PROBLEMAS VARIADOS 25

190.-Un motor eléctrico de corriente continua se conectó a una tensión U. La resistencia del inducido del anillo es R. Si la potencia del motor es la máxima posible, indicar a) cuál es la intensidad que atraviesa el devanado b) el valor de la potencia máxima y c) el rendimiento del motor.

a) Designamos en general por i la intensidad que atraviesa el devanado del motor para una potencia cualquiera del motor.

Ui es la potencia suministrada al circuito por la tensión, εi la potencia desarrollada en el motor, i^2R la potencia que se desarrolla en el devanado debido al efecto Joule.
Según el principio de conservación de la energía

$$Ui = \varepsilon I + i^2 R \Rightarrow \varepsilon i = Ui - i^2 R$$

Como la potencia εi ha de ser la máxima posible, derivamos εi con respecto a i e igualamos a cero

$$\frac{d\,\varepsilon i}{di} = U - 2i\ R = 0 \ \Rightarrow\ i = \frac{U}{2R}$$

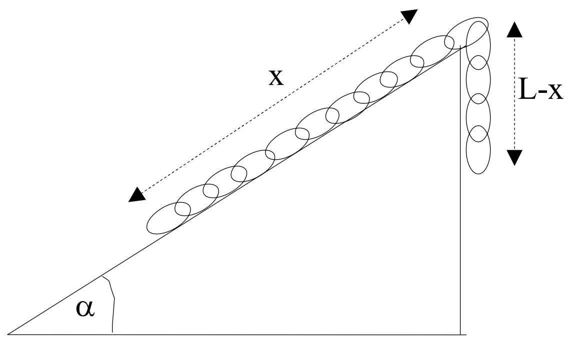
b) Potencia máxima

$$P_{max} = \varepsilon\, i = Ui - i^2 R = \frac{U^2}{2R} - \frac{U^2}{4R^2} R = \frac{U^2}{4R}$$

c) Rendimiento

$$\eta = \frac{\varepsilon i}{Ui} = \frac{\dfrac{U^2}{4R}}{U\dfrac{U}{2R}} = \frac{1}{2}$$

191.-Una cadena uniforme de longitud L está colocada sobre un plano inclinado α en la forma que indica la figura.



Se sabe que cuando x=(2/3)L, la velocidad de la cadena es cero. El coeficiente de rozamiento de la cadena con el plano es μ. a) Determinar la ecuación de la velocidad de la cadena cuando se mueva hacia abajo del plano inclinado. b) Calcular la velocidad en el instante en que toda la cadena está apoyada sobre el plano. c) Determinar para qué valores de μ la cadena puede resbalar por el plano inclinado.

Designamos con λ al peso de la cadena por unidad de longitud..

$P_1 = \lambda x$, el peso de la parte de la cadena que está en contacto con el plano inclinado.

$P_2 = \lambda(L - x)$, el peso de la parte de la cadena que está en posición vertical.

N, la fuerza que ejerce el plano sobre el trozo x de cadena.

$F_R = \mu N = \mu P_2 \cos\alpha$, la fuerza de rozamiento paralela al plano

Si M es la masa total de la cadena, podemos escribir:

$$P_1 \operatorname{sen}\alpha - \mu P_1 \cos\alpha - P_2 = Ma = M\frac{dv}{dt} = M\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = M v \frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda x \operatorname{sen}\alpha - \mu\lambda x \cos\alpha - \lambda(L - x) = \frac{\lambda L}{g} v \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{g}{L}\int [x \operatorname{sen}\alpha - \mu x \cos\alpha - (L - x)]dx = \int v\,dv \Rightarrow$$

$$\frac{g}{L}\left(\frac{x^2}{2}\operatorname{sen}\alpha - \mu\frac{x^2}{2}\cos\alpha - L x + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2} + Cte \Rightarrow \frac{g x^2}{L}(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha + 1) - 2 g x = v^2 + Cte'$$

Para determinar el valor de la constante tenemos en cuenta que cuando x es igual a (2/3)L la velocidad es cero.

$$\frac{g}{L}\frac{4}{9}L^2(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha + 1) - 2g\frac{2L}{3} = 0 + Cte' \Rightarrow Cte' = \frac{4gL}{9}(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha + 1) - \frac{4gL}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{gx^2}{L}(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha + 1) - 2gx = v^2 + \frac{4gL}{9}(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha + 1) - \frac{4gL}{3} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha + 1)\left(\frac{x^2}{L} - \frac{4L}{9}\right) + \frac{4gL}{3} - 2gx}$$

b) En el instante en que toda la cadena esté sobre el plano se cumple que x=L

$$v_L = \sqrt{g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha + 1)\left(\frac{5}{9}\right) - \frac{2g}{3}}$$

c) Para que la cadena resbale por el plano inclinado debe cumplirse que v_L tenga un valor positivo.

$$\frac{5g}{9}(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha + 1) > \frac{2}{3}g \Rightarrow (\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha + 1) > \frac{18}{15} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha > \frac{18}{15} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha > \mu\cos\alpha + \frac{3}{15} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{5} > \mu\cos\alpha \Rightarrow \operatorname{tag}\alpha - \frac{1}{5\cos\alpha} > \mu$$

192.- Una partícula alfa (Z=2, A = 4)(posee una energía de 0,40 MeV y se dirige frontalmente contra un núcleo pesado de plomo (Z=82) que se encuentra en reposo. a) Determinar la distancia mínima a la que se acerca la partícula alfa a dicho núcleo. b) Realizar el mismo calculo si la partícula se acerca frontalmente a un núcleo ligero de Litio (Z = 3 , A=7). Dato: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9.10^9 \dfrac{N\,m^2}{C^2}$

a) Una suposición razonable es considerar que el núcleo pesado de plomo, aunque se le acerca la partícula alfa, permanece en reposo. Con este supuesto la partícula alfa al irse acercando al núcleo de plomo pierde energía cinética que aparece en forma de energía potencial eléctrica.

$$E_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Pb}}{r} \Rightarrow 0{,}40.10^6\cdot 1{,}6.10^{-19} = 9.10^9\,\frac{2\cdot 1{,}6.10^{-19}\cdot 82\cdot 1{,}6.10^{-19}}{r} \Rightarrow$$

$$r = \frac{9.10^9\cdot 2\cdot 1{,}6.10^{-19}\cdot 82}{0{,}40.10^6} = 5{,}9.10^{-13}\text{ m} = 0{,}59\,\text{pm}$$

b) Cuando la partícula alfa se encuentra muy lejos del núcleo de litio posee una velocidad que designamos con v_o. Al irse acercando al núcleo de lítio pierde velocidad y el núcleo de litio la gana, así que llegará un momento en que ambas velocidades se igualen, llamamos v a esta velocidad, cuando esto ocurre la distancia entre la partícula alfa y el núcleo de litio es la mínima.
Aplicamos los principios de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento

$$\frac{1}{2}m_\alpha v_o^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Li}}{r} + \frac{1}{2}(m_\alpha + m_{Li})v^2 \;\;;\;\; m_\alpha v_o = (m_\alpha + m_{Li})v \Rightarrow v = \frac{m_\alpha v_o}{m_\alpha + m_{Li}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_\alpha v_o^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Li}}{r} + \frac{1}{2}(m_\alpha + m_{Li})\left(\frac{m_\alpha v_o}{m_\alpha + m_{Li}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_\alpha v_o^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Li}}{r} + \frac{1}{2}\frac{(m_\alpha v_o)^2}{m_\alpha + m_{Li}} \Rightarrow \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Li}}{r} = \frac{1}{2}m_\alpha v_o^2 - \frac{1}{2}\frac{(m_\alpha v_o)^2}{m_\alpha + m_{Li}} \quad (1)$$

Si E_c designa la energía cinética inicial de la partícula alfa tenemos que:

$$E_C = \frac{1}{2}m_\alpha v_o^2 \Rightarrow m_\alpha v_o^2 = 2E_C$$

Llevando lolas ecuaciones anteriores a (1) resulta:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Li}}{r} = E_C - \frac{1}{2}\frac{m_\alpha\cdot 2E_c}{m_\alpha + m_{Li}} = E_C\left(1 - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_{Li}}\right) = E_C\left(\frac{m_{Li}}{m_\alpha + m_{Li}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{q_\alpha q_{Li}}{4\pi\varepsilon_o\cdot E_C\left(\dfrac{m_{Li}}{m_\alpha + m_{Li}}\right)} = \frac{9.10^9\cdot 2\cdot 1{,}6.10^{-19}\cdot 3\cdot 1{,}6.10^{-19}}{0{,}40.10^6\cdot 1{,}6.10^{-19}\left(\dfrac{7}{4+7}\right)} = 3{,}4.10^{-14}\text{ m} = 0{,}034\,\text{pm}$$

193.- El ^{232}U se desintegra emitiendo una partícula alfa y pasando a ^{228}Th. Calcular la energía cinética de la partícula alfa.
Datos. Masas en reposo: ^{232}U= 232,0372 u ; ^{228}Th=228,0288 u
Partícula alfa = 4,0026 u ; 1 u = 1,66.10^{-27} kg.

Admitimos que el uranio se encuentra en reposo. La conservación de la energía nos dice.

$$E_U = E_{Th} + E_\alpha \ (1)$$

El principio de conservación de la cantidad de movimiento: $m_{Th} v_{Th} = m_\alpha v_\alpha (2)$

La energía cinética del torio, según la mecánica clásica, es: $T_{Th} = \frac{1}{2} m_{Th} v_{Th}^2 \ (3)$

Despejamos v_{Th} de la ecuación (2) y sustituimos en (3)

$$T_{Th} = \frac{1}{2} m_{Th} \frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{m_{Th}^2} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \frac{m_\alpha}{m_{Th}} = T_\alpha \cdot \frac{m_\alpha}{m_{Th}}$$

De (1) se deduce:

$$m_{U(o)} c^2 = m_{Th(0)} c^2 + T_{Th} + m_{\alpha(o)} c^2 + T_\alpha = m_{Th(0)} c^2 + T_\alpha \cdot \frac{m_\alpha}{m_{Th}} + m_{\alpha(o)} c^2 + T_\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 \left(m_{U(o)} - m_{Th(0)} - m_{\alpha(o)}\right) = T_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Th}}\right) \Rightarrow T_\alpha = \frac{c^2 \left(m_{U(0)} - m_{Th(0)} - m_{\alpha(o)}\right)}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{Th}}}$$

$$T_\alpha = \frac{\left(3{,}0.10^8\right)^2 (232{,}0372 - 228{,}0288 - 4{,}0026) \cdot 1{,}66.10^{-27}}{1 + \frac{4{,}0026}{228{,}0288}} = 8{,}52.10^{-13} \text{ J}$$

Expresando la energía en MeV.

$$T_\alpha = 8{,}52.10^{-13} \text{ J} \cdot \frac{\text{eV}}{1{,}6.10^{-19} \text{ J}} \cdot \frac{\text{MeV}}{10^6 \text{ eV}} = 5{,}33 \text{ MeV}$$

El problema se ha resuelto utilizando conceptos relativistas combinados con expresiones de la mecánica clásica. Vamos ahora a resolverlo utilizando exclusivamente la teoría de la relatividad y ello nos permitirá comparar los resultados.

Partimos de la ecuación (1) , y recurrimos a la ecuación relativista :

$$E_{Th}^2 = p_{Th}^2 c^2 + m_{Th(o)}^2 c^4 \ ; \ E_\alpha^2 = p_\alpha^2 c^2 + m_{\alpha(o)}^2 c^4 \quad (4)$$

Como $\left|\mathbf{p}_{\mathbf{Th}}\right| = \left|\mathbf{p}_{\boldsymbol{\alpha}}\right|$, despejamos de (4) los valores del impulso y los igualamos

$$E_{Th}^2 - m_{Th(o)}^2\, c^4 = E_\alpha^2 - m_{\alpha(o)}^2\, c^4 \;\Rightarrow\; E_{Th} = \sqrt{E_\alpha^2 + c^4\left(m_{Th(o)}^2 - m_{\alpha(o)}^2\right)}$$

A partir de la ecuación (1)

$$m_{U(o)}\, c^2 - E_\alpha = \sqrt{E_\alpha^2 + c^4\left(m_{Th(o)}^2 - m_{\alpha(o)}^2\right)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m_{U(o)}^2\, c^4 + E_\alpha^2 - 2m_{U(o)}\, c^2\, E_\alpha = E_\alpha^2 + c^4\left(m_{Th(o)}^2 - m_{\alpha(o)}^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_\alpha = T_\alpha + m_{\alpha(o)}c^2 = \frac{c^2\left(m_{U(o)}^2 - m_{Th(o)}^2 + m_{\alpha(o)}^2\right)}{2\,m_{U(o)}} \;\Rightarrow$$

$$T_\alpha = \frac{c^2\left(m_{U(o)}^2 - m_{Th(o)}^2 + m_{\alpha(o)}^2\right)}{2\,m_{U(o)}} - m_{\alpha(o)}c^2$$

$$T_\alpha = \frac{\left(3{,}0.10^8\right)^2\left(232{,}0372^2 - 228{,}0288^2 + 4{,}0026^2\right).1{,}66.10^{-27}}{2\cdot 232{,}0372} - 4{,}0026\cdot\left(3{,}0.10^8\right)^2\cdot 1{,}66.10^{-27}$$

$$T_\alpha = 8{,}52.10^{-13}\ \text{J}$$

El resultado es el mismo, lo que comprueba que cuando las velocidades no son próximas a la de la luz se pueden aplicar conceptos de la mecánica clásica.

194.- Un cohete está provisto de dos motores que pueden comunicarle aceleraciones constantes a_1 y a_2 respecto de Tierra y en sentido vertical ascendente, siendo $a_1>a_2$. El primer motor puede funcionar durante un tiempo t_1 y el segundo motor durante t_2, con $t_2>t_1$. Los motores pueden funcionar simultáneamente o uno a continuación del otro. Razonar de qué modo se han de encender los motores para que la altura alcanzada por el cohete sea la mayor posible.

Teniendo en cuenta que las aceleraciones son constantes las velocidades que puede adquirir el cohete son lineales. En la figura 1 se representan las siguientes velocidades

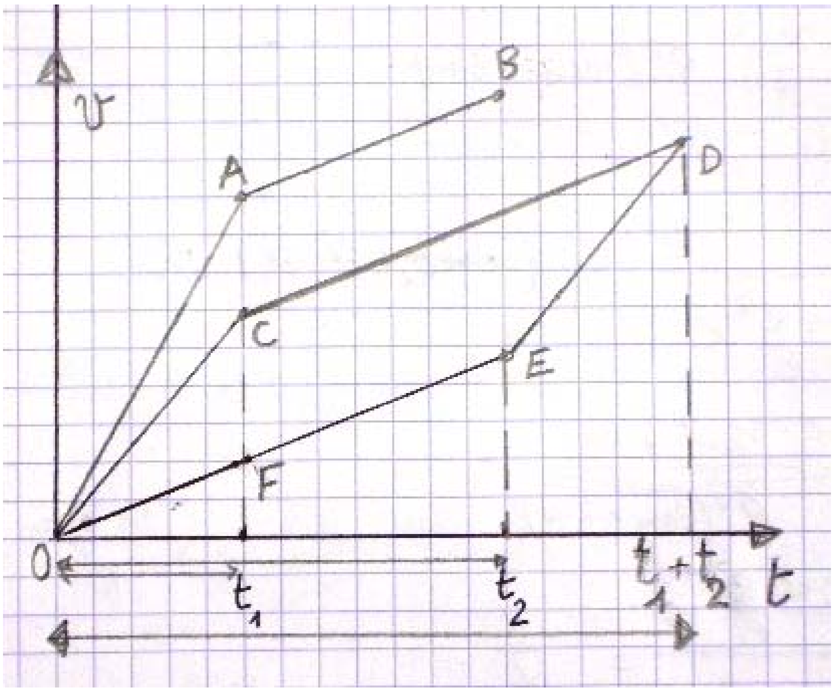


Fig.1

OC es la velocidad que proporciona el motor 1 y la pendiente de la recta es numéricamente igual a a_1.

OE es la velocidad que proporciona el motor 2 y la pendiente de la recta es numéricamente igual a a_2.

OC+CD es la velocidad proporcionada por los dos motores encendiendo en primer lugar el 1. La pendiente de la recta CD es a_1.

OE+ED es la velocidad proporcionada por los dos motores encendiendo en primer lugar el 2 y a continuación el 1. La pendiente de la recta ED es a_2.

OA es la velocidad proporcionada por los dos motores encendidos simultáneamente, la pendiente de la recta es numéricamente igual a a_1+a_2. Al tiempo t_1 el motor 1 deja de funcionar y solamente lo hace el 2 hasta el tiempo t_2, por tanto, la pendiente de la recta AB es a_2.

El valor numérico del área comprendida entre las rectas y el eje de tiempos mide el desplazamiento del cohete.

De la simple observación de la figura 1 nos indica que el área OCD(t_1+t_2) es mayor que el área OED(t_1+t_2). En consecuencia se descarta la opción de encender primero el motor 2 y luego el 1.
Para comprar las otras dos opciones debemos calcular las correspondientes áreas y la de mayor valor es la opción pedida en el problema.

Calculamos las distintas velocidades

$$v_A = (a_1 + a_2)t_1 \quad ; \quad v_B = v_A + a_1(t_2 - t_1) = (a_1 + a_2)t_1 + a_2(t_2 - t_1)$$

$$v_C = a_1 t_1 \quad ; \qquad v_D = v_C + a_2 t_2 = a_1 t_1 + a_2 t_2$$

El área OABt_2 es numéricamente igual a la altura h alcanzada por el cohete encendiendo los dos motores simultáneamente

$$h = \frac{t_1 \cdot v_A}{2} + \frac{v_A + v_B}{2} \cdot (t_2 - t_1) = \frac{(a_1 + a_2) \cdot t_1^2}{2} + \frac{2(a_1 + a_2) \cdot t_1 + a_2(t_2 - t_1)}{2} \cdot (t_2 - t_1) =$$

$$= \frac{a_1 t_1^2}{2} + \frac{a_2 t_1^2}{2} + a_1 t_1 (t_2 - t_1) + a_2 t_1 (t_2 - t_1) + \frac{a_2}{2}(t_2 - t_1)^2 =$$

$$= -\frac{a_1 t_1^2}{2} + a_1 t_1 t_2 - \frac{a_2 t_1^2}{2} + a_2 t_1 t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2} + \frac{a_2 t_1^2}{2} - a_2 t_1 t_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2} + a_1 t_1 t_2 - \frac{a_1 t_1^2}{2}$$

El área OCD $t_{1+}t_2$ es numéricamente igual a la altura h´ alcanzada por el cohete encendiendo primero el motor que produce la aceleración a_1 y a continuación el 2.

$$h' = \frac{v_C t_1}{2} + \frac{v_C + v_D}{2} \cdot t_2 = \frac{a_1 t_1^2}{2} + \frac{2a_1 t_1 + a_2 t_2}{2} \cdot t_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2} + a_1 t_1 t_2 + \frac{a_1 t_1^2}{2}$$

La simple inspección de h y h´ nos dice que h´>h, por consiguiente, se debe encender primero el motor 1 y a continuación el 2.

195.-Dos cargas puntuales +q y –q están situadas sobre el eje X, la positiva con x=-L y la negativa con x=+L. Un círculo de radio R tiene su centro en el origen de coordenadas y está situado en el plano YZ. Se pide el flujo eléctrico que atraviesa el mencionado círculo.

Por definición el flujo eléctrico que atraviesa una superficie es:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

En la figura 1 está representado el círculo de radio R. El campo eléctrico varía de unos puntos a otros del círculo, por ello se ha tomado, a una distancia x, un anillo circular de espesor dx. Todos los puntos de ese anillo están a la misma distancia de las cargas y por tanto en todos ellos existe el mismo campo eléctrico.

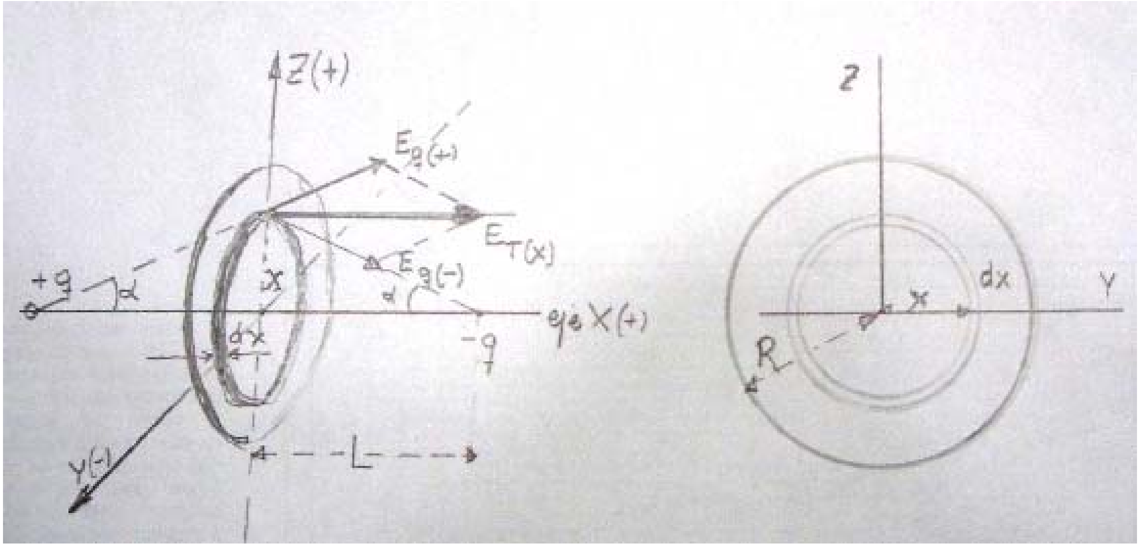


Fig.1

En la figura 1 se observan los campos que crean las dos cargas y se deduce que las componentes sobre el eje X se suman mientras que las que están sobre el eje Y se anulan.

$$E_X(+q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(L^2+x^2)}\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(L^2+x^2)}\cdot\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}} \quad ;$$

$$E_X(-q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(L^2+x^2)}\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(L^2+x^2)}\cdot\frac{L}{L+x}$$

$$E_{T(x)} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{q\ L}{(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

E $_{T(x)}$ es perpendicular al anillo. La integral del flujo resulta ser:

$$\Phi_E = \int_0^R E_{T(X)}\cdot 2\pi x\,dx = \int_0^R \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qL}{(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2\pi x\,dx = \frac{qL}{\varepsilon_o}\int_0^R \frac{x\,dx}{(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable

$$L^2+x^2 = a^2 \quad\Rightarrow\quad x\,dx = a\,da$$

$$\int_0^R \frac{a\,da}{a^3} = -\frac{1}{a}\Big]_o^R = -\frac{1}{\sqrt{L^2+x^2}}\Big]_o^R = \frac{1}{L}-\frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_o}\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)$$