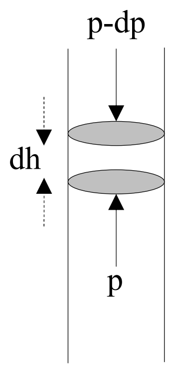
PROBLEMAS VARIADOS 27

202.-Un recipiente de forma cilíndrica e infinitamente largo está lleno de un gas perfecto de masa molar M y está colocado en un campo gravitatorio homogéneo cuya aceleración es g. La temperatura del gas es idéntica en todo el gas y de valor T. Si la densidad del gas es constante en todo él. Determinar el gradiente de temperatura dT/dh.

Según la ecuación de los gases perfectos

$$pV = RT \;\Rightarrow\; p = \frac{g}{MV}RT = \frac{\rho RT}{M} \;\Rightarrow\; \rho = \frac{pM}{RT}$$

Según el enunciado del problema la densidad es constante y p disminuye con la altura, también lo tiene que hacer T para que el cociente sea constante



En la figura superior consideramos un volumen de gas de altura dh, que está a una altura h respecto del suelo, siendo S el área de la base y T su temperatura. Ese volumen de gas se encuentra en equilibrio, por tanto:

$$-pS + \left(p - dp)S\right) = \text{Peso} = S\,dhg\rho \;\Rightarrow\; -dp = \rho\, g\, dh \;\Rightarrow\; -\frac{dp}{dh} = \rho\, g$$

Designamos con p_o y T_o la presión y la temperatura en la base del cilindro. Al ser el gas perfecto escribimos:

$$p_o = \frac{\rho}{M}RT_o \quad ; \quad p = \frac{\rho}{M}RT \Rightarrow \quad p = p_o\frac{T}{T_o} \quad \Rightarrow \quad dp = \frac{p_o}{T_o}dT$$

Sustituyendo dp

$$-\frac{\frac{p_o}{T_o}dT}{dh} = \rho\, g \;\Rightarrow\; \frac{dT}{dh} = -\frac{\rho\, g\, T_o}{p_o} = -\frac{\frac{p_o M}{RT_o}\, g\, T_o}{p_o} = -\frac{M\, g}{R}$$

203.-Un mol de un gas perfecto cuyo exponente adiabático es γ, se expandió según la ley p=aV, donde a es una constante. El volumen inicial del gas es V_o . Como resultado de la expansión el gas aumento de volumen η veces. Calcular el aumento de energía interna del gas b) el trabajo realizado por éste c) La capacidad calorífica molar del gas en este proceso.

a) Designamos con ($P_o=aV_o$; V_o ; T_o) las coordenadas termodinámicas del gas antes de expansionarse y con ($P_1=aV_1$; V_1 ; T_1) después de la expansión. Al tratarse de un gas perfecto la variación de energía interna vale:

$$\Delta U = C_V\left(T_1 - T_o\right)$$

La relación entre los dos estados del gas nos permite escribir

$$\frac{aV_o \cdot V_o}{T_o} = \frac{aV_1 \cdot V_1}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{V_1^2 T_o}{V_o^2} = \frac{\eta^2 V_o^2\, T_o}{V_o^2} = \eta^2 T_o$$

La ecuación de los gases perfectos aplicada al estado inicial conduce a:

$$aV_o \cdot V_o = RT_o \Rightarrow T_o = \frac{a\,V_o^2}{R}$$

Llevando los valores de las temperaturas a la ecuación de la energía interna

$$\Delta U = C_V\left(\eta^2 T_o - T_o\right) = C_V \frac{aV_o^2}{R}\left(\eta^2 - 1\right)$$

Ponemos C_v en función de γ.

$$C_P - C_V = R \Rightarrow \frac{C_P}{C_V} - 1 = \frac{R}{C_V} \Rightarrow C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$\Delta U = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot aV_o^2\left(\eta^2 - 1\right)$$

b) El trabajo de expansión del gas es:

$$W = -\int_{V_o}^{V_1} P\,dV = -\int_{V_o}^{\eta V_o} P\,dV = -\int_{V_o}^{\eta V_o} aV\,dV = \left[-\frac{aV^2}{2}\right]_{V_o}^{\eta V_o} = \frac{aV_o^2}{2} - \frac{a\,\eta^2\,V_o^2}{2} = \frac{aV_o^2}{2}\left(1 - \eta^2\right)$$

c) Aplicando el primer principio de la Termodinámica

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q = \Delta U - W = C(T_1 - T_o) \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{\Delta U - W}{T_1 - T_o} = \frac{\frac{1}{\gamma-1} aV_o^2(\eta^2 - 1) - \frac{aV_o^2}{2}(1-\eta^2)}{\eta^2 \frac{aV_o^2}{R} - \frac{aV_o^2}{R}} = \frac{\frac{1}{\gamma-1}(\eta^2-1) + \frac{\eta^2 - 1}{2}}{\frac{1}{R}(\eta^2 - 1)} = \frac{\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{R}} \Rightarrow$$

$$C = \frac{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}}{\frac{1}{R}} = R\,\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}$$

204.-En un sistema de referencia K, una partícula posee una energía total de 5 GeV y una cantidad de movimiento 3 GeV/c, (es decir pc = 3 GeV). a) ¿Cuál es la energía de esta partícula en un sistema K´ en el cual la cantidad de movimiento es 2 GeV/c. b) ¿Cuál es su masa en reposo, expresada en uma? c) ¿Cuál es la velocidad relativa de los dos sistemas de referencia?

a) Utilizamos el invariante de relatividad

$$E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2 \;\Rightarrow\; 5^2 - 3^2 = E'^2 - 2^2 \;\Rightarrow\; E' = \sqrt{20}\,\text{GeV}$$

b) Refiriéndonos al sistema K podemos escribir

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \;;\; pc = \frac{m_o v c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \;\Rightarrow\; \frac{m_o c^2}{E} = \frac{m_o v c}{p} \;\Rightarrow\; v = \frac{pc}{E} = \frac{3}{5}c\;\frac{m}{s}$$

Conocida la velocidad de la partícula en el sistema K, sustituimos ese valor en la ecuación de la energía

$$5.10^9 \cdot 1{,}6.10^{-19} = \frac{m_o c^3}{\sqrt{c^2 - \frac{9c^2}{25}}} = \frac{5\,m_o\,c^2}{4} \quad\Rightarrow\quad m_o = \frac{10^9 \cdot 1{,}6.10^{-19} \cdot 4}{(3.10^8)^2} = 7{,}11.10^{-27}\ \text{kg}$$

Dado que nos piden la masa en uma recordemos que un uma es la doceava parte de la masa de un átomo de ^{12}C.

$$1\ \text{uma} = \frac{1}{12} \cdot \text{masa}\,^{12}C = \frac{1}{12} \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}}{6{,}02.10^{23}} = 1{,}66.10^{-27}\ \text{kg}$$

$$\frac{1\,\text{uma}}{1{,}66.10^{-27}\,\text{kg}} = \frac{x}{7{,}11.10^{-27}\,\text{kg}} \Rightarrow x = 4{,}3\,\text{uma}$$

c) Designamos con V la velocidad con que se desplaza el sistema K´ respecto del K. Sabemos que la velocidad de la partícula en el sistema K es 3/5 c. Calculamos ahora la velocidad de esa partícula medida en el sistema K´

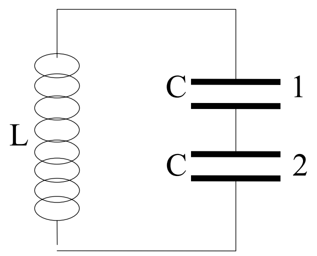
$$v' = \frac{p'c}{E'} = \frac{2}{\sqrt{20}}c$$

Utilizando la ecuación relativista de la transformación de la velocidad de un sistema a otro, siendo V la velocidad con que el sistema K´ se mueve respecto del K, y –V es la velocidad con que el observador situado en K se mueve respecto de K´

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} \Rightarrow v' = \frac{(v - V)c^2}{c^2 - vV} \Rightarrow v'c^2 - v'vV = vc^2 - Vc^2 \Rightarrow V\left(c^2 - v'v\right) = c^2\left(v - v'\right)$$

$$V = \frac{c^2(v - v')}{c^2 - v'v} = \frac{c^2\left(\frac{3}{5}c - \frac{2}{\sqrt{20}}c\right)}{c^2 - \frac{3}{5}c \cdot \frac{2}{\sqrt{20}}c} = \frac{c\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{\sqrt{20}}\right)}{1 - \frac{6}{22{,}4}} = 0{,}21c$$

205.-En el circuito de la figura inferior los dos condensadores tienen la misma capacidad C y la bobina tiene un coeficiente de autoinducción L. No hay resistencia óhmica en el circuito. El condensador 1 se carga con una diferencia de potencial ε, el 2 está descargado.
Determinar. a) La intensidad que circula por el circuito en régimen estacionario. b) Las ecuaciones de las cargas de los condensadores frente al tiempo. c) Si C = 1μ F , L=0,1 H , ε=100V dibujar la gráfica intensidad frente al tiempo y la gráfica de la carga de los condensadores frente al tiempo . Calcular el tiempo que transcurre desde que el condensador 1 está completamente cargado hasta que su carga se reduce a la mitad.



a) El circuito es oscilante y su periodo es igual a $T = 2\pi\sqrt{LC_E} = 2\pi\sqrt{L\frac{C}{2}}$. La intensidad en régimen estacionario es armónica

$$I = I_m \operatorname{sen} \omega t = I_m \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$$

La carga inicial del condensador 1 es igual a $q_i = C\varepsilon$.
En un determinado instante la carga del condensador 2 es q_2, la del condensador 1 q_i-q_2 y la intensidad instantánea I.

Al no haber resistencia óhmica no hay pérdidas de energía calorífica y podemos escribir que la energía reinicial del condensador 1 está ahora repartida en la autoinducción y en los dos condensadores.

$$\frac{q_i^2}{2C}=\frac{1}{2}LI^2+\frac{(q_i-q_2)^2}{2C}+\frac{q_2^2}{2C}\;\Rightarrow\; I=\sqrt{\frac{q_i^2-(q_i-q_2)^2-q_2^2}{L\,C}}=\sqrt{\frac{2q_iq_2-2q_2^2}{LC}}\quad(1)$$

Para calcular la intensidad máxima derivamos I con respecto a q_2 e igualamos a cero.

$$\frac{dI}{dq_2}=\frac{2q_i-4q_2}{2\sqrt{\frac{2q_iq_2-2q_2^2}{LC}}}=0\quad\Rightarrow\quad q_2=\frac{q_i}{2}$$

Llevamos esta condición a la ecuación de la intensidad

$$I_m=\sqrt{\frac{2q_i\frac{q_i}{2}-2\frac{q_i^2}{4}}{LC}}=\sqrt{\frac{q_i^2}{2LC}}=\sqrt{\frac{C^2\,\varepsilon^2}{2LC}}$$

La ecuación de la intensidad en el circuito es:

$$I=\sqrt{\frac{C^2\,\varepsilon^2}{2LC}}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}t=\sqrt{\frac{C^2\,\varepsilon^2}{2LC}}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{LC}{2}}}t=\sqrt{\frac{C^2\,\varepsilon^2}{2LC}}\cdot\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\quad(2)$$

b) Igualamos la ecuación (1) y (2)

$$\sqrt{\frac{C^2\,\varepsilon^2}{2LC}}\cdot\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t=\sqrt{\frac{2q_iq_2-2q_2^2}{LC}}\Rightarrow\frac{C^2\,\varepsilon^2}{2LC}\cdot\operatorname{sen}^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t=\frac{2q_iq_2-2q_2^2}{LC}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_2^2-q_iq_2+\frac{C^2\,\varepsilon^2}{4}\cdot\operatorname{sen}^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t=0\Rightarrow q_2=\frac{q_i\pm\sqrt{q_i^2-4\cdot\frac{C^2\,\varepsilon^2}{4}\cdot\operatorname{sen}^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t}}{2}\Rightarrow$$

$$q_2=\frac{q_i\pm\sqrt{q_i^2-4\cdot\frac{q_i^2}{4}\cdot\operatorname{sen}^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t}}{2}=\frac{q_i\pm\sqrt{q_i^2\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right)}}{2}=\frac{q_i\left(1\pm\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right)}{2}$$

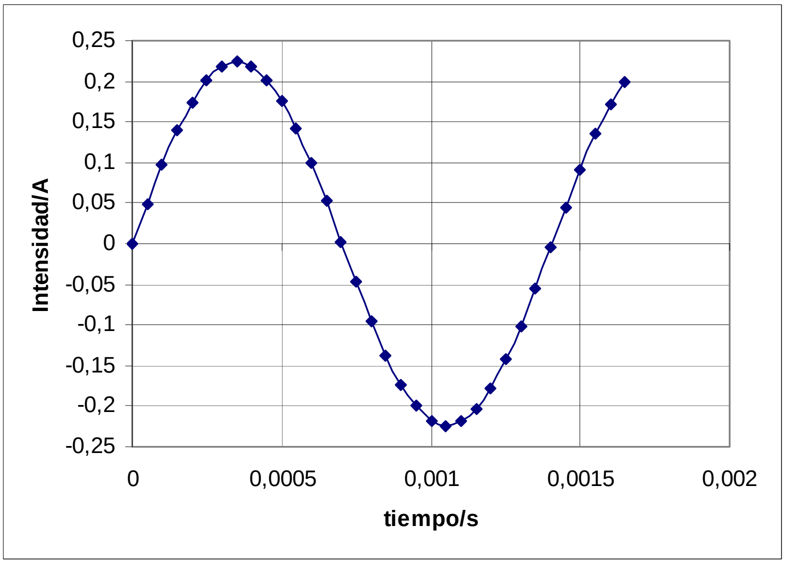
Para t=0 la carga del condensador 2 es nula, por tanto, en la ecuación anterior escogemos el signo negativo

$$q_2=\frac{q_i}{2}\left(1-\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right)\quad\Rightarrow\quad q_1=q_i-q_2=q_1-\frac{q_i}{2}\left(1-\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right)=\frac{q_i}{2}\left(1+\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right)$$

c) Sustituimos en (2) los valores numéricos

$$I = \sqrt{\frac{\left(10^{-6}\right)^2 \cdot \left(10^2\right)^2}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6}}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{0{,}1 \cdot 10^{-6}}} = 0{,}22 \operatorname{sen} 4472\, t \quad A$$

Dando valores a t se obtiene la siguiente gráfica.

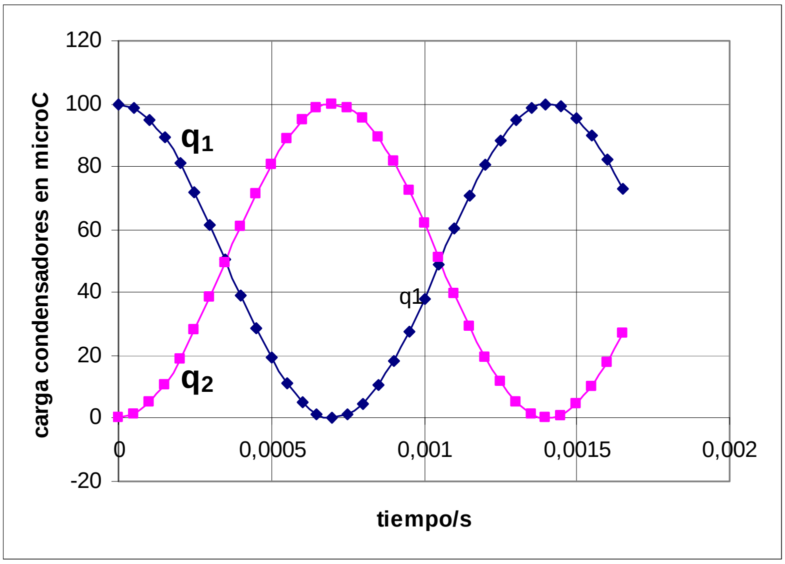


Sustituimos los valores numéricos en q_1 y q_2.

$$q_i = 10^{-6} \cdot 10^2 = 10^{-4} = 100\,\mu C \quad \Rightarrow \quad q_1 = 50\left(1 + \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t\right) = 50\left(1 + \cos 4472\, t\right)\mu C$$

$$q_2 = 50\left(1 - \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t\right) = 50\left(1 - \cos 4472\, t\right)\mu C$$

Dando valores a t se obtiene la siguiente gráfica

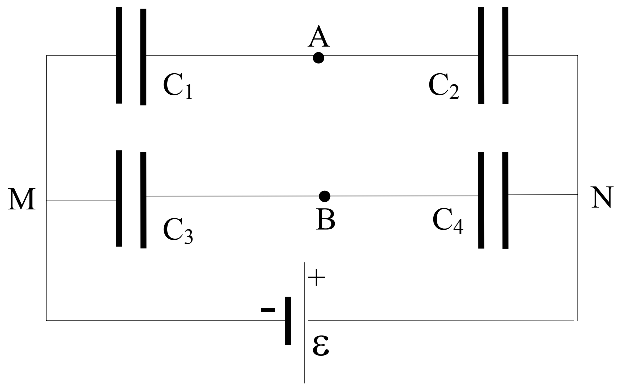


Cuando los dos condensadores tienen la misma carga es que el 1 la ha reducido a la mitad

$$1+\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t = 1-\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t \Rightarrow 2\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

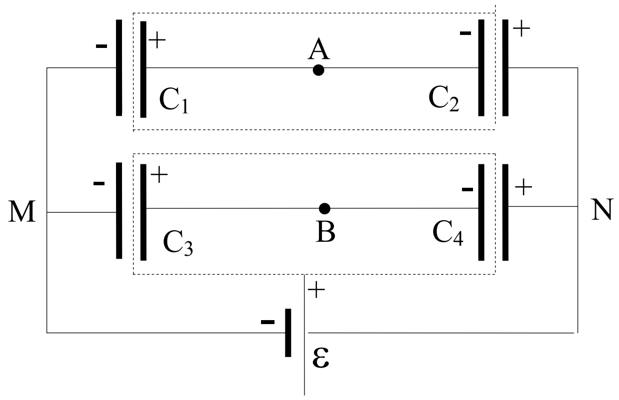
$$t = \frac{\pi\sqrt{LC}}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{0,1\cdot 10^{-6}}}{2\sqrt{2}} = 0,00035\,s$$

206.-Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B del circuito de la figura inferior.



Establecer la condición para que la diferencia de potencial V_A-V_B sea nula.

Teniendo en cuenta los signos de la batería podemos asignar a cada condensador el signo de las cargas de sus armaduras.



Designamos con q_1, q_2 , q_3 y q_4 la carga de cada condensador. La línea de puntos entre los condensadores 1 y 2 nos indica que la suma de las cargas es nula, esto es, $q_1=q_2$. Análogamente para los condensadores 3 y 4 , $q_3=q_4$.

$$V_A - V_M = \frac{q_1}{C_1}\ (1)\ ;\ V_N - V_A = \frac{q_2}{C_2}\ (2)\ ;\ V_B - V_M = \frac{q_3}{C_3}\ (3)\ ;\ V_N - V_B = \frac{q_4}{C_4}\ (4)$$

De (1) y (3) resulta: $V_A - V_B = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3}$; De (2) y (4) resulta : $V_A - V_B = \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_2}{C_2}$

De (1) y (2)

$$V_N - V_M = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = \varepsilon \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1}{C_2} = \varepsilon \Rightarrow \frac{q_1(C_1+C_2)}{C_1C_2} = \varepsilon \Rightarrow q_1 = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\varepsilon = q_2$$

De (3) y (4)

$$V_N - V_M = \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4} = \varepsilon \Rightarrow \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_3}{C_4} = \varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{q_3(C_3 + C_4)}{C_3C_4} = \varepsilon \;\Rightarrow\; q_3 = \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4}\varepsilon = q_4$$

$$V_A - V_B = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} = \frac{\dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\varepsilon}{C_1} - \frac{\dfrac{C_3C_4}{C_3 + C_4}\varepsilon}{C_3} = \varepsilon\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{C_4}{C_3 + C_4}\right) = \varepsilon\frac{C_2C_3 - C_1C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}$$

Para que V_A-V_B sea cero debe serlo el numerador de la ecuación anterior