PROBLEMAS VARIADOS 22

172.- Una partícula tiene una masa en reposo m_o. Se somete a una fuerza constante de módulo F. Encontrar las ecuaciones que relacionan con el tiempo su velocidad y posición, sabiendo que cuando t=0, v=0, y s= 0.

Utilizamos la ecuación

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\, v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \Rightarrow \int F\, dt = \int d\left(\frac{m_0\, v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \Rightarrow$$

$$F\, t = \frac{m_0\, v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + Cte$$

Cuando t= , v=0 , luego Cte =0

$$F^2\, t^2 = \frac{m_o^2 v^2 c}{c^2 - v^2} \Rightarrow F^2\, t^2\, c^2 - F^2\, t^2\, v^2 = m_o^2 v^2 c \Rightarrow m_o^2 v^2 c + F^2\, t^2\, v^2 = F^2\, t^2\, c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad v = \frac{F\, c\, t}{\sqrt{m_o^2 c + F^2\, t^2}}$$

Cuando t tiende a infinito, $m_o^2 c << F^2 t^2$ y $v \to c$

Para calcular la posición de la partícula respecto a la posición inicial usamos la expresión $v = \frac{ds}{dt}$.

$$s = \int v\, dt = \int \frac{F\, c\, t}{\sqrt{m_o^2\, c^2 + F^2\, t^2}} dt$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable

$$m_o^2\, c^2 + F^2\, t^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad 2F^2 t = 2\, u\, du$$

Sustituyendo en la integral

$$s = \int \frac{F\, c\, \frac{u\, du}{F^2}}{u} = \frac{c}{F} u + Cte = \frac{c}{F}\sqrt{m_o^2\, c^2 + F^2 t^2} + Cte$$

Cuando t=0 , s=0

$$0 = \frac{c}{F}\sqrt{m_o^2\, c^2} + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{m_o\, c^2}{F}$$

$$s = \frac{c}{F}\sqrt{m_o^2\, c^2 + F^2 t^2} - \frac{m_o^2\, c^2}{F} = \frac{c}{F}\left(\sqrt{m_o^2\, c^2 + F^2 t^2} - m_o^2\, c\right)$$

173.-Una partícula efectúa un movimiento vibratorio armónico a la largo del eje x, siendo la posición de equilibrio x=0. En un determinado instante la posición de la partícula es x_o= 25,0 cm y su velocidad v_{ox}=100 cm/s. Determinar su posición y velocidad cuando hayan transcurridos t= 2,40 segundos después del instante anterior y la longitud recorrida por la partícula en ese tiempo. Dato ω=4 s^{-1}.

Las ecuaciones generales del movimiento armónico son:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

Designamos con t=0 el instante en que la partícula posee la velocidad v_{ox} y la posición x_o.

Las ecuaciones anteriores para t=0 son:

$$x_o = A\,\mathrm{sen}\,\varphi \;;\; v_{ox} = A\,\omega\cos\varphi \;\Rightarrow x_o^2 = A^2\,\mathrm{sen}^2\varphi \;;\; \frac{v_{ox}^2}{\omega^2} = A^2\cos^2\varphi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_o^2 + \frac{v_{ox}^2}{\omega^2} = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_o^2 + \frac{v_{ox}^2}{\omega^2}} = \sqrt{25^2 + \frac{100^2}{25^2}} = 25\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$$

$$\frac{x_o\,\omega}{v_{ox}} = \mathrm{tag} = \frac{25\cdot 4}{100} = 1 \quad \Rightarrow \varphi = 45^{\mathrm{o}} = \frac{\pi}{4}\mathrm{rad}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones generales resulta:

$$x = 25\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) = 25\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(4\cdot 2{,}4 + \frac{\pi}{4}\right) = -29\,\mathrm{cm}$$

$$v = 25\sqrt{2}\cdot 4\cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) = 100\sqrt{2}\cos\left(4\cdot 2{,}4 + \frac{\pi}{4}\right) = -81\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

174.-Una plataforma se desplaza en dirección vertical según la ecuación y=A (1-cos ωt), siendo A = 0,5 m y ω = π s^{-1}. Sobre la plataforma está situado un cuerpo de masa m= 1 kg.

a) Determinar la trayectoria, velocidad y aceleración de la plataforma.

b) Calcular la fuerza N con que la plataforma empuja a la masa m.

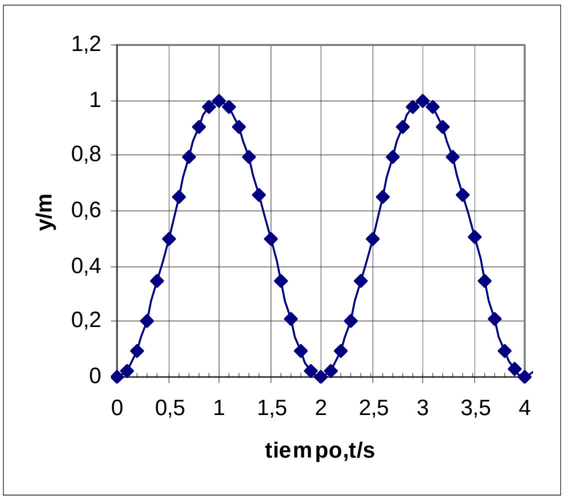
c) Calcular el valor de A mínimo para que desaparezca el contacto entre m y la plataforma.

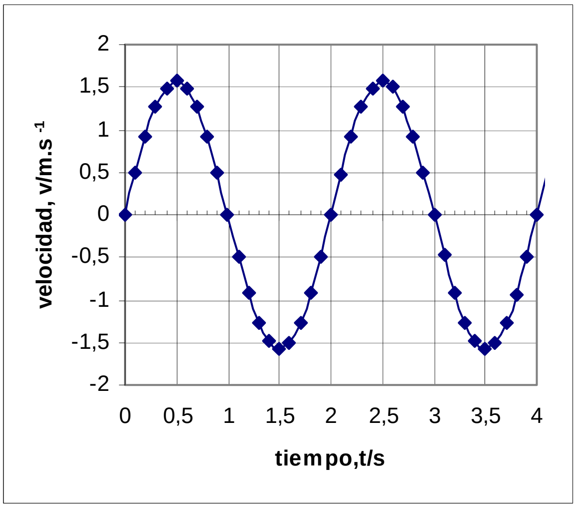
d) Si A = 1,8 m, calcular en qué lugar de la trayectoria de la plataforma cesa el contacto de m con ella.

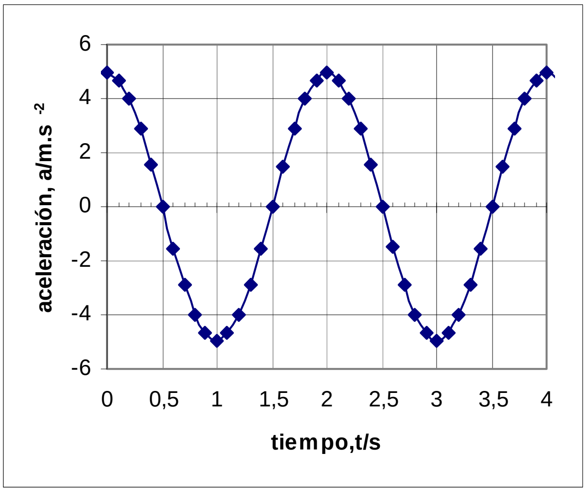
Si tenemos en cuenta las relaciones de la velocidad v y aceleración con y

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t \;\;;\;\; a = \frac{d^2y}{dt^2} = A\,\omega^2\cos\omega t$$

Ahora representamos los valores de y , v y a frente al tiempo







Al analizar las gráficas deducimos que la plataforma se desplaza hacia arriba y hacia abajo siguiendo un movimiento periódico $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\,s$

siendo la distancia máxima 1 m. La velocidad es nula en los extremos de la trayectoria y máxima en el centro y la aceleración es máxima en los extremos y nula en el centro. En el esquema de la figura 1 se indica los sentidos de la velocidad y aceleración.

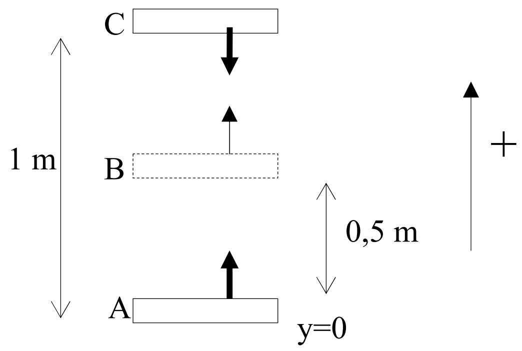


Fig.1

En la posición A la velocidad es nula y la aceleración máxima en sentido positivo. De A a B la velocidad aumenta y la aceleración disminuye en módulo y su sentido es positivo. En B la velocidad alcanza su máximo valor y la aceleración es nula.
Entre B y C la velocidad disminuye (siendo positiva) y la aceleración aumenta en sentido negativo. En C la aceleración es máxima y de sentido negativo y la velocidad es nula.
Entre C y B la velocidad aumenta (siendo negativa) y es máxima en B, de Ba C disminuye hasta anularse en A. La aceleración entre C y B es negativa y disminuye haciéndose nula en B, luego entre B y A aumenta en sentido positivo y es máxima en A A partir de 2 segundos el ciclo se repite.

b) Si escogemos una situación de la plataforma entre A y B cuando se desplaza en sentido positivo, las fuerzas que actúan sobre la masa m están representadas en la figura 2.

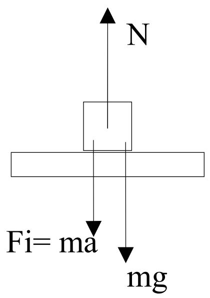
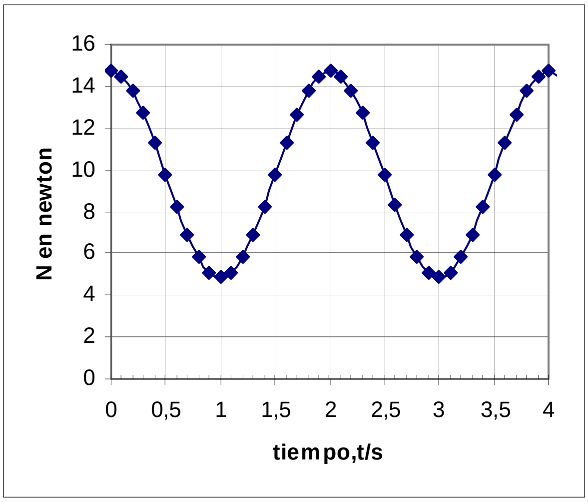


Fig.2

Se considera un sistema de referencia ligado a la masa m y por tanto no inercial, por esta razón se incluye una fuerza de inercia.

$$N = mg + Fi = mg + mA\omega^2 \cos\omega t = g + A\omega^2 \cos\omega t = 9{,}8 + 0{,}5 \cdot 3{,}14^2 \cdot \cos 3{,}14 \cdot t$$

Si en la ecuación anterior damos valores a t y hacemos la representación gráfica obtenemos la gráfica siguiente



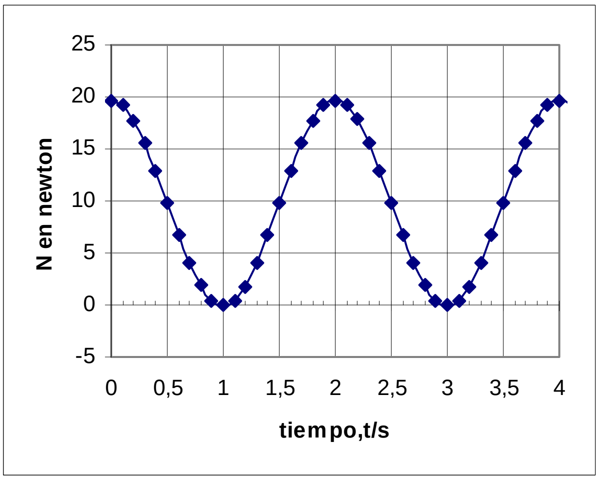
Teniendo en cuenta que N siempre es positivo de deduce que la masa m siempre permanece sobre la plataforma.

c) Si desaparece el contacto entre m y la plataforma el valor de N es nulo. Fijándonos en la gráfica de N frente a t se deduce que este hecho tiene lugar es en la posición superior ya que entonces la fuerza de inercia y el peso tienen la misma dirección y sentidos contrarios.

$$N=0=mg+Fi \Rightarrow mg=Fi \Rightarrow -mg=mA\omega^2\cos\omega\, t \Rightarrow A=\frac{-g}{\omega^2\cos\omega t}=\frac{-g}{\omega^2\cos\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A=\frac{g}{\omega^2}=\frac{9,8}{\pi^2}=1\,m$$

La representación gráfica de N frente a t para esta situación es la siguiente



d) Utilizamos la ecuación

$$N = mg + Fi = 0 \;\Rightarrow\; -g = A\omega^2\cos\omega\, t \;\Rightarrow\; \cos\omega\, t = -\frac{g}{A\,\omega^2} = -\frac{9,8}{1,8\cdot\pi^2} = -0,55$$

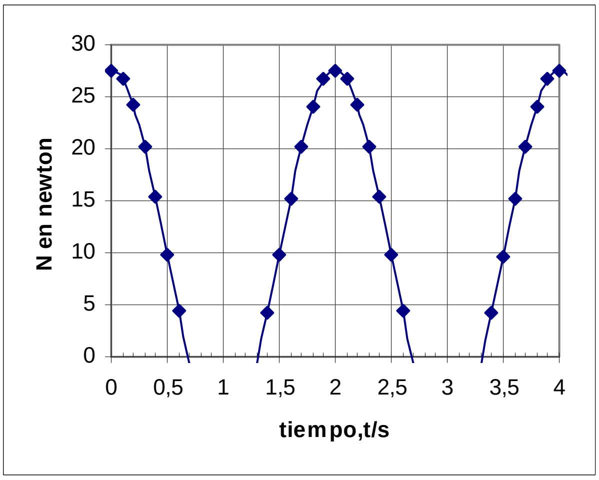
Llevando el valor del coseno a la ecuación de la posición resulta:

$$y = A(1-\cos\omega\, t) = 1,8(1+0,55) = 2,79\,m$$

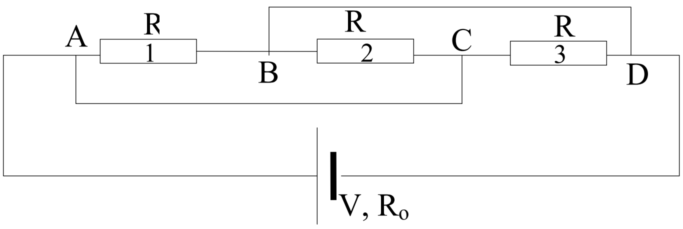
El tiempo para que ocurra el suceso anterior es:

$$\cos\omega\, t = -0{,}55 \Rightarrow \omega t = 2{,}15 \Rightarrow t = \frac{2{,}15}{\pi} = 0{,}68\,\mathrm{s}$$

La gráfica de N frente a t es la siguiente:



175.- A una fuente de corriente continua de resistencia interna R_o se unen tres resistencias iguales R, las cuales forman el esquema de la figura. Determinar para qué valor de R la potencia disipada en el conjunto de las tres resistencias es la máxima.



El conjunto de las tres resistencias puede ser reemplazado por una sola resistencia. Para ello tenemos en cuenta que los puntos Ay C están al mismo potencial y que los puntos B y D tienen el mismo potencial. Por tanto es posible reemplazar el circuito de la figura superior por el de la figura1

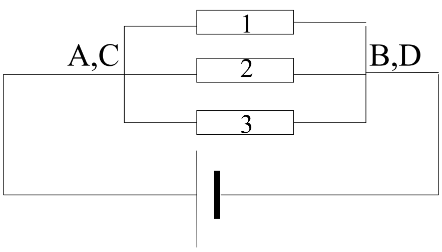


Fig.1

La resistencia equivalente al conjunto de las tres es R/3.

Aplicamos la ley de Ohm al circuito,

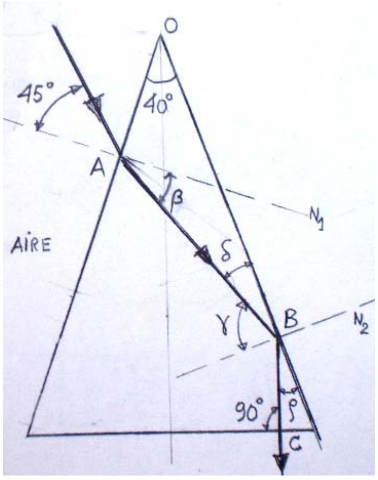
$$I = \frac{V}{R + R_o} \quad \Rightarrow \quad P = I^2 \cdot \frac{R}{3} = \left(\frac{V}{R + R_o}\right)^2 \cdot \frac{R}{3}$$

Para obtener la condición de potencia máxima derivamos P respecto de R e igualamos a cero

$$\frac{dP}{dR}=V^2\,\frac{\left(\frac{R}{3}+R_o\right)^2\cdot\frac{1}{3}-\frac{R}{3}\cdot 2\left(\frac{R}{3}+R_o\right)\cdot\frac{1}{3}}{\left(\frac{R}{3}+R_o\right)^4}=0 \quad\Rightarrow\left(\frac{R}{3}+R_o\right)^2-\frac{2}{3}R\left(\frac{R}{3}+R_o\right)=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{R}{3}+R_o\right)-\frac{2}{3}R=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{3}R=R_o \quad\Rightarrow\quad R=3R_o$$

176. En la figura inferior se indica la marcha de un rayo monocromático de luz que incide sobre un prisma isósceles.



Determinar el índice de refracción del mencionado prisma.

Aplicamos la ley de Snell

$$1\cdot \operatorname{sen}45=n\operatorname{sen}\beta \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\beta=\frac{\sqrt{2}}{2n}$$

La bisectriz del ángulo del prisma es paralela al rayo BC, por lo que $\rho=20^\circ$

$$\gamma+\delta=90^\circ \quad y \quad \gamma+\rho=90^\circ \;\Rightarrow \delta=\rho=20^\circ$$

Del triángulo OAB se deduce

$$40+(90+\beta)+\delta=180^\circ\Rightarrow \beta=50-\delta=30^\circ$$

$$\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}30^\circ=\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2n} \quad\Rightarrow\quad n=\sqrt{2}$$

177. La distancia entre el objeto y la imagen en una lente convergente es 12,5 cm. El objeto tiene un tamaño de 5 mm siendo el aumento lateral β=-1,5. Determinar las distancias s y s´ de la lente al objeto y a la imagen y la distancia focal de la lente.

De la interpretación del aumento lateral se deduce que la imagen es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto, por consiguiente el objeto está situado a una distancia de la lente mayor que la focal.

$$\beta = -1{,}5 = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -1{,}5 \cdot s \quad -s + s' = 12{,}5 \Rightarrow -s - 1{,}5s = 12{,}5 \Rightarrow s = -5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow s' = 12{,}5 + s = 12{,}5 - 5 = 7{,}5\,\text{cm}$$

Según la ley de la lentes

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{-5} + \frac{1}{7{,}5} = \frac{1}{f'} = \frac{7{,}5+5}{37{,}5} \Rightarrow f' = 3\,\text{cm}$$

178. Dos conductores rectilíneos de longitud infinita están situados en el plano XZ. El A corta al eje X en la coordenada –D y el B en la coordenada +D. La intensidad de la corriente es la misma en los dos conductores, en el A se dirige hacia el eje Z negativo y en el B hacia el eje Z positivo. Se pide calcular el campo magnético en los siguientes punto cuyas coordenadas son: (0;0;0) , (0;2D;0), y (2D;0;0).

El módulo del campo magnético creado por un conductor de longitud infinita esta dado por la expresión

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

Siendo r la distancia mínima entre el conductor y el punto donde se calcula el campo.
La anterior expresión se deduce a partir de la ley de Biot-Savart.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Haremos uso de la primera expresión para calcular el módulo del campo y de la segunda, concretamente del producto vectorial $d\vec{l} \times \vec{r}$ para saber la dirección y sentido del campo.

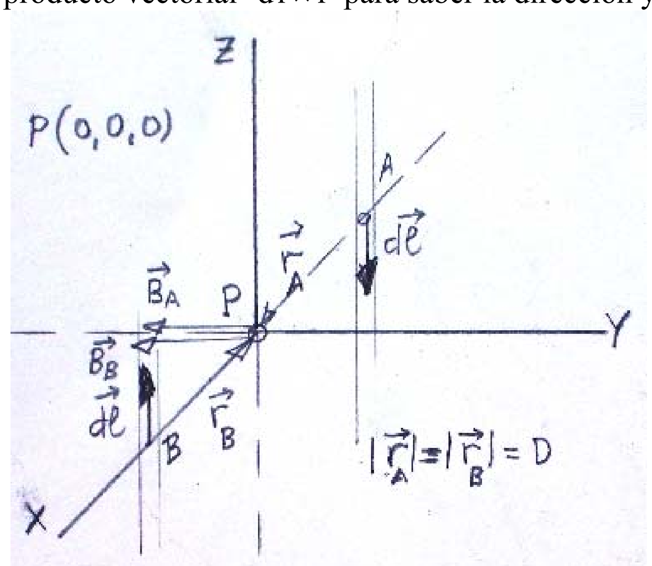


Fig.1

En la figura 1 se ha hecho una representación para calcular el campo en P(0;0;0).Ambos campos tienen la misma dirección y sentido en el eje Y negativo. Esta dirección y sentidos se obtienen a partir del producto $d\vec{l} \times \vec{r}$.

$$B = B_A + B_B = \frac{\mu_o I}{2\pi D} + \frac{\mu_o I}{2\pi D} = \frac{\mu_o I}{\pi D} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_o I}{\pi D}\vec{j}$$

En la figura 2a se ha representado la situación de los vectores y del punto P. Para aclarar dicha figura se ha hecho la figura 2b en el plano XY. Observando esta figura se deduce que los vectores $\vec{B}_A$ y $\vec{B}_B$ suman sus componentes sobre el eje Y y se anulan sobre el eje X.

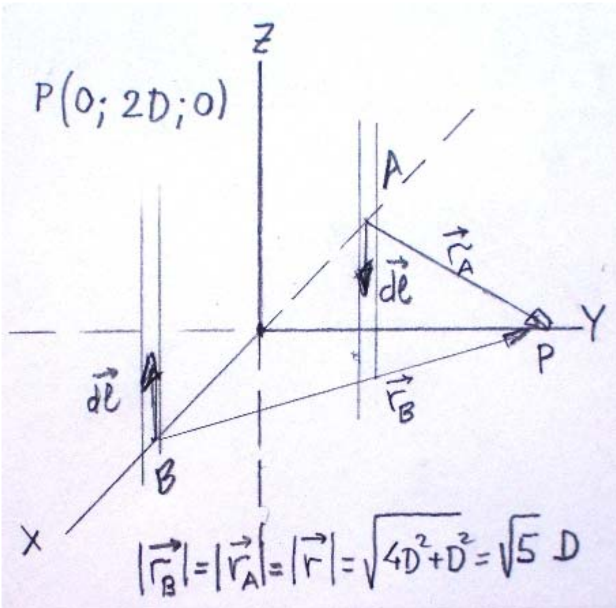


Fig.2 a

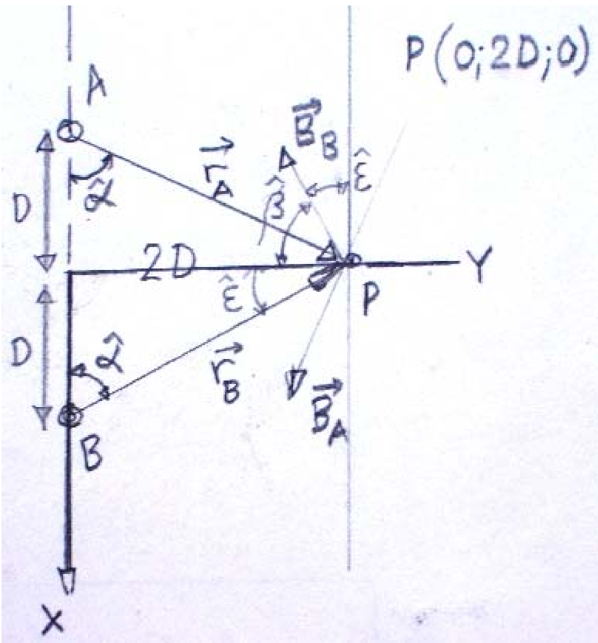


Fig. 2 b

$$B_A = \frac{\mu_o I}{2\pi r_A} = \frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{5}D} \quad ; \quad B_B = \frac{\mu_o I}{2\pi r_B} = \frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{5}D}$$

Teniendo en cuenta que las componentes sobre el eje X se anulan

$$B = B_A \cos\beta + B_B \cos\beta$$

De la figura 2 b se deduce que $\alpha + \varepsilon = 90^o$ y $\beta + \varepsilon = 90^o \Rightarrow \alpha = \beta$

$$B = B_A \cos\alpha + B_B \cos\alpha = \frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{5}D} \cdot \frac{D}{\sqrt{5}D} + \frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{5}D} \cdot \frac{D}{\sqrt{5}D} = \frac{\mu_o I}{5\pi D}$$

Como $\vec{B}$ tienen el sentido negativo del eje Y

$$\vec{B} = -\frac{\mu_o I}{5\pi D}\vec{j}$$

En la figura 3 se ha hecho una representación para calcular el campo en P(2D;0;0).

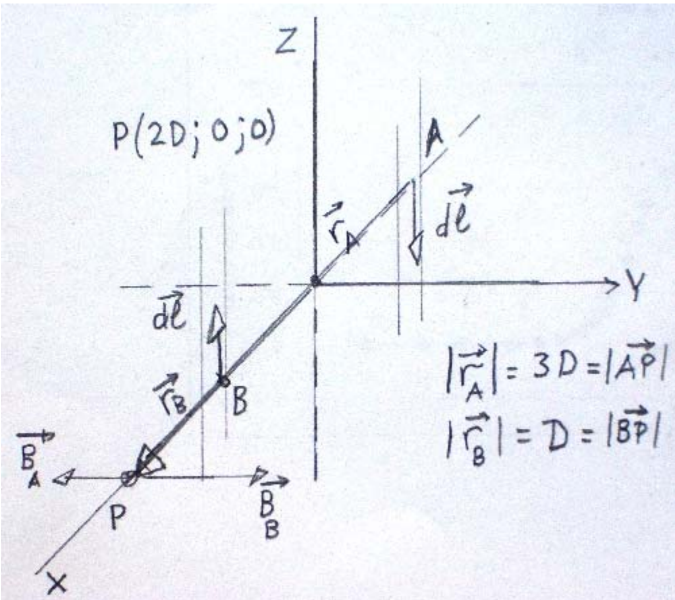
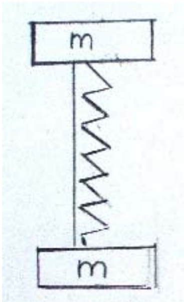


Fig.3

A la vista de la figura 3 y de las explicaciones anteriores se deduce:

$$B = B_B - B_A = \frac{\mu_o I}{2\pi D} - \frac{\mu_o I}{2\pi 3D} = \frac{\mu_o I}{2\pi D}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\mu_o I}{3\pi D} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_o I}{3\pi D}\vec{j}$$

179. En el sistema de la figura inferior las masas son iguales y el muelle está comprimido una distancia x respecto de su longitud natural en posición vertical. Ambas masas están unidas mediante una cuerda.
Si se rompe la cuerda, determinar a partir de qué valores de x la masa inferior que está apoyada sobre el suelo salta de éste.
La constante elástica del muelle es k.



En la figura 1 indicamos una marcha del proceso. En 1 el hilo que mantiene unidas a las masas se rompe, el muelle comienza a estirarse y en 2 adquiere su longitud natural, en 3 el muelle se estira más que su longitud natural, la masa m inferior sigue pegada al suelo y la masa m superior tiene una cierta velocidad vertical dirigida hacia arriba

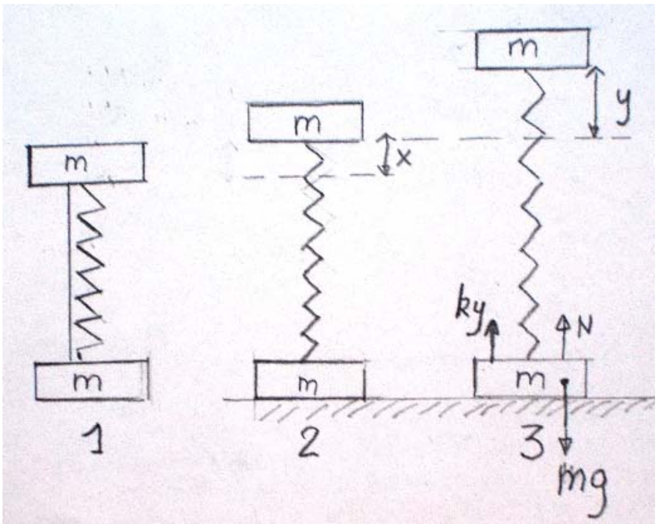


Fig.1

La energía almacenada en 1 vale $\frac{1}{2}kx^2$

La energía en 3 es: potencial respecto del suelo $mg(y+x)$+ energía elástica almacenada en el muelle estirado $=\frac{1}{2}ky^2$ + energía cinética de la masa m superior = $\frac{1}{2}mv^2$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mg(y+x) + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

En la figura 1,3, las fuerzas que actúan sobre la masa m inferior son: su peso (vertical y hacia abajo), la fuerza N con que el suelo empuja a la masa (vertical y hacia arriba) y la fuerza elástica del muelle ky (vertical y hacia arriba).
La masa m inferior se separará del suelo cuando N=0, entonces

$$mg = ky \;\Rightarrow\; y = \frac{mg}{k}$$

Llevando el valor de y a la ecuación (1) resulta:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{m^2g^2}{k} + mgx + \frac{1}{2}k\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{1}{2}mv^2 \;\Rightarrow\; x^2 - 2\frac{mgx}{k} - 3\frac{m^2g^2}{k^2} - \frac{mv^2}{k} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$x = \frac{2\frac{mg}{k} \pm \sqrt{4\frac{m^2g^2}{k^2} + 4\left(\frac{3m^2g^2}{k^2} \cdot \frac{mv^2}{k}\right)}}{2}$$

Si en la solución anterior establecemos un valor de v al resolverla obtendríamos el correspondiente valor de x, el cual es tanto mayor cuanto mayor es v. El valor mínimo de x corresponde a v=0

$$x = \frac{2\frac{mg}{k} \pm \sqrt{4\frac{m^2g^2}{k^2} + 4\left(\frac{3m^2g^2}{k^2}\right)}}{2} = \frac{2\frac{mg}{k} \pm 4\frac{mg}{k}}{2} = \frac{3mg}{k}$$

Cuando $x > \frac{3mg}{k}$ la masa m podrá separarse del suelo.

180. a) Un fotón de energía E choca contra una partícula estacionaria de masa en reposo m_o y es absorbido ¿Cuál es la velocidad de la partícula compuesta resultante?

b) Una partícula de masa en reposo m_o se desplaza a una velocidad de $v = \frac{4}{5}c$, choca con una partícula semejante que está en reposo y se forma una partícula compuesta.¿Cuál es la masa en reposo de la partícula compuesta y cuál su velocidad?

a) Designamos con v a la velocidad de la partícula compuesta y con M´ a su masa.

El principio de conservación de la energía nos dice:

Energía antes del choque: E +m_oc^2 ; Energía después del choque: $M'c^2 = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$E + m_oc^2 = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

El principio de la conservación de la cantidad de movimiento nos dice:

Antes del choque: $\frac{E}{c}+0$; después del choque $M'v=\frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$\frac{E}{c}=\frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2)

$$\frac{E+m_o c^2}{c^2}=\frac{E}{c\,v} \Rightarrow v=\frac{E\,c}{E+m_o c^2}=\frac{c}{1+\frac{m_o c^2}{E}}$$

b) Designamos con M a la masa de la partícula compuesta y con u a su velocidad.
Por ser un choque inelástico existe conservación de la cantidad de movimiento.

$$\frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=M'u=\frac{M_o u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (3)$$

La conservación de la masa

$$\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_o=\frac{M_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (4)$$

De (3) y (4)

$$\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_o=\frac{m_o v}{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+1=\frac{v}{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{v}{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{v}{u} \Rightarrow 1+\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}=\frac{v}{u} \Rightarrow 1+\frac{3}{5}=\frac{v}{u} \Rightarrow \frac{8}{5}=\frac{\frac{4}{5}c}{u} \Rightarrow u=\frac{c}{2}$$

Llevando el valor de u a la ecuación (4) resulta:

$$\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}}+m_0=\frac{M_o}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \Rightarrow \frac{5m_o}{3}+m_o=\frac{2M_o}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{8\,m_o}{3}=\frac{2M_o}{\sqrt{3}} \Rightarrow M_o=\frac{4\,m_o\sqrt{3}}{3}$$