

## PROBLEMAS VARIADOS 23

**181.-El modelo de Thomson para el átomo de hidrógeno es una esfera de radio  $R$  con carga positiva uniformemente distribuida sobre dicha esfera, en el centro de ella se encuentra un electrón. En conjunto el átomo es neutro. Calcular el valor de  $R$  si la energía mínima que hay que comunicar al electrón para arrancarlo del átomo y llevarlo al infinito vale  $W$ .**

**Datos: carga del electrón  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $W = 13,6 \text{ eV}$**

En principio suponemos que el electrón se encuentra en el infinito y que existe una esfera de radio  $R$  uniformemente cargada positivamente. Acercamos el electrón hasta la superficie de la esfera de radio  $R$ , lo cual nos supondrá un trabajo que designamos por  $W_1$ . Posteriormente introducimos el electrón en la esfera hasta dejarlo en el centro de ella, lo cual supondrá un trabajo  $W_2$ . Debemos tener en cuenta que el potencial eléctrico en el infinito es nulo y que el trabajo eléctrico es igual a

$$W = q(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}})$$

Calculamos el campo en la superficie de la esfera de radio  $R$ , para ello utilizamos el teorema de Gauss

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\epsilon_0} \Rightarrow E_s = \frac{e}{S} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

A partir del valor del campo calculamos el potencial en la superficie

$$E_s = -\frac{dV_s}{dR} \Rightarrow -V_s = \int \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} + \text{Cte}$$

Cuando  $R$  es infinito el potencial es cero, por lo que resulta:

$$V_s = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R}$$

El trabajo para llevar el electrón desde el infinito hasta la superficie de la esfera de radio  $R$  vale:

$$W_1 = e \left( 0 - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

El signo negativo indica que es un trabajo que se hace desde el exterior contra las fuerzas del campo.

Vamos a calcular el campo en el interior de la esfera de radio  $R$ . Para ello aplicamos el teorema de Gauss a una esfera concéntrica de radio  $r < R$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$q$  es la carga que existe en el interior de la esfera de radio  $r$ .

Teniendo en cuenta que la esfera de radio  $R$  tiene la carga  $e$  uniformemente distribuida, la densidad volumétrica de carga es:  $\frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$  y la carga de la esfera de radio  $r$

$$q = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = e \frac{r^3}{R^3}$$

El campo en el interior de la esfera de radio  $r$  es:

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \frac{r^3}{R^3}}{r^2} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

Ahora calculamos el potencial en el interior de la esfera de radio  $R$ .

$$E_i = -\frac{dV_i}{dr} \Rightarrow -V_i = \int \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r dr = \frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + Cte$$

Para determinar la constante tenemos en cuenta que cuando  $r=R$  el potencial es:  $V_s = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R}$

$$-\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{eR^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$-V_i = \frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} - \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow V_i = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

El potencial en el centro de la esfera se obtiene haciendo  $r=0$  en la ecuación anterior:

$$V_{\text{centro}} = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R}$$

El trabajo  $W_2$ , para llevar el electrón desde la superficie al centro de la esfera de radio  $R$  es:

$$W_2 = e(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}}) = e \left[ \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} - \left( \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R} \right) \right] = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Trabajo total.

$$W_T = W_1 + W_2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -\frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

El signo negativo indica que es un trabajo que se debe realizar desde el exterior:

$$W = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow R = \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 W} = \frac{3 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

**182.-Un mol de un gas ideal realiza una transformación reversible desde un estado inicial ( 291 K, 21 L) hasta un estado final ( 305 K, 12,7 L). En el diagrama P-V esta transformación queda representada por una línea recta. Determinar a) el trabajo y el calor implicados en la mencionada transformación. Dato  $C_v = (5/2)R$ .**

El trabajo viene determinado por la integral  $W = - \int_{V_I}^{V_F} P dV$ , para poder resolverla necesitamos conocer la relación entre las variables P y V. Hallamos mediante la ecuación de los gases perfectos las presiones de los dos estados.

$$P_I V_I = 1 \text{ mol} \cdot R T_I \Rightarrow P_I = \frac{1 \cdot \text{mol} \cdot 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{molK}} \cdot 291 \text{ K}}{21 \text{ L}} = 1,14 \text{ atm}$$

$$P_F V_F = 1 \text{ mol} \cdot R T_F \Rightarrow P_F = \frac{1 \cdot \text{mol} \cdot 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{molK}} \cdot 305 \text{ K}}{12,7 \text{ L}} = 1,97 \text{ atm}$$

En el diagrama, PV tenemos dos puntos de coordenadas (1,14 atm , 21 L) y (1,97 atm , 12,7 L) unidos por una recta. La ecuación general de la recta es  $P = m V + b$ , siendo m la pendiente y b la ordenada en el origen. La pendiente y ordenada en el origen son:

$$\text{tag } \alpha = \frac{1,97 - 1,14}{12,7 - 21} = -0,1 \Rightarrow P = -0,1 V + b \Rightarrow 1,14 = -0,1 \cdot 21 + b \Rightarrow b = 3,24$$

Sustituyendo la ecuación p-V en la integral

$$W = - \int_{21}^{12,7} (-0,1 V + 3,24) dV = 0,1 \frac{V^2}{2} - 3,24 V \Big|_{21}^{12,7} = 0,05 \cdot (12,7^2 - 21^2) - 3,24(12,7 - 21) \Rightarrow$$

$$W = 12,9 \text{ atm} \cdot \text{L} = 12,9 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot 101325 \frac{\text{N}}{\text{atm}} \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{\text{L}} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Como el trabajo es positivo es un trabajo que se realiza desde fuera sobre el sistema.

$$\Delta U = C_v (T_f - T_i) = Q + W \Rightarrow Q = C_v (T_f - T_i) - W = \frac{5}{2} R (305 - 291) - 1,3 \cdot 10^3 \Rightarrow$$

$$Q = 2,5 \cdot 8,31 \cdot 14 - 1,3 \cdot 10^3 = -1,0 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Un calor con signo negativo significa que el sistema cede ese calor al medio exterior.

**183.-A las doce del mediodía un cohete espacial pasa frente a la Tierra con una velocidad  $0,8c$ . Los observadores de la nave y de la Tierra están de acuerdo en que efectivamente es mediodía.**

**a) A las 12h 30 min., según un reloj situado en la nave, ésta pasa por delante de una estación interplanetaria que se encuentra fija con relación a la Tierra y cuyos relojes señalan el tiempo de la Tierra. ¿Qué hora es en la estación?**

**b) ¿A qué distancia de la Tierra (en coordenadas terrestres) se encuentra la estación?**

**c) A las 12 h 30 min., hora de la nave, se establece comunicación con la Tierra desde la nave. ¿Cuándo (en tiempo de la Tierra) recibe ésta la señal?**

**d) La estación terrestre contesta inmediatamente. ¿Cuándo se recibirá la respuesta (hora de la nave)?**

Designamos con S al sistema ligado a la Tierra y con S' el ligado a la nave, por tanto, S' se desplaza con velocidad  $0,8c$  respecto de S.

a) Utilizamos la relación

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{30 \text{ min}}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 50 \text{ min.}$$

$\Delta t$  es el intervalo temporal para el sistema S, luego la hora en la estación y en la Tierra es: 12h 50 min.

b) La posición de la estación espacial es la misma que ocupa la nave a las 12h 50 min. Dado que su velocidad es  $0,8c$ , la distancia vale:

$$d = 0,8c \cdot (50 \cdot 60 \text{ s}) = 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 3000 = 7,2 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

c) La señal viaja a la velocidad de la luz y ha de recorrer la distancia  $7,2 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{7,2 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 2400 \text{ s} = 40 \text{ min}$$

Desde las 12 h 50 min han pasado 40 minutos más, por tanto la hora en la Tierra es. 1h 30 min.

d) Calculamos la distancia D, de la nave respecto de la Tierra cuando ésta emite la señal de respuesta hacia la nave.

$$\Delta x = 0,8c \cdot 2400 \text{ s} = 5,76 \cdot 10^{11} \text{ m} \Rightarrow D = 7,2 \cdot 10^{11} + 5,76 \cdot 10^{11} = 1,296 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

Calculamos la hora que marca en ese instante el reloj de la nave

$$40 \text{ min} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 24 \text{ min} \Rightarrow 12 \text{ h } 30 \text{ min} + 24 \text{ min} = 12 \text{ h } 54 \text{ min}$$

Designamos con  $t_f$  el intervalo de tiempo (en tiempo terrestre) que necesita la señal emitida por la Tierra en llegar a la nave y con  $d$  la distancia que recorre la nave en ese tiempo

$$d = 0,8c \cdot t_f$$

Cuando la señal alcance la nave, dicha señal habrá recorrido una distancia  $D+d$ .

$$D + d = c \cdot t_f \Rightarrow 1,296 \cdot 10^{12} + 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot t_f = 3 \cdot 10^8 t_f \Rightarrow t_f = 21600s = 6 \text{ horas}$$

El intervalo de 6 horas está medido con los relojes de la Tierra, con los de la nave son:

$$6 \text{ horas} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-0,8^2}} \Rightarrow \Delta t = 3,6 \text{ horas} = 3 \text{ horas} + 36 \text{ min}$$

El reloj de la nave marcará

$$12h 54min + 3horas36min = 4h 30min$$

**184.-Un radioisótopo del fósforo tiene un periodo de semidesintegración  $T = 14,3$  días y se forma en un reactor nuclear a velocidad constante  $q = 2,7 \cdot 10^9$  núcleos/s. Determinar cómo varía la actividad de la muestra con el tiempo.**

En el instante inicial no existe nada del isótopo; la cantidad del mismo aumenta a medida que pasa el tiempo, ese aumento lo provoca la producción del reactor nuclear pero al mismo tiempo ocurre que parte del radioisótopo desaparece como consecuencia de que es radiactivo.

Designamos con  $N$  el número de núcleos de fósforo que existen en un tiempo  $t$ . La velocidad de crecimiento del número de átomos está dada por la ecuación siguiente:

$$\frac{dN}{dt} = q - \lambda N = q - \frac{T}{\ln 2}$$

El primer término de la ecuación da la velocidad de formación del radioisótopo y el segundo la velocidad de desaparición.

La ecuación diferencial anterior se resuelve multiplicándola por el término  $e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t} \frac{dN}{dt} + \lambda N e^{\lambda t} = q e^{\lambda t} \Rightarrow \frac{d}{dt} (N e^{\lambda t}) = q e^{\lambda t}$$

La solución de la ecuación es:

$$N e^{\lambda t} = \frac{q}{\lambda} e^{\lambda t} + Cte$$

La constante de integración se halla teniendo en cuenta que para  $t=0$ ,  $N=0$

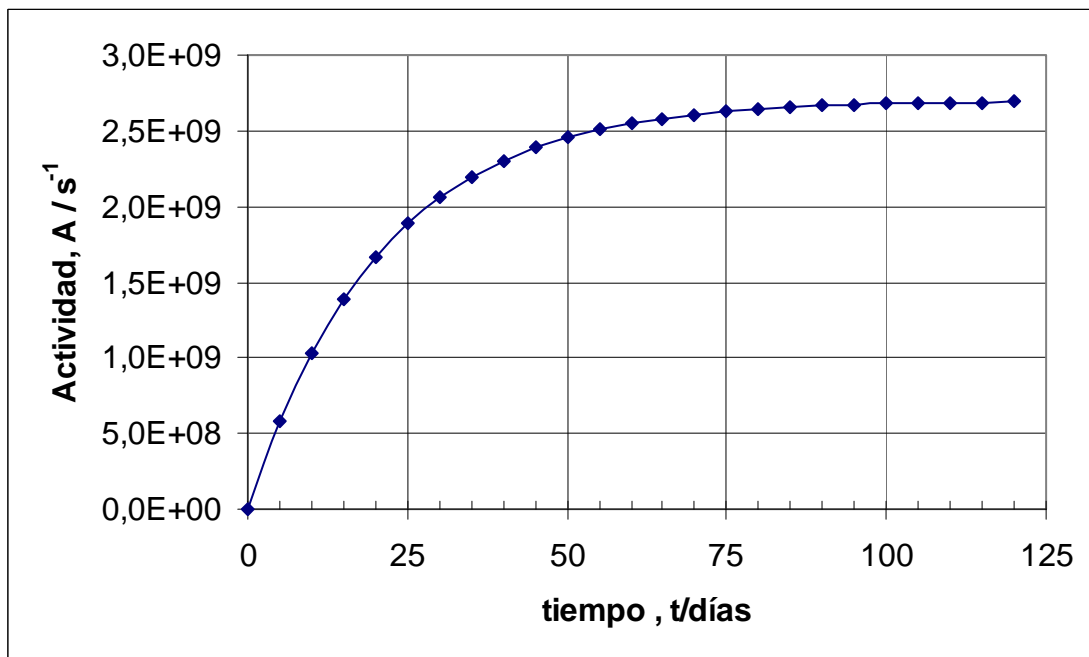
$$0 = \frac{q}{\lambda} + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{q}{\lambda}$$

$$N e^{\lambda t} = \frac{q}{\lambda} e^{\lambda t} - \frac{q}{\lambda} \Rightarrow N = \frac{q}{\lambda} - \frac{q}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

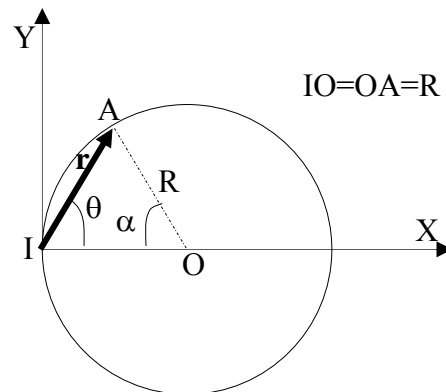
La actividad de a muestra es  $\lambda N$ .

$$A = q(1 - e^{-\lambda t}) = q \left( 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right)$$

La ecuación anterior nos dice que cuando  $t=0$  la actividad es nula y cuando el tiempo es muy grande, infinito, se obtiene una actividad igual a  $q$ . Si representamos la actividad frente al tiempo obtendremos una curva cuya asíntota es  $q$ .



185.-Una partícula puntual A describe la circunferencia de radio  $R = 50 \text{ m}$ . El radio vector  $\vec{r}$  gira respecto al eje X con una velocidad angular constante  $\omega = 0,40 \text{ rad/s}$ .



Determinar las componentes de la velocidad y aceleración sobre los ejes coordenados. Calcular los módulos de la velocidad y aceleración. Representar las correspondientes gráficas utilizando el eje de abscisas como eje de tiempos.

El triángulo IOA es isósceles; el ángulo  $\angle IAO$  vale  $\theta$ , luego  $\alpha + 2\theta = \pi \Rightarrow \alpha = \pi - 2\theta$   
Si en dicho triángulo aplicamos el teorema del seno resulta:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{r} = \frac{\text{sen } \theta}{R} \Rightarrow r = R \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \theta}$$

Consideremos el tiempo  $t=0$  cuando la partícula A pasa por el punto I y  $t$  cuando la partícula forma un ángulo  $\theta$  con el eje X. Cuando  $t=0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y cuando  $t$ , el ángulo con el eje X es  $\theta$ .

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \omega t$$

Resulta que:  $r = R \frac{\text{sen}(\pi - 2\theta)}{\text{sen } \theta} = R \frac{\text{sen } \pi \cdot \cos 2\theta - \cos \pi \cdot \text{sen } 2\theta}{\text{sen } \theta} = R \frac{\text{sen } 2\theta}{\text{sen } \theta} = 2R \cos \theta$

Las proyecciones de  $r$  sobre los ejes X e Y son:

$$r_x = r \cos \theta = 2R \cos^2 \theta = 2R \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \omega t \right)$$

$$r_y = r \text{sen } \theta = 2R \text{sen } \theta \cos \theta = R \text{sen } 2\theta = R \text{sen}(\pi - 2\omega t)$$

Las componentes de la velocidad sobre los ejes son:

$$v_x = \frac{dr_x}{dt} = -4R\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \cdot (-\omega) = 2R\omega \sin(\pi - 2\omega t)$$

$$v_y = \frac{dr_y}{dt} = R\cos(\pi - 2\omega t) \cdot (-2\omega) = -2R\omega \cos(\pi - 2\omega t)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4R^2\omega^2 [\sin^2(\pi - 2\omega t) + \cos^2(\pi - 2\omega t)]} = 2R\omega$$

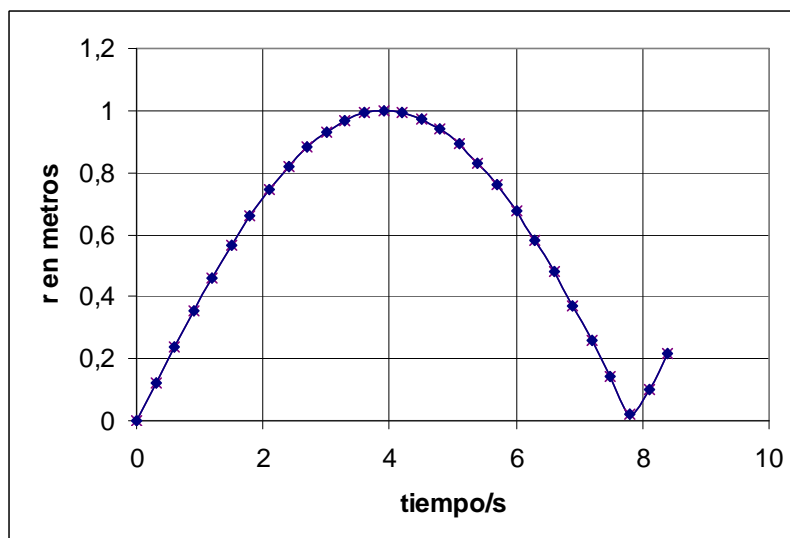
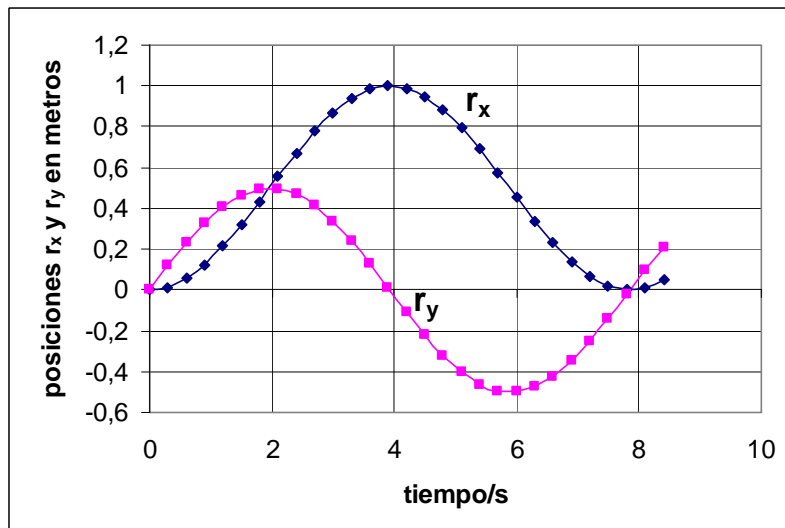
Las componentes de la aceleración sobre los ejes son:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2R\omega \cos(\pi - 2\omega t) \cdot (-2\omega) = -4\omega^2 R \cos(\pi - 2\omega t)$$

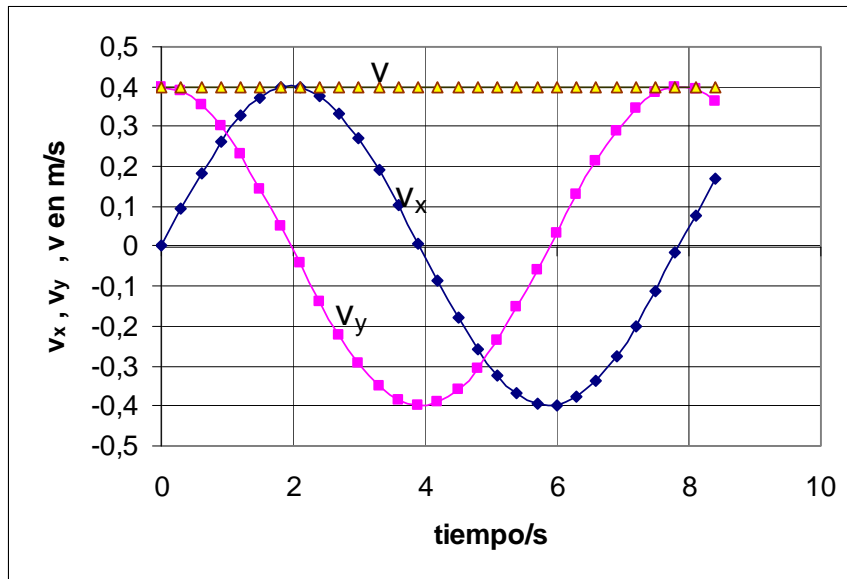
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2R\omega \sin(\pi - 2\omega t) \cdot (-2\omega) = -4\omega^2 R \sin(\pi - 2\omega t)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{16\omega^4 R^2 [\sin^2(\pi - 2\omega t) + \cos^2(\pi - 2\omega t)]} = 4R\omega^2$$

Las gráficas de las componentes de la posición y r frente al tiempo son:



Gráfica de las velocidades



Gráfica de las aceleraciones

