

PROBLEMAS VARIADOS 3 (2011-2012)

256.- Dos condensadores, uno cargado, de capacidad C_1 , y otro descargado, de capacidad C_2 , se conectan entre sí. Calcular qué fracción de la carga inicial tiene cada condensador una vez alcanzado el equilibrio.

Hallar la relación entre la energía final de los condensadores después de la unión y antes de ella.

Designamos con Q la carga del condensador 1 y con q_1 y q_2 la de cada condensador cuando se alcanza el equilibrio. La conservación de la carga nos permite escribir:

$$Q = q_1 + q_2$$

Cuando se alcanza el equilibrio los condensadores tienen la misma diferencia de potencial.

$$\Delta V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

De ambas ecuaciones resulta:

$$\frac{Q - q_2}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow Q = q_2 + q_2 \frac{C_1}{C_2} = q_2 \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2} \right)$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{Q - q_1}{C_2} \Rightarrow Q = q_1 + q_2 \frac{C_2}{C_1} = q_1 \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1} \right)$$

Las energías antes y después de la unión son respectivamente.

$$E_A = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1} \quad ; \quad E_D = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C_2}$$

Como

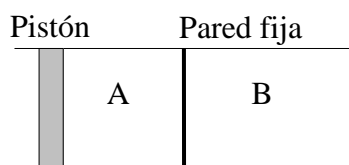
$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{Q - q_1}{C_2} \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1}{C_2} = \frac{Q}{C_2} \Rightarrow q_1 \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{Q}{C_2} \Rightarrow q_1 = Q \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$\frac{q_2}{C_2} = \frac{Q - q_2}{C_1} \Rightarrow \frac{q_2}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_1} \Rightarrow q_2 \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{Q}{C_1} \Rightarrow q_2 = Q \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

La relación entre las energías

$$\begin{aligned} \frac{E_D}{E_A} &= \frac{\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2}}{\frac{Q^2}{C_1}} = \frac{\frac{Q^2 C_1^2}{C_1 (C_1 + C_2)^2} + \frac{Q^2 C_2^2}{C_2 (C_1 + C_2)^2}}{\frac{Q^2}{C_1}} = \frac{\frac{C_1^2 C_2 + C_1 C_2^2}{C_1 C_2 (C_1 + C_2)^2}}{\frac{1}{C_1}} = \frac{C_1^2 C_2 + C_1 C_2^2}{C_2 (C_1 + C_2)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{E_D}{E_A} = \frac{C_1 C_2 (C_1 + C_2)}{C_2 (C_1 + C_2)^2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \end{aligned}$$

257.- Un cilindro está cerrado por uno de sus bases y la otra es un pistón que puede deslizarse por el cilindro sin rozamiento. El interior del cilindro contiene una pared fija, tal como se muestra en la figura. Las paredes del cilindro y el pistón son adiabáticas y sus capacidades caloríficas despreciables.

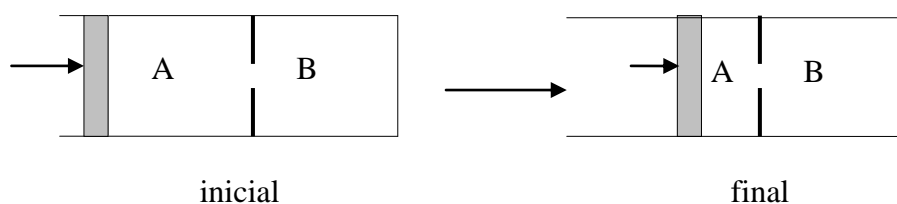


Por la parte exterior del pistón actúa una presión P_o que se supone constante. El compartimento A, de volumen V_A , contiene n moles de un gas perfecto y el B, de volumen V_B , está vacío. Inicialmente el sistema se encuentra en equilibrio.

Se practica un orificio en la pared fija y se alcanza el equilibrio quedando gas en los dos compartimentos. 1) Determinar la presión, volumen y temperatura finales. Dar el resultado en función de n , P_o , V_A , V_B , y R . Calcular la variación de entropía en el proceso.

2) Suponer ahora que todo el gas abandona el compartimento A con lo que el pistón móvil está finalmente pegado a la pared fija. Calcular el valor umbral de V_B para que todo el gas pase del compartimento A al B. Determinar la presión, volumen y temperatura finales, si V_B es mayor que el valor umbral. Dar el resultado en función de n , P_o , V_A , V_B , y R . Calcular la variación de entropía en el proceso.

1) En la figura1 se representa el estado inicial y final del proceso



En el estado inicial, al existir equilibrio, la presión de gas en A es igual a la presión atmosférica y su temperatura es:

$$P_o V_A = nRT_o \Rightarrow T_o = \frac{P_o V_A}{nR}$$

Al abrir el agujero el gas comienza a pasar al compartimento B. El proceso cesa cuando la presión en todo el conjunto es la misma P_o .

Designamos con V_F al volumen final entre A y B y con T_F la temperatura del conjunto. Durante el proceso se ha producido un aumento de la energía interna del sistema debido al trabajo exterior realizado por la fuerza debida a la presión atmosférica.

$$\Delta U = n C_v (T_F - T_o) = n C_v \left(\frac{P_o V_F}{nR} - \frac{P_o V_A}{nR} \right) = \frac{C_v P_o}{R} (V_F - V_A)$$

Recordemos que:

$$C_p - C_v = R ; \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma \Rightarrow C_v (\gamma - 1) = R \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

La expresión final de ΔU es:

$$\Delta U = \frac{R}{\gamma - 1} P_o (V_F - V_A) = \frac{P_o}{\gamma - 1} (V_F - V_A)$$

El aumento de energía interna se debe al trabajo realizado desde el exterior sobre el sistema

$$W = -\int P dV = -P_o \cdot \Delta V = -P_o (V_F - V_A - V_B) = P_o (V_A + V_B - V_F)$$

Igualando la variación de energía interna con el trabajo puesto que el proceso es adiabático.

$$V_F - V_A = (\gamma - 1)(V_A + V_B - V_F) \Rightarrow V_F - V_A = \gamma (V_A + V_B) - \gamma V_F - V_A - V_B + V_F \Rightarrow$$

$$0 = \gamma (V_A + V_B) - \gamma V_F - V_B \Rightarrow \gamma V_F = \gamma V_A + V_B (\gamma - 1) \Rightarrow V_F = V_A + V_B \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \quad (1)$$

Para calcular la temperatura T_F hacemos uso de la ecuación de los gases perfectos:

$$P_o V_F = nRT_F \Rightarrow T_F = \frac{P_o V_F}{nR} = \frac{P_o \left[V_A + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) V_B \right]}{nR} = \frac{T_o}{V_A} \left[V_A + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) V_B \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_F = T_o \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right]$$

Para calcular la variación de entropía en el proceso, utilizamos la relación termodinámica que relaciona los estados 1 y 2, para un mol de gas

$$\Delta S = \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = C_v \ln \frac{T_o \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right]}{T_o} + R \ln \frac{V_A + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) V_B}{V_A} =$$

$$= (C_p - R) \ln \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right] + R \ln \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right] = C_p \ln \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right]$$

Como son n moles

$$\Delta S_n = n \Delta S = n C_p \ln \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right]$$

2) El valor del volumen umbral de B, ocurrirá cuando en la ecuación (1) hagamos $V_F=V_B$

$$V_B = V_A + V_B \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \Rightarrow V_B = V_A + V_B - \frac{V_B}{\gamma} \Rightarrow V_B = \gamma V_A$$

Designamos con P_2 a la presión en el recinto B y con T_2 a la temperatura, siendo el volumen $V_2=V_B$. Aplicamos la ecuación de los gases perfectos.

$$P_2 V_B = n R T_2$$

La variación de energía interna entre el estado inicial y final es:

$$\Delta U = n C_v (T_2 - T_o) = n C_v \left(\frac{P_2 V_B}{n R} - \frac{P_o V_A}{n R} \right) = \frac{P_2 V_B - P_o V_A}{\gamma - 1}$$

El trabajo es:

$$W = -\int P dV = -P_o \cdot \Delta V = -P_o (0 - V_A) = P_o V_A$$

Igualando el trabajo realizado sobre el sistema con la variación de su energía interna por tratarse de un proceso adiabático, resulta:

$$(\gamma - 1) P_o V_A = P_2 V_B - P_o V_A \Rightarrow P_o V_A (\gamma - 1 + 1) = P_2 V_B \Rightarrow P_2 = \frac{\gamma P_o V_A}{V_B}$$

La temperatura es:

$$T_2 = \frac{P_2 V_B}{n R} = \frac{\frac{\gamma P_o V_A}{V_B} \cdot V_B}{n R} = \frac{\gamma P_o V_A}{n R} = \gamma T_o$$

Para calcular la variación de entropía en el proceso, utilizamos la relación termodinámica que relaciona los estados 1 y 2, para un mol de gas.

$$\begin{aligned} \Delta S &= \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = C_v \ln \frac{\gamma T_o}{T_o} + R \ln \frac{V_B}{V_A} = C_v \ln \gamma + C_v (\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \\ &= C_v \left[\ln \gamma + (\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} \right] = C_v \left[\ln \gamma + \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{C_p}{\gamma} \ln \gamma \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} \end{aligned}$$

258.- Dos sólidos A y B poseen masas m_A y m_B . Respecto de un sistema de laboratorio inercial (L), el móvil A se desplaza con velocidad constante v_o dirigiéndose hacia el sólido B en línea recta realizando un choque frontal. El sólido B, respecto del sistema de laboratorio, se encuentra en reposo.

a) Designamos al cociente $m_B/m_A = \alpha$. Se pide calcular las velocidades de ambos sólidos después del choque si éste es elástico. ¿Qué ocurre si $\alpha=1$?

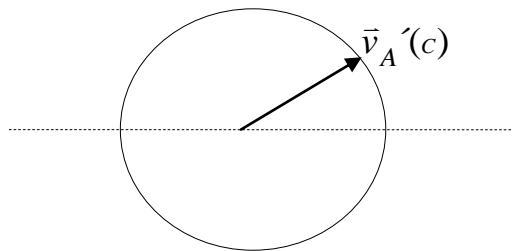
b) Ahora el choque no es frontal y $\alpha=1$. Probar que los vectores velocidad de ambos sólidos son ortogonales.

Determinar en función de v_o y α el vector velocidad del centro de masas.

c) Escogemos un sistema de referencia ligado al centro de masas, designado con la letra C. Determinar en este sistema de referencia, en función de m_A , α y v_o , los vectores velocidad de A y B, sus cantidades de movimiento y sus energías cinéticas, después del choque. El choque es elástico y frontal.

d) Ahora suponemos un choque no frontal, entonces representamos la velocidad del sólido A después del choque, $\vec{v}'_A(C)$, en el sistema C por un vector cuyo origen es fijo y cuyo extremo se encuentra en un círculo (ver figura)

Representar el vector velocidad de la masa B después de ese choque, siendo $\alpha < 1$.



Representar los vectores velocidad de A y B después del choque pero refiriéndolos al sistema del laboratorio (sistema L). Mostrar que A puede desviarse un ángulo máximo θ_m , calcular su valor cuando $\alpha = 1/2$.

Teniendo solamente en cuenta la acción de las fuerzas interiores en el momento del choque, se conserva el vector cantidad de movimiento total del sistema y además, se cumple el principio de conservación de la energía, si bien la forma en que ésta se conserva va a depender del tipo de colisión.

a) Como el choque es elástico existe conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética y como es en la misma dirección, las ecuaciones se pueden emplear escalarmente

$$m_A v_o = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow v_o = v'_A + \alpha v'_B$$

$$\frac{1}{2} m_A v_o^2 = \frac{1}{2} m_A (v'_A)^2 + \frac{1}{2} m_B (v'_B)^2 \Rightarrow v_o^2 = v_A'^2 + \alpha v_B'^2$$

Despejamos de la primera ecuación v'_A y sustituimos su valor en la segunda ecuación

$$v_o^2 = (v_o - \alpha v'_B)^2 + \alpha v_B'^2 \Rightarrow v_o^2 = v_o^2 + \alpha^2 v_B'^2 - 2v_o \alpha v'_B + \alpha v_B'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2v_o \alpha v'_B = v_B'^2 \alpha (1 + \alpha) \Rightarrow 2v_o = v'_B (1 + \alpha) \Rightarrow v'_B = \frac{2v_o}{1 + \alpha} \Rightarrow$$

$$v'_A = v_o - \alpha \frac{2v_o}{1 + \alpha} = \frac{v_o + v_o \alpha - 2\alpha v_o}{1 + \alpha} \Rightarrow v'_A = \frac{v_o(1 - \alpha)}{1 + \alpha}$$

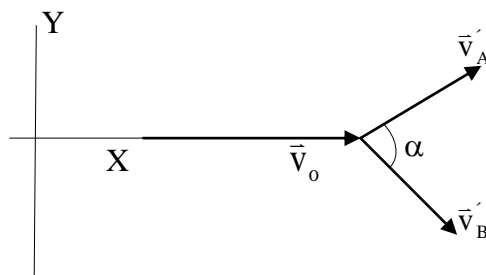
Si $\alpha = 1$ resulta:

$$v'_B = v_o ; v'_A = 0$$

El sólido A se para y el B, que estaba en reposo, adquiere la velocidad de A antes del choque.

b) Al no ser frontal el choque las velocidades de los sólidos A y el B forman entre sí un ángulo α y la conservación de la cantidad de movimiento hay que expresarla vectorialmente.

Escribimos la conservación de la cantidad de movimiento con $\alpha = 1$, $m_A = m_B$



$$m \vec{v}_o = m \vec{v}'_A + m \vec{v}'_B \Rightarrow \vec{v}_o = \vec{v}'_A + \vec{v}'_B$$

El módulo del vector \vec{v}_o es:

$$v_o = \sqrt{v_A'^2 + v_B'^2 + 2v'_A v'_B \cos \alpha} \Rightarrow v_o^2 = v_A'^2 + v_B'^2 + 2v'_A v'_B \cos \alpha$$

Aplicando el principio de conservación de la energía cinética

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m v_A'^2 + \frac{1}{2} m v_B'^2 \Rightarrow v_o^2 = v_A'^2 + v_B'^2$$

De las dos ecuaciones se deduce que

$$2v'_A v'_B \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Antes del choque se cumple para el centro de masas:

$$\vec{v}_C = \frac{m_A \vec{v}_o + m_B \cdot 0}{m_A + m_B} = \frac{\vec{v}_o}{1 + \alpha} \quad (1)$$

c) En el sistema tomado en el centro de masas, el observador situado en él “ve” que tanto A como B se acercan a él..

Las velocidades con que observa su acercamiento son relativas pues están determinadas desde unos ejes en movimiento y por lo tanto son:

$$\bar{v}_A(C) = \bar{v}_O - \bar{v}_C = \bar{v}_O \left(1 - \frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{\bar{v}_O \alpha}{1+\alpha} \quad ; \quad \bar{v}_B(C) = 0 - \bar{v}_C = -\frac{\bar{v}_O}{1+\alpha} \quad (2)$$

Las cantidades de movimiento en el sistema C antes del choque, son:

$$\begin{aligned} \bar{p}_A(C) &= m_A \bar{v}_A(C) = m_A \frac{\bar{v}_O \alpha}{1+\alpha} \quad ; \quad \bar{p}_B(C) = m_B \bar{v}_B(C) = -m_B \frac{\bar{v}_O}{1+\alpha} = -\frac{\alpha m_A \bar{v}_O}{1+\alpha} \\ \bar{p}_A(C) + \bar{p}_B(C) &= m_A \frac{\bar{v}_O \alpha}{1+\alpha} - \frac{\alpha m_A \bar{v}_O}{1+\alpha} = 0 \end{aligned}$$

Energías cinéticas en el sistema C *antes del choque*

$$\begin{aligned} E_{CA}(C) &= \frac{1}{2} m_A v_A^2(C) = \frac{1}{2} m_A \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 v_o^2 \quad ; \quad E_{CB}(C) = \frac{1}{2} m_B v_B^2(C) = \frac{1}{2} m_B \frac{v_o^2}{(1+\alpha)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\alpha m_A v_o^2}{(1+\alpha)^2} \\ E_{Ctotal}(C) &= \frac{v_o^2}{2(1+\alpha)^2} [(m_A \alpha^2) + \alpha m_A] = \frac{v_o^2 \alpha}{2(1+\alpha)^2} [m_A (1+\alpha)] = \frac{v_o^2 \alpha}{2(1+\alpha)} m_A \end{aligned}$$

Después del choque y en el sistema C y dado que la cantidad de movimiento se conserva si el choque es elástico

$$\bar{p}'_A(C) + \bar{p}'_B(C) = 0$$

La energía cinética total *después del choque* y en el sistema C la calculamos en función de la cantidad de movimiento

$$E_{Ctotal}(C)' = \frac{p'_A(C)^2}{2m_A} + \frac{p'_B(C)^2}{2m_B} = \left(\frac{1}{2m_A} + \frac{1}{2m_B}\right) \cdot p'_A(C)^2$$

La energía cinética total *antes del choque* y en el sistema C escrita en función de la cantidad de movimiento es

$$E_{Ctotal}(C) = \frac{p_A(C)^2}{2m_A} + \frac{p_B(C)^2}{2m_B} = \left(\frac{1}{2m_A} + \frac{1}{2m_B}\right) \cdot p_A(C)^2$$

De comparar ambas ecuaciones resulta que

$$p'_A(C) = p_A(C)$$

Si hubiésemos puesto las energías cinéticas en función de B el resultado sería

$$p'_B(C) = p_B(C)$$

En consecuencia el choque no modifica los módulos de las cantidades de movimiento de cada sólido en el sistema C.

$$v'_A(C) = v_A(C) \quad ; \quad v'_B(C) = v_B(C) \quad (3)$$

d) En el sistema C las cantidades de movimiento de A y B son iguales y de sentido contrario. Las correspondientes velocidades tienen la dirección de sus respectivos momentos lineales y como $\alpha < 1$, la velocidad de B en C después del choque es mayor que la de A en C después del choque. La representación corresponde a la figura 1.

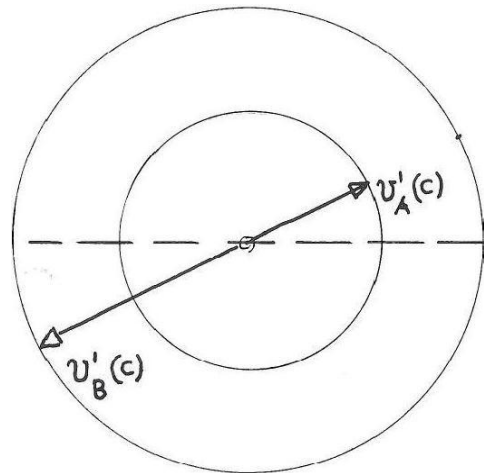


Fig.1

Teniendo en cuenta que el sistema C se desplaza respecto del L con una velocidad v_C . Para obtener las velocidades en L (sistema inercial considerado en reposo) hemos de sumar a las velocidades en C la velocidad del centro de masas respecto de L y cuyo valor lo tenemos en la fórmula (1).

Además de (2) y (3) se deduce que el módulo de $\vec{v}'_B(C)$ es igual al módulo de la velocidad del centro de masas respecto de L. La figura 2 indica como se obtienen los vectores de A y B después del choque en el sistema L.

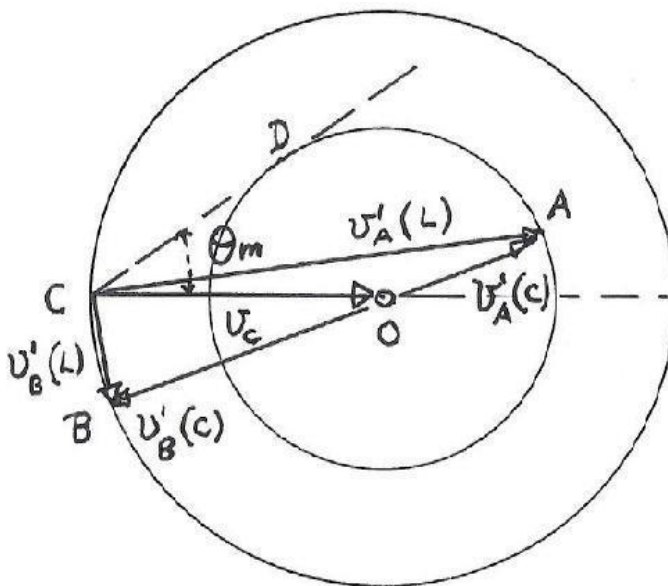


Fig.2

De la figura 2 se deduce que el extremo del vector $\vec{v}_A(C)$ ocupe la posición D siendo CD tangente a la circunferencia.

$$\operatorname{sen} \theta_m = \frac{v'_A(C)}{v_C} = \frac{v_A(C)}{v_C} = \frac{\frac{v_o \alpha}{1+\alpha}}{\frac{v_o}{1+\alpha}} = \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_m = 30^\circ$$

259.- Se calientan 2000 litros de benceno desde la temperatura inicial de 10°C hasta 50°C. Para ello se utiliza un intercambiador de calor en el que penetra vapor de agua a 100°C y sale agua líquida a 90°C. El rendimiento de la operación es 80%. Calcular los litros de agua líquida que se forman durante el proceso. Datos densidad del benceno = 0,88 g/cm³, calor específico del benceno 1,73 kJ/(kg grado). Calor de vaporización del agua 2,26.10⁶ J/kg, calor específico del agua líquida 4,18 kJ/(kg grado).

La energía calorífica que necesita el benceno para calentarlo es:

$$Q = mc\Delta t = 2000L \cdot 0,88 \frac{\text{kg}}{\text{L}} \cdot 1,73 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \cdot (50 - 10)^\circ\text{C} = 1,22 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Esta energía la suministra el vapor de agua. Primero el vapor se condensa y cede su calor latente de vaporización y a continuación el agua líquida formada se enfría de 100 a 90°C

$$Q' = m' \cdot 2,26 \cdot 10^6 + m' \cdot 4,18 \cdot 10^3 (100 - 90) = m' \cdot 2,30 \cdot 10^6$$

Q' es igual a Q si el rendimiento fuese del 100 % al ser solo del 80%, la masa de vapor de agua debe ser mayor que m'.

$$m' = \frac{100}{80} \cdot m = \frac{100}{80} \cdot \frac{1,22 \cdot 10^8}{2,26 \cdot 10^6} = 67 \text{ kg}$$

Como la densidad del agua es prácticamente 1kg/L, los litros de agua recogidos son 67.

260.- Desde uno de los polos de la Tierra se lanza en dirección del radio terrestre, un proyectil con velocidad inicial v_0 . Calcular la altura que alcanza. Se desprecian los rozamientos. Establecer el resultado en función del radio de la Tierra R y de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie g .

Al ser lanzado desde uno de los Polos la rotación terrestre no interviene en el problema. Si v_0 es grande, al hacer los cálculos se ha de tener en cuenta que la intensidad del campo gravitatorio no es constante.

Supongamos que nos encontramos a una altura x contada desde el centro de la Tierra. El proyectil de masa m sufre una fuerza de atracción hacia el centro de la Tierra.

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{x^2} \vec{u} = m\vec{a} \Rightarrow -G \frac{M}{x^2} \vec{u} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

El vector unitario \vec{u} tiene la dirección y el sentido del radio terrestre que va desde el centro de la Tierra al polo de lanzamiento.

El vector velocidad del proyectil a la altura x es:

$$\vec{v} = v\vec{u} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u} \quad \text{De ambas ecuaciones se deduce que:}$$

$$-\frac{GM}{x^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v \Rightarrow \int_R^h -\frac{GM}{x^2} dx = \int_{v_0}^0 v dv \Rightarrow$$

$$\frac{GM}{h} - \frac{GM}{R} = -\frac{v_0^2}{2} \Rightarrow \frac{GM}{h} = -\frac{v_0^2}{2} + \frac{GM}{R} \Rightarrow h = \frac{GM}{-\frac{v_0^2}{2} + \frac{GM}{R}}$$

En la superficie terrestre se cumple que

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2$$

Sustituyendo esta última relación en h , resulta:

$$h = \frac{gR^2}{\frac{gR^2}{R} - \frac{v_0^2}{2}} = \frac{R}{1 - \frac{v_0^2}{2gR}}$$