{\mu_0 I dl \cdot r_L \cdot \text{sen } \varepsilon}{4\pi r_L^3} = \frac{\mu_0 I dl \cdot \text{sen } \varepsilon}{4\pi r_L^2}$$

Se observa que en la ecuación anterior existen tres variables:  $l$ ,  $\varepsilon$  y  $r_L$ , las cuales están relacionadas entre sí y lo que hacemos es poner  $dl$  y  $r_L$  en función de  $\varepsilon$ .

De la figura 2 se deduce que

$$r_L = \frac{a}{\text{sen } \varepsilon} \quad ; \quad PO' = AO' - l = \frac{a}{\text{tag } \varepsilon} = \frac{a \cos \varepsilon}{\text{sen } \varepsilon} \Rightarrow -dl = -a \frac{\text{sen}^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon}{\text{sen}^2 \varepsilon} d\varepsilon = -a \frac{d\varepsilon}{\text{sen}^2 \varepsilon}$$

$$dB_L = + \frac{\mu_0 I \frac{a d\varepsilon}{\text{sen}^2 \varepsilon} \cdot \text{sen } \varepsilon}{4\pi \frac{a^2}{\text{sen}^2 \varepsilon}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \text{sen } \varepsilon d\varepsilon \Rightarrow B_L = \int_{\varepsilon_A}^{\varepsilon_B} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \text{sen } \varepsilon d\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_L = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \varepsilon_B - \cos \varepsilon_A) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \varepsilon_A - \cos \varepsilon_B)$$

Los ángulo  $\varepsilon_A$  y  $\varepsilon_B$  son suplementarios, el coseno de  $\varepsilon_B$  es igual a  $-\cos \varepsilon_A$ . Por otra parte tenemos que  $a = R \text{sen } \varepsilon_A$ , por lo que  $B_L$

$$B_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot 2 \cos \varepsilon_A$$

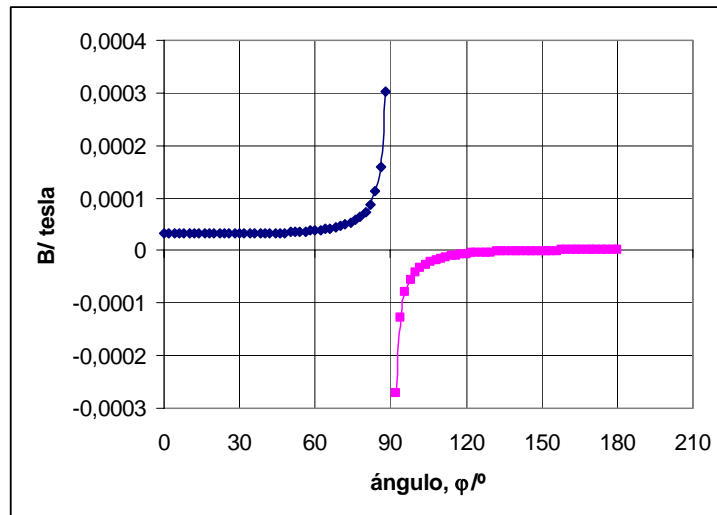
Volviendo a la figura 2, se deduce que  $2\varepsilon_A + 2\varphi = \pi \Rightarrow \varepsilon_A = \pi - \varphi$

$$B_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \operatorname{sen} \varepsilon_A} \cdot 2 \cos \varepsilon_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tag} \varepsilon_A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tag}(\pi - \varphi)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot \operatorname{tag} \varphi$$

El campo en O

$$B_O = B_C + B_L = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \varphi) + \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tag} \varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \varphi + \operatorname{tag} \varphi)$$

En la ecuación anterior se dan valores a  $\varphi$  en una hoja de cálculo y se obtiene la siguiente gráfica



Cuando  $j$  se aproxima a  $90^\circ$  el conductor AB se acerca al punto O y según la ecuación anterior el valor de B aumenta de forma notable y las gráficas tienen una asintota para ese valor.

**163.- Un haz paralelo de electrones que ha sido acelerado mediante un diferencia de potencial  $U = 25 \text{ V}$ , incide normalmente sobre un diafragma con dos rendijas estrechas distantes entre sí,  $d = 50 \mu\text{m}$ . Detrás del diafragma y a una distancia  $D = 1 \text{ m}$  se coloca una pantalla. Se pide calcular la distancia entre dos máximos adyacentes del cuadro de difracción.**

**Datos : Constante de Planck =  $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ; masa del electrón  $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , carga del electrón  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$**

Según la teoría de De Broglie las partículas pueden exhibir comportamiento ondulatorio siendo la longitud de onda asociada:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$h$  es la constante de Planck,  $m$  la masa de la partícula y  $v$  su velocidad.

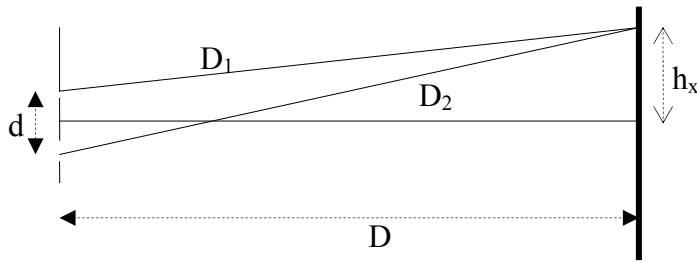
La energía que adquieren los electrones cuando son acelerados es

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2qU}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2mqU}}$$

En la figura siguiente se representa la marcha de los electrones después de atravesar las dos rendijas.



$D_1$  y  $D_2$  son las distancias recorridas por los electrones según que atraviesen una u otra rendija,  $h_x$  es la distancia desde el centro de la pantalla hasta la posición de un máximo. Se cumple:

$$D_2 - D_1 = x\lambda$$

$x$  es un número entero.

$$D_1^2 = D^2 + \left(h_x - \frac{d}{2}\right)^2 ; \quad D_2^2 = D^2 + \left(h_x + \frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow D_2^2 - D_1^2 = 2dh_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (D_2 + D_1)(D_2 - D_1) = 2dh_x \Rightarrow D_2 - D_1 = \frac{2dh_x}{D_2 + D_1} = x\lambda$$

La suma de las distancias  $D_2 + D_1$  es aproximadamente igual a  $2D$ .

$$h_x = \frac{x\lambda D}{d}$$

El máximo siguiente se producirá a una distancia  $h_x = \frac{x\lambda D}{d}$ . La distancia entre esos dos máximos es:

$$h_{x+1} - h_x = \Delta x = \frac{\lambda D}{d}(x+1-x) = \frac{\lambda D}{d} = \frac{h}{\sqrt{2mqU}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{50 \cdot 10^{-6} \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 25}}$$

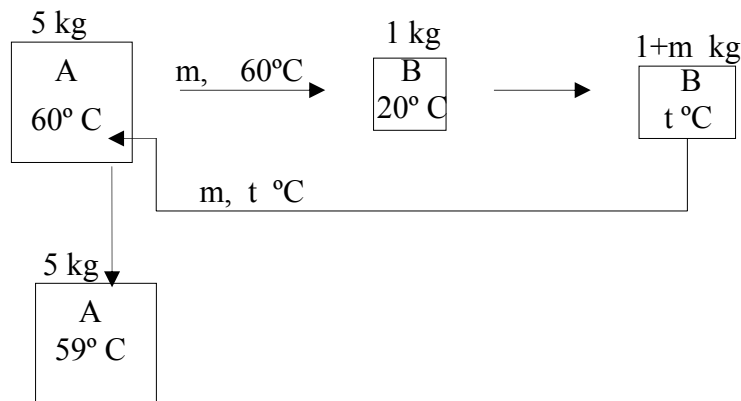
$$\Delta x = 4,9 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 4,9 \mu\text{m}$$

164.-Un recipiente A termoaislado contiene 5 kg de agua a la temperatura de 60°C, otro recipiente B, también termoaislado, contiene 1 kg de agua a 20°C. Del recipiente A se transfiere una masa de agua  $m$  al recipiente B y se espera a que se alcance el equilibrio térmico. Luego se transfiere de B a A la misma cantidad  $m$  de agua y cuando se alcanza el equilibrio térmico ese recipiente está a la temperatura de 59°C.

a) Determinar  $m$  y la temperatura del recipiente B.

b) Dibujar una gráfica que indique las temperaturas de los recipientes A y B en función de la masa  $m$  transferida.

a) Un esquema ayuda a entender el proceso



Al pasar  $m$  kg de agua desde A a B, la temperatura de B aumenta a  $t$ °C. Si no hay pérdidas de calor  $m \cdot c_e \cdot (60 - t) = 1 \cdot c_e \cdot (t - 20) \Rightarrow m(60 - t) = t - 20$  (1)

Al pasar  $m$  kg de agua a la temperatura  $t$  al recipiente B, en éste hay 5 kg de agua a la temperatura de 59°C.

$$(5 - m) \cdot c_e \cdot (60 - 59) = m \cdot c_e \cdot (59 - t) \Rightarrow 5 - m = m(59 - t) \quad (2)$$

A partir de (1) y (2), resulta

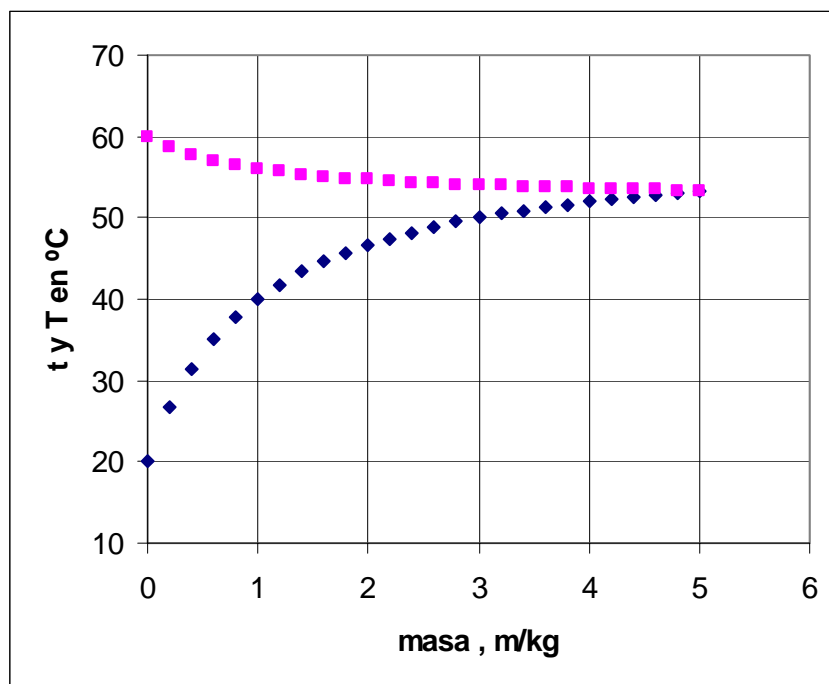
$$m(60 - t) - m(59 - t) = t - 20 - (5 - m) \Rightarrow m = t - 25 + m \Rightarrow t = 25^\circ$$

$$\text{De (2)} \Rightarrow m = \frac{t - 20}{60 - t} = \frac{25 - 20}{60 - 25} = \frac{1}{7} \text{ kg}$$

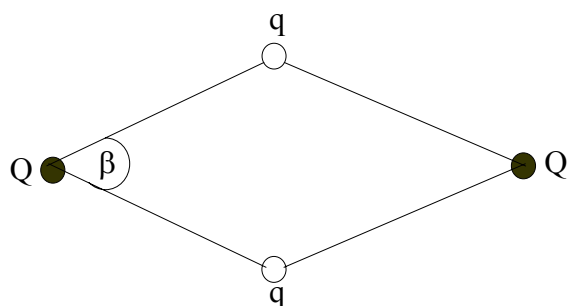
b) Designamos con  $T$  a la temperatura del recipiente A. De acuerdo con el esquema de cálculo anterior

$$m(60 - t) = 1(t - 20) \Rightarrow 60m - tm = t - 20 \Rightarrow t = \frac{60m + 20}{1 + m}$$

$$(5 - m)(60 - T) = m(T - t) \Rightarrow T - t = \left( \frac{5 - m}{m} \right) (60 - T) \Rightarrow T = \frac{\left( \frac{5 - m}{m} \right) 60 + t}{1 + \frac{5 - m}{m}}$$



165.-Cuatro cargas  $Q$ ,  $q$ ,  $Q$ , y  $q$  se unen mediante hilos de igual longitud  $L$ , tal como se indica en la figura inferior



Calcular el valor del ángulo beta que forman los hilos.

En la figura 1 se indican las fuerzas sobre dos cargas y las tensiones en tres cuerdas.

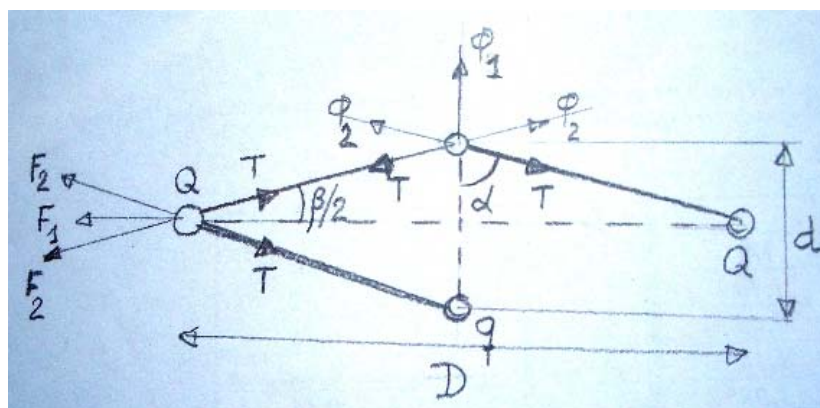


Fig.1

Sobre la carga Q de la izquierda de la figura 1 actúan las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $T$  y  $T$

$$F_1 = K \frac{Q^2}{D^2} = K \frac{Q^2}{4L^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} ; \quad F_2 = K \frac{Qq}{L^2}$$

Como Q está en equilibrio se cumple

$$F_1 + 2F_2 \cos \frac{\beta}{2} = 2T \cos \frac{\beta}{2} \Rightarrow K \frac{Q^2}{4L^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} + 2K \frac{Qq}{L^2} \cos \frac{\beta}{2} = 2T \cos \frac{\beta}{2} \quad (1)$$

Sobre la carga q superior de la figura 1 actúan las fuerzas  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $T$  y  $T$  y de la figura 1 se deduce que los ángulos  $\alpha$  y  $\beta/2$  son complementarios

$$\varphi_1 = K \frac{q^2}{d^2} = K \frac{q^2}{4L^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} ; \quad \varphi_2 = K \frac{Qq}{L^2}$$

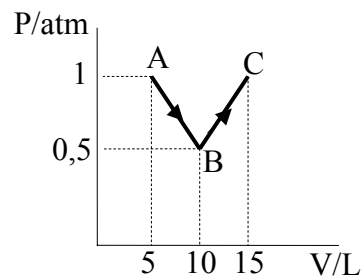
Como q está en equilibrio se cumple

$$\varphi_1 + 2\varphi_2 \sin \frac{\beta}{2} = 2T \sin \frac{\beta}{2} \Rightarrow K \frac{q^2}{4L^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} + 2K \frac{Qq}{L^2} \sin \frac{\beta}{2} = 2T \sin \frac{\beta}{2} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce:

$$\begin{aligned} K \frac{Q^2}{4L^2 \cos^3 \frac{\beta}{2}} + 2K \frac{Qq}{L^2} &= K \frac{q^2}{4L^2 \sin^3 \frac{\beta}{2}} + 2K \frac{Qq}{L^2} \Rightarrow \frac{Q^2}{\cos^3 \frac{\beta}{2}} = \frac{q^2}{\sin^3 \frac{\beta}{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tag^3 \frac{\beta}{2} &= \left( \frac{q}{Q} \right)^2 \Rightarrow \tag \frac{\beta}{2} = \left( \frac{q}{Q} \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{\beta}{2} = \arccot \tag \left( \frac{q}{Q} \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

166.- Un mol de un gas ideal cuyo coeficiente adiabático es  $\gamma = \frac{5}{2}R$ , efectúa la transformación indicada en la figura inferior



**Calcular**

a) el trabajo realizado por el sistema cuando pasa de A a B.

b) El calor que se debe suministrar al sistema para pasar de B a C. c) La variación de energía interna en el proceso ABC.

b) La expresión del trabajo de expansión es :  $-\int_{V_i}^{V_f} P dV$ . La relación entre la presión

y el volumen en la transformación AB es una línea recta, cuya ecuación la calculamos mediante la expresión que nos da la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{P - 1}{0,5 - 1} = \frac{V - 5}{10 - 5} \Rightarrow P - 1 = -0,1V + 0,5 \Rightarrow P = -0,1V + 1,5$$

Resolvemos la integral

$$W = -\int_5^{10} (-0,1V + 1,5)dV = \frac{+0,1(10^2 - 5^2)}{2} - 1,5(10 - 5) = -3,75 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

El signo negativo indica que el trabajo es efectuado por el gas hacia el exterior.

Una forma mucho más rápida para calcular el trabajo, es medir el área comprendida entre la recta AB y el eje de abscisas. La figura es un trapecio

$$\text{Área} = \frac{1 + 0,5}{2} \cdot 5 = 3,75 \Rightarrow W = -3,75 \text{ atm} \cdot \text{L} = -3,75 \cdot 101325 \cdot 10^{-3} = -380 \text{ J}$$

b)Calculamos primero la variación de energía interna entre B y C

$$\Delta U_{BC} = C_v(T_C - T_B) = C_v \left( \frac{P_C V_C}{R} - \frac{P_B V_B}{R} \right) = \frac{C_v}{R} (P_C V_C - P_B V_B)$$

Según el dato del problema  $\gamma = \frac{5}{3} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{R}{C_v} \Rightarrow C_v = \frac{3}{2}R$

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} + W_{BC} = \frac{3}{2}R(1 \cdot 15 - 0,5 \cdot 10) = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

El trabajo BC lo calculamos por el área como se hizo anteriormente

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{0,5+1}{2} \cdot (10-5) = 3,75 \Rightarrow W_{BC} = -3,75 \text{ atm} \cdot L \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_{BC} &= \Delta U_{BC} - W_{BC} = 15 - (-3,75) = 18,75 \text{ atm} \cdot L = 1,9 \cdot 10^3 \text{ J}\end{aligned}$$

c) La variación de energía interna en el proceso ABC es igual a la suma siguiente

$$\begin{aligned}\Delta U_{ABC} &= \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} = C_v (T_B - T_A) + \Delta U_{BC} = C_v \left( \frac{P_A V_A}{R} - \frac{P_B V_B}{R} \right) + \Delta U_{BC} \Rightarrow \\ \Delta U_{ABC} &= C_v \left( \frac{1 \cdot 5}{R} - \frac{0,5 \cdot 10}{R} \right) + \Delta U_{BC} = 15 \text{ atm} \cdot L = 15 \cdot 101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ J}\end{aligned}$$