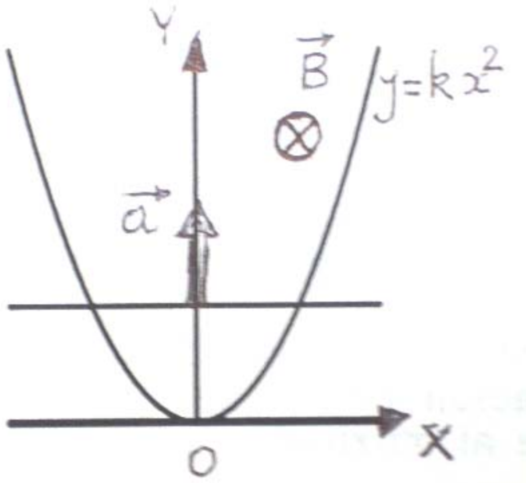
PROBLEMAS VARIADOS 24

186.-Un conductor filiforme tiene la forma de una parábola de ecuación $y = kx^2$, y está situado en el plano XY. Perpendicular a dicho plano existe un campo magnético constante B.



En el instante t=0 una barra horizontal arranca desde el vértice de la parábola desplazándose con una aceleración constante a. Encontrar la fuerza electromotriz del circuito debido al movimiento de la barra en función de y.

En el instante t=0 la barra está sobre el eje X, un tiempo después t se encuentra en la posición indicada en la figura1, siendo su altura sobre el vértice de la parábola

$$y = \frac{1}{2} a\, t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{a}}$$

La velocidad de la barra en ese instante es v=at. Transcurrido un tiempo dt la barra se ha desplazado una altura dy = vdt=at dt y ha barrido la superficie

$$dS = 2x\ dy = 2x\ v\ dt$$

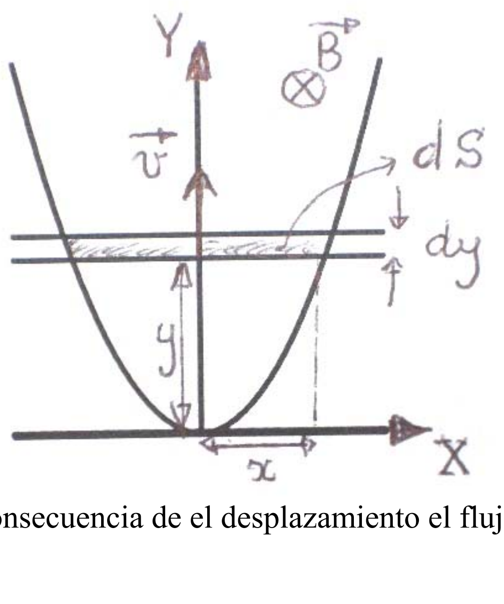


Fig.1

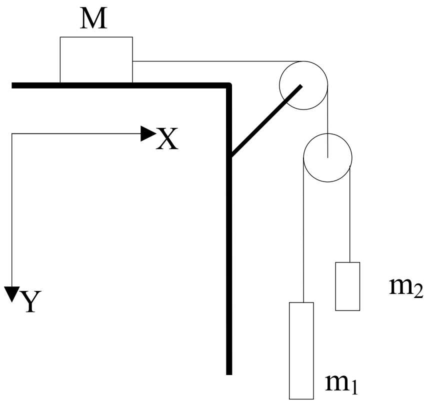
Como consecuencia de el desplazamiento el flujo magnético ha aumentado en

$$d\Phi_M = B \cdot dS = B\,2\,x\,v\,dt = B\,2\sqrt{\frac{y}{k}}a\,t\,dt$$

El valor absoluto de la fuerza electromotriz es:

$$\varepsilon = \left|\frac{dB}{dt}\right| = 2B\sqrt{\frac{y}{k}}\,a\sqrt{\frac{2y}{a}} = 2B\sqrt{\frac{2y^2a}{k}} = 2By\sqrt{\frac{2a}{k}}$$

187.- a) Calcular la aceleración de la masa m_1 en el sistema de poleas de la figura Se supone que no existen rozamientos, que las masas de las poleas y de las cuerdas son despreciables y que las cuerdas no varían su longitud cuando se someten a tensión.



b) Representar las aceleraciones para M=1kg, m_1=1kg y m_2 variable.

c) Representar las aceleraciones para m_1= 2kg, m_1=1 kg y M variable.

a) En la figura 1 se representan las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas

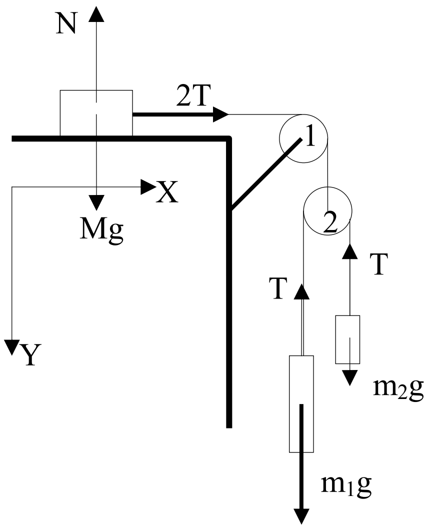


Fig.1

Las ecuaciones derivadas de la ley de Newton para cada masa son:

$$2T = Ma_x \qquad (1)$$
$$m_1 g - T = m_1 a_{1y} \qquad (2)$$
$$m_2 g - T = m_2 a_{2y} \qquad (3)$$

Como la polea 2 está unida a la masa M por una cuerda inextensible, la aceleración de la polea 2 es igual numéricamente a la de la masa M y a partir de ahora designamos $a=a_x$

Supongamos que M se desplaza de izquierda a derecha una distancia Δx en un tiempo Δt, en ese mismo tiempo la masa m_1 se desplaza hacia abajo una distancia Y, respecto de la polea 2, y la polea 2 se desplaza hacia abajo una distancia y, que numéricamente
es igual a Δx. El desplazamiento total de m_1 respecto de los ejes fijos es: $Y+\Delta x$. La masa m_2 se desplaza $-Y$ hacia arriba respecto de la polea 2, y $+\Delta x$ hacia abajo en total $-Y+\Delta x$.
Las aceleraciones son proporcionales a los desplazamientos

$$a = k\Delta x \quad , \quad a_1 = k(Y + \Delta x) \quad , \quad a_2 = k(-Y + \Delta x)$$

De las relaciones anteriores se deduce:

$$a_1 + a_2 = k(Y + \Delta x - Y + \Delta x) = 2k\,\Delta x = 2a \qquad (4)$$

Multiplicamos la ecuación (2) por 2 y la sumamos a la (1). Cambiamos de signo a la (3) y la sumamos con la (2)

$$2m_1 g = Ma + 2m_1 a_1\,(5) \quad ; \quad g(m_1 - m_2) = m_1 a_1 - m_2 a_2\,(6)$$

En la ecuación (5) sustituimos a de la ecuación (4), y en la ecuación (6) despejamos a_2.

$$2m_1 g = M\frac{a_1 + a_2}{2} + 2m_1 a_1\,(7) \quad ; \quad a_2 = -\frac{g(m_1 - m_2)}{m_2} + \frac{m_1}{m_2}a_1 \ (8)$$

Sustituimos el valor de a_2 en (7)

$$2m_1 g = \frac{M}{2}a_1 + \frac{M}{2}\left[\frac{m_1 a_1}{m_2} - \frac{m_1 g}{m_2} + g\right] + 2m_1 a_1 \quad \Rightarrow$$
$$4m_1 g = Ma_1 + \frac{Mm_1}{m_2}a_1 - \frac{Mm_1}{m_2}g + Mg + 4m_1 a_1 \quad \Rightarrow$$
$$4m_1 m_2 g + Mm_1 g - Mm_2 g = a_1(Mm_2 + Mm_1 + 4m_1 m_2) \Rightarrow \quad a_1 = \frac{4m_1 m_2 + M(m_1 - m_2)}{4m_1 m_2 + M(m_1 + m_2)}g$$

b)

$$a_1 = \frac{4m_2 + 1 - m_2}{4m_2 + 1 + m_2}g = \frac{3m_2 + 1}{5m_2 + 1}g$$

$$a_2 = \frac{a_1 - g(1 - m_2)}{m_2}$$

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Las gráficas corresponden a la figura1

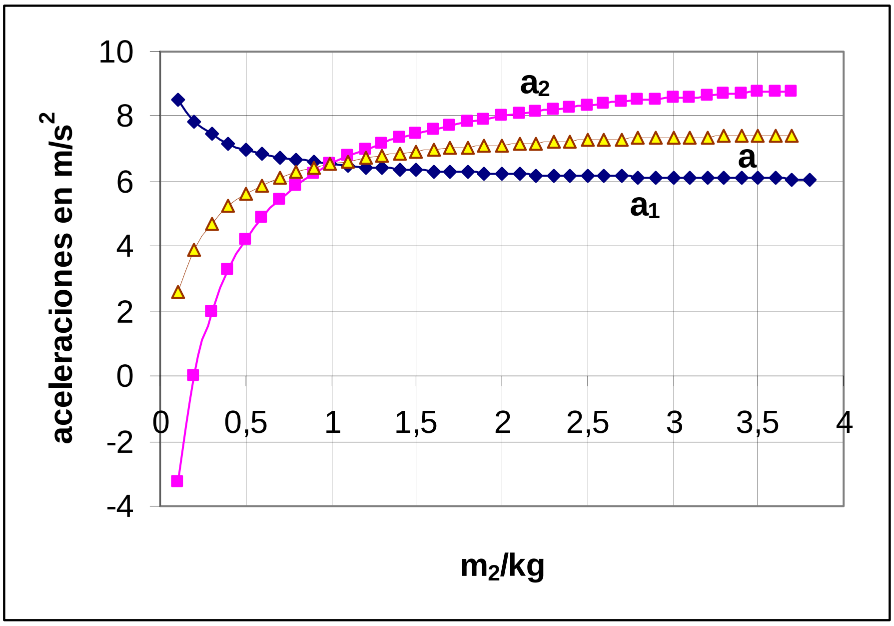


Fig.1

c)

$$a_1 = \frac{8+M}{8+3M} g \quad , \quad a_2 = 2a_1 - g \quad , \quad a = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

La graficas de las aceleraciones corresponden a la figura 2.

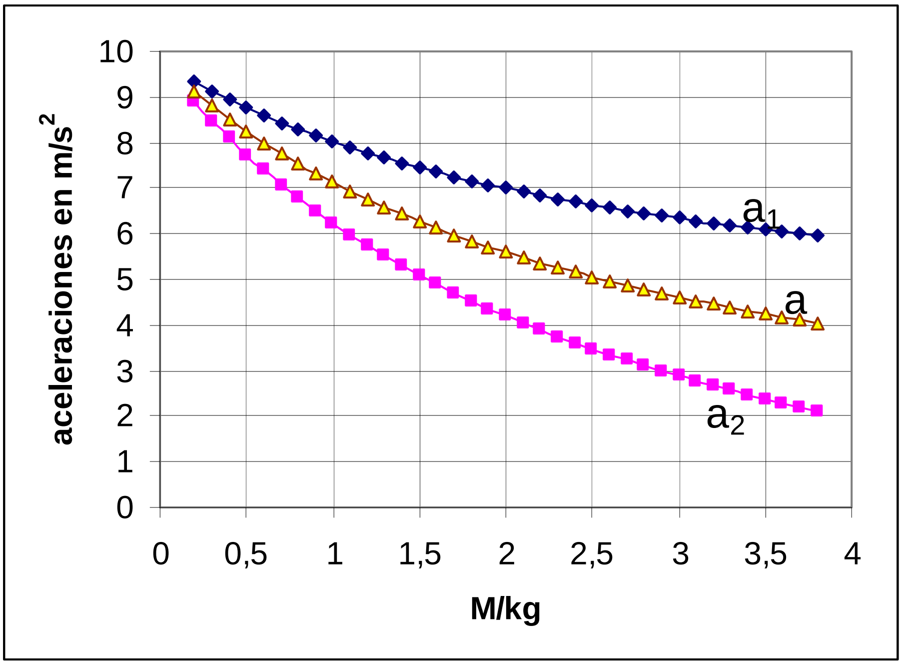


Fig.2

188.-Dos anillos finos de alambre tienen el mismo radio R, están uno frente al otro, de modo que tienen el mismo eje. La carga de uno es +q y la del otro –q. a) Calcular la diferencia de potencial que existen entre los centros de los anillos. b) Calcular el campo en el eje del anillo cuando a = R =1 m

a) Designamos a los anillos con A y B. El potencial en el centro del anillo A se debe al potencial que crea en ese punto su carga +q y que llamamos V_{AA}, más el potencial que crea la carga del otro anillo –q y que denominamos V_{BA}.
Recordemos que el potencial creado por una carga puntual Q a una distancia d, está dado por la expresión

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{d}$$

En el anillo A la carga está distribuída de forma uniforme por todo el anillo siendo su densidad lineal

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

Si consideremos un trocito del anillo de longitud dl tendrá una carga

$$dq = \lambda\, dl = \frac{q}{2\pi R}dl$$

Y creará en el centro del anillo, un potencial $dV_{AA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\frac{q}{2\pi R}dl}{R}$. El potencial creado por todo el anillo se obtiene integrando la anterior ecuación:

$$V_{AA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{q}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R}$$

El potencial creado por el anillo B en el centro de A

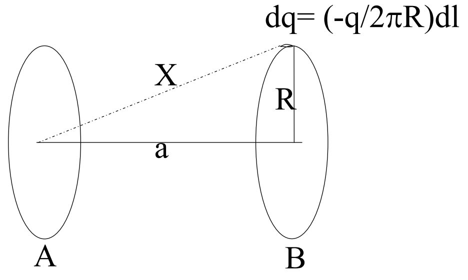


Fig.1

$$V_{BA} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{-q\,dl}{2\pi R}\cdot\frac{1}{Y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{-q}{2\pi R}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\int_0^{2\pi R} dl = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

El potencial en A es la suma de los dos potenciales

$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{a^2+R^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

El potencial en B es:

$$V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

La diferencia de potencial

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}} + \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

b) En la figura 2 se ha representado el campo creado por un trocito del anillo A de carga dq , situado en 1, y otro trocito del anillo B con carga –dq.

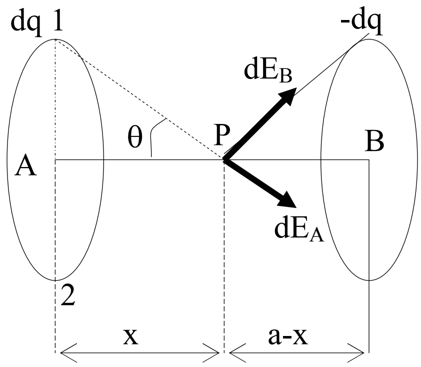


Fig.2

Si escogemos otro elemento del anillo A situado en 2 crearía un campo que sumado con el de 1 nos daría que la componente vertical se anula y la horizontal se suma. El razonamiento es válido para el anillo B.

$$dE_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{X^2} \Rightarrow \quad (dE_A)_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{X^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{X^3}\cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E_A)_X = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\frac{q}{2\pi R}dl}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qR}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dE_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{Y^2} \Rightarrow \quad (dE_B)_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{Y^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{Y^3}\cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E_B)_X = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\frac{q}{2\pi R}dl}{\left[\left((a-x)^2+R^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\cdot R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qR}{\left[\left((a-x)^2+R^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

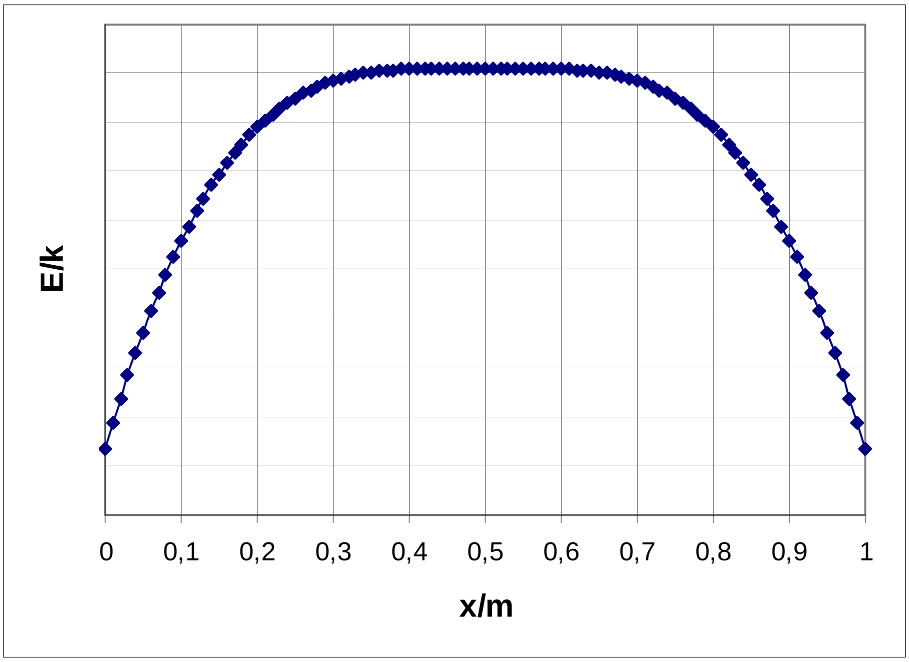
El campo en P es la suma de los dos anteriores

$$E = (E_A)_X + (E_B)_X = \frac{qR}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[(a-x)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

La ecuación anterior para a=R=1 m es:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[(1-x)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}\right] = k\left[\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[(1-x)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Si en la ecuación damos valores a x y representamos E/k obtenemos una visión de cómo es el campo.



Alrededor de la posición x=0,5 m el campo es prácticamente constante desde x=0,3 m a x=0,7 m.

189.-Dos masas iguales $m=10^{-3}$ kg con la misma carga Q =1 μC están apoyadas sobre un suelo horizontal a una distancia D =1 m. Ambas masas se mantienen en reposo. Posteriormente se dejan en libertad; sabiendo que el coeficiente de rozamiento de las mencionadas masas con el suelo es μ=0,1, se pide a) La distancia que recorrerá cada una de las masas hasta que se paran b) La ecuación de la velocidad de las masas c) El valor numérico de la velocidad máxima durante el movimiento.

d) La gráfica de la velocidad frente a la distancia recorrida

Datos $g=10\ m/s^2$; $\varepsilon_o=8,85.10^{-12}\ N^{-1}\ m^{-2}\ C^2$

a) Cuando las masas se dejan en libertad se desplazan alejándose entre sí. Inicialmente las dos masas, debido a sus cargas, poseen energía potencial eléctrica, la cual disminuye a medida que se alejan, pero durante el movimiento existe una fuerza de rozamiento que realiza un trabajo disipativo. Un balance de energía nos dice que las masas se pararan cuando la pérdida de energía potencial eléctrica sea igual al trabajo de las fuerzas de rozamiento.
Designamos con z a la distancia que recorre cada una de las masas hasta que se paran. El balance de energía es el siguiente:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{D}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{D+2z}=\mu m g\cdot 2z \Rightarrow \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{D+2z}\right)=\mu m g\cdot 2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o \mu m g}\left[\frac{2z}{D(D+2z)}\right]=2z \Rightarrow \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o\mu m g D}=D+2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o \mu m g D}-\frac{D}{2} \Rightarrow z=\frac{10^{-12}}{8\pi\cdot 8{,}85.10^{-12}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 1}-\frac{1}{2}=4{,}0\,\mathrm{m}$$

b) Designamos con x<z la distancia recorrida por cada una de las masas. La distancia entre ambas masas es D+2x y las fuerzas que actúan sobre una de las masas es la fuerza de repulsión eléctrica y la fuerza de rozamiento, ambas con la misma dirección y sentido contrario. Aplicamos la segunda ley de Newton

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{(D+2x)^2}-\mu m g=m a=m\frac{dv}{dt}=m\cdot\frac{dx}{dt}=m v\frac{dv}{dx}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{(D+2x)^2 m}dx-\int\mu g\,dx=\int v\,dv$$

Para resolver la primera integral hacemos el siguiente cambio de variable: D+2x=a
Y por tanto 2 dx =da

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\int\frac{da}{2a^2}=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2a}=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2(D+2x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2(D+2x)}-\mu g x=\frac{v^2}{2}+\mathrm{Cte}\Rightarrow$$

Cuando x =0 , la velocidad es cero

$$-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2D}=0+\mathrm{Cte} \Rightarrow \frac{v^2}{2}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2D}-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2(D+2x)}-\mu g x \Rightarrow$$

$$v=\sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{D+2x}\right)-2\mu g x} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{10^{-12}}{4\pi 8.85.10^{-12}10^{-3}}\left(1-\frac{1}{1+2x}\right)-2\cdot 0{,}1\cdot 10x}$$

$$v=\sqrt{9\left(\frac{1+2x-1}{1+2x}\right)-2x}=\sqrt{\frac{16x-4x^2}{1+2x}}$$

c) Para hallar la velocidad máxima derivamos v con respecto x e igualamos a cero

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\frac{(1+2x)\cdot(16-8x)-(16x-4x^2)\cdot 2}{(1+2x)^2}}{2\sqrt{\frac{16x-4x^2}{1+2x}}}=0 \quad \Rightarrow 16-8x+32x-16x^2-32x+8x^2=0 \Rightarrow$$

$$16-8x-8x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+x-2=0 \ \Rightarrow \ x=1\ \text{m} \Rightarrow \quad v=\sqrt{\frac{16\cdot 1-4\cdot 1^2}{1+2\cdot 1}}=2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d)