

PROBLEMAS VARIADOS 5

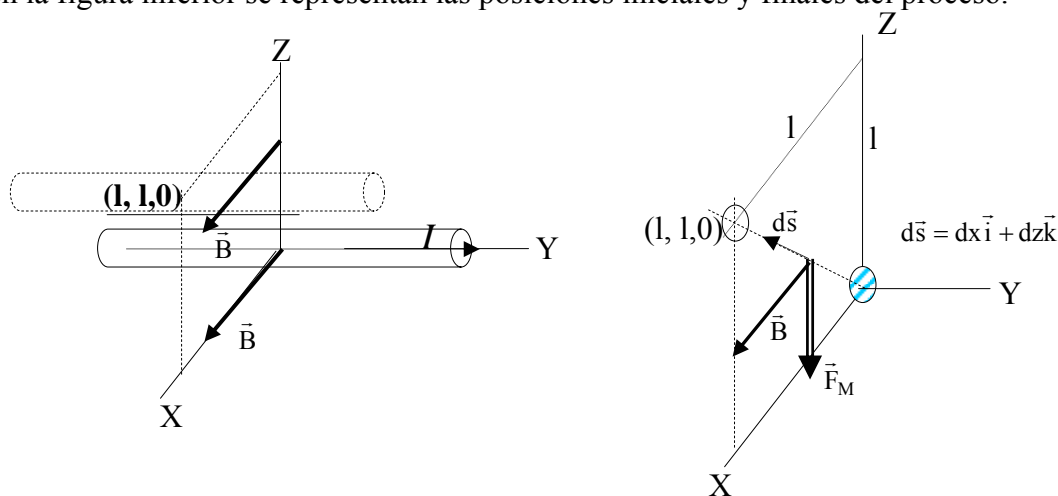
226.- Un conductor rectilíneo (de masa despreciable) de longitud L está situado sobre el eje Y , ocupando sus extremos las posiciones ($y = +L/2$; $y = -L/2$); mantiene una corriente constante de I amperios en el sentido del eje Y positivo. Un campo magnético uniforme B está dirigido en sentido positivo del eje X ocupando todo el espacio. Si el mencionado conductor se traslada paralelamente a sí mismo hasta que el centro del mismo ocupe la posición $x=l$, $z=l$

a) Se pide calcular el trabajo que se realiza para lograr este desplazamiento, cuando el campo magnético es uniforme.

b) El trabajo, si el módulo del campo es variable según la ecuación

$$B(z) = B - \rho z, \text{ siendo } \rho \text{ positivo}$$

a) En la figura inferior se representan las posiciones iniciales y finales del proceso.



El campo magnético provoca sobre el conductor una fuerza cuya ecuación es:

$$\vec{F}_M = I\vec{L} \times \vec{B} = IL \vec{j} \times B \vec{i} = -ILB \vec{k}$$

Esta fuerza perpendicular al conductor, tiende a llevárselo en el sentido negativo del eje Z , por lo tanto, para trasladar el conductor en el sentido positivo de este mismo eje, hemos de aplicar una fuerza \vec{F} de módulo igual a la anterior, pero de sentido contrario, que efectúe un trabajo positivo. Después, para llevarlo paralelo al eje X , hasta llegar al punto considerado $(l, l, 0)$, no hace falta más trabajo, puesto que la fuerza del campo magnético al estar según Z y ser perpendicular al camino, (paralelo al eje X), hace trabajo nulo. En efecto.

El trabajo es:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int -\vec{F}_M \cdot d\vec{s} = \int ILB \vec{k} \cdot (dx \vec{i} + dz \vec{k}) = \int_0^l ILB dz = ILBl$$

b) La fuerza que sufre el conductor por acción del campo magnético variable es:

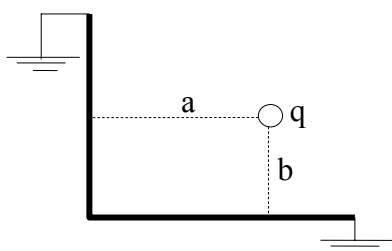
$$\vec{F}_M = I\vec{L} \times \vec{B} = IL \vec{j} \times B(z) \vec{i} = -ILB(z) \vec{k} = -IL(B - \rho z) \vec{k}$$

El trabajo es:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int -\vec{F}_M \cdot d\vec{s} = \int IL(B - \rho z)\vec{k} \cdot (dx\vec{i} + dz\vec{k}) = \int_0^l IL(B - \rho z)dz = ILB l - ILB\rho \frac{l^2}{2} \Rightarrow$$

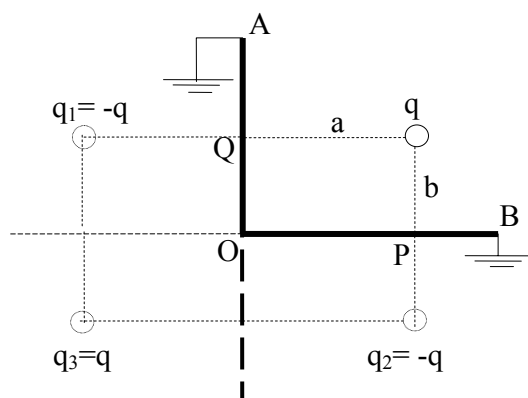
$$W = ILB l \left(1 - \frac{\rho l}{2}\right)$$

227.- Dos semiplanos conductores forman entre sí un ángulo de 90° y se encuentran ambos conectados a tierra. Se coloca una carga q entre ellos tal como se muestra en la figura. Determinar la energía de interacción electrostática de la carga q con los planos (energía del sistema).



La carga q induce cargas sobre los dos planos y el cálculo del campo creado por el sistema aparece como difícil. Existe un método, llamado de las imágenes, que consiste en establecer una serie de cargas que permiten calcular el campo de una manera más sencilla. Las cargas se eligen de modo que las superficies conductoras se sustituyen por superficies equipotenciales a los mismos potenciales.

En el problema debemos encontrar cargas puntuales que determinen que los potenciales de los semiplanos sean nulos ya que éstos se encuentran unidos a tierra.



Si el semiplano OA estuviese solo, para hacer su potencial nulo ponemos la carga imagen $q_1 = -q$. Si el semiplano OB estuviese solo, para hacer su potencial nulo ponemos la carga imagen $q_2 = -q$, pero al estar juntos los dos semiplanos conductores con esas cargas, no logramos que los potenciales sean nulos. Colocamos una tercera carga $q_3 = q$; simétrica de la primera respecto del origen, y comprobamos si el conjunto de la carga q y las tres cargas imágenes hacen el potencial nulo tanto en OA como en OB.

Escogemos un punto arbitrario P del semiplano OB el potencial es:

$$V_p = V_q + V_{q_1} + V_{q_2} + V_{q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{b} + \frac{-q}{\sqrt{4a^2 + b^2}} + \frac{q}{\sqrt{4a^2 + b^2}} + \frac{-q}{b} \right) = 0$$

Escogemos un punto arbitrario Q del semiplano OA el potencial es:

$$V_Q = V_q + V_{q_1} + V_{q_2} + V_{q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a} + \frac{-q}{a} + \frac{q}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} + \frac{-q}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} \right) = 0$$

La interacción electrostática de q con los planos la calculamos como la energía de interacción entre las cuatro cargas, es decir la energía de un sistema de cargas.

Podemos hacerlo calculando los trabajos desde el infinito hasta formar la configuración de las cuatro cargas. Recordando que el trabajo es: la carga transportada por la diferencia de potencial entre el punto de partida y el de llegada. Se toma como potencial de referencia el infinito con valor cero

El trabajo para llevar q desde el infinito hasta su posición es cero.

El trabajo para llevar q₁ desde el infinito a su posición es:

$$W_1 = q_1 \cdot \left(0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \right) = -q \cdot \left(0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2a}$$

El trabajo para llevar q₂ desde el infinito a su posición es:

$$\begin{aligned} W_2 &= q_2 \cdot \left[0 - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{2b} \right) \right] = \\ &= q \cdot \left[0 - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2b} \right) \right] \Rightarrow W_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{2b} \right) \end{aligned}$$

El trabajo para llevar q₃ desde el infinito a su posición es:

$$\begin{aligned} W_3 &= q_3 \cdot \left[0 - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2b} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{2a} \right) \right] = \\ &= -q \cdot \left[0 - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2b} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \right) \right] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{2a} \right) \end{aligned}$$

El trabajo total:

$$W_T = \sum_{i=1}^3 W_i = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W_T = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{2a} \right) \Rightarrow$$

$$W_T = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = -E \Rightarrow E = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Otra forma de realizar el cálculo anterior y de forma más rápida consiste, en sumar las energías potenciales de todas las parejas que puedan formarse sin repetir ninguna, así: la carga q con q_1 , q_2 y q_3 , la carga q_1 con q_2 y q_3 y la carga q_2 con q_3 .

$$E = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qq_1}{2a} + \frac{qq_2}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{qq_3}{2b} + \frac{q_1q_2}{2b} + \frac{q_1q_3}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{q_2q_3}{2a} \right] =$$

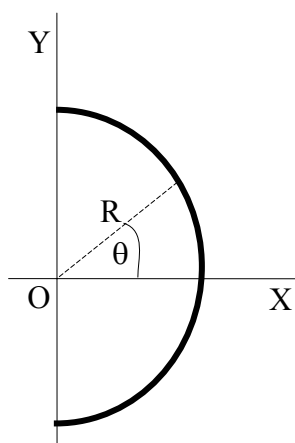
$$E = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2a} + \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{2a} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \right]$$

228.- Sobre un anillo en forma de semicircunferencia de radio R existe una densidad lineal de carga expresada mediante la ecuación

$$\lambda = \lambda_0 \cos \theta$$

El ángulo θ puede observarse en la figura



a) Calcular la carga Q almacenada en el anillo.

b) El módulo del campo en el punto O .

Ayuda: $\cos^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

Consideremos un trocito de anillo de longitud dl , tal como indica la figura 1

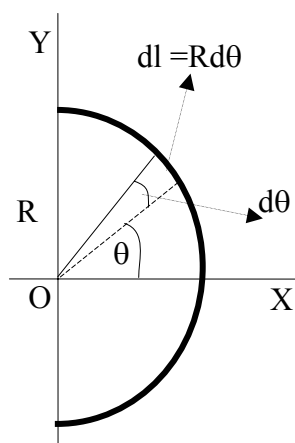


Fig.1

a) Dado que el arco es igual al radio por el ángulo en radianes: $dl = R d\theta$; la carga que posee ese trocito del anillo vale:

$$dQ = \lambda \cdot dl = \lambda_0 \cos \theta \cdot R d\theta$$

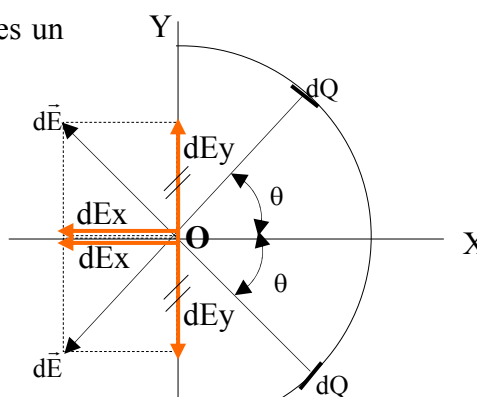
La carga Q de todo el anillo la obtenemos integrando la expresión anterior entre los ángulo $-\pi/2$ y $+\pi/2$

$$Q = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda_0 R \cos \theta d\theta = \lambda_0 R \left[\sin \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \lambda_0 R \left[\sin \frac{\pi}{2} - \left(\sin -\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2\lambda_0 R$$

b) El módulo del campo eléctrico elemental dE , creado en el punto O por la carga $dQ = \lambda_0 \cos \theta \cdot R d\theta$ es:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 R \cos \theta d\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 \cos \theta d\theta}{R}$$

Vectorialmente, el campo eléctrico elemental $d\vec{E}$, es un vector cuya dirección es radial y saliente del elemento dQ por tratarse de una carga positiva. Debido a la simetría de la distribución de carga respecto del punto O , si se toman dos elementos dQ simétricos con el eje X , ángulos iguales θ , ver figura 2, sus componentes verticales dE_y del vector campo dE se anulan dos a dos y solo quedan para la contribución al campo en O , las de las componentes dE_x ; según la figura 2.



$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{R} \cos^2 \theta d\theta$$

El valor de E_x lo calculamos integrando la ecuación entre los límites $-\pi/2$ y $+\pi/2$.

$$E_x = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2\theta}{2} d\theta = \frac{\lambda_0}{8\pi\epsilon_0 R} \left[\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{\lambda_0}{8\pi\epsilon_0 R} \left[\pi - \frac{\cos \pi - \cos(-\pi)}{2} \right] = \frac{\lambda_0}{8\epsilon_0 R}$$

229.-Una esfera conductora de radio R está formada por la unión de dos semiesferas. Todo el conjunto tiene distribuida de forma homogénea una carga Q .

a) Calcular la fuerza con que se repelen ambas partes.

b) Si una esfera de radio R y carga Q está cortada por un plano a una altura h de su centro ¿cuál es la fuerza con que se repelen esas partes?

a) Designamos con σ la densidad superficial de carga que existe sobre la esfera.

Escogemos sobre ella un elemento de superficie de módulo dS , tal como indica la figura 1. La carga de ese elemento es: $dq = \sigma dS$

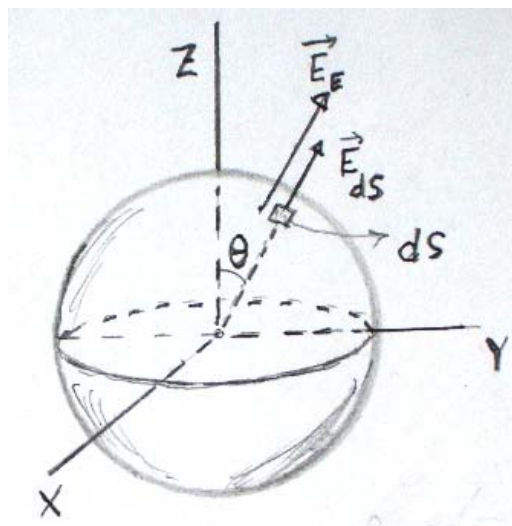


Fig.1

Aparentemente, y teniendo en cuenta que dS es muy pequeño, la fuerza que recibe es la originada por el campo de la esfera de radio R , esto es:

$$dF = E \cdot \sigma dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \sigma dS$$

Sin embargo esto no es correcto. Muy cerca de la superficie dS , que posee la carga dq , (que aparece rayada en la fig.2) ésta crea un campo eléctrico que evaluamos aplicando el teorema de Gauss. Alrededor de dS tomamos una superficie cerrada, por ejemplo un cilindro, cuyas bases .Las superficies A y B están muy próximas a dS .

El mismo flujo eléctrico atraviesa las bases y ninguno por la superficie lateral y de acuerdo con el teorema de Gauss, designando con E_{ds} al campo creado por dq en las dos bases, resulta:

$$2E_{ds} \cdot dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{ds} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

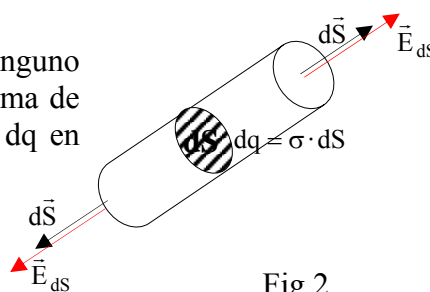


Fig.2

Dado que el campo en la superficie de la esfera es

$$E_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S} \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Si nos fijamos en la figura 1, resulta que el campo debido a la esfera menos el elemento $dq = \sigma dS$, vale:

$$E = E_E - E_{ds} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

La fuerza que recibe la carga dq es:

$$dF = E \cdot dq = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \sigma dS = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS$$

Para calcular la fuerza debemos integrar la expresión anterior. Antes de ello debemos fijarnos en la fig.3, en la que se ha representado la superficie de módulo dS sobre la esfera mediante el vector $d\vec{S}$. La fuerza que recibe ese elemento de superficie es un vector que tiene la misma dirección y sentido que $d\vec{S}$. La proyección de $d\vec{S}$ en dirección vertical es dS' , el cual representa una superficie sobre el plano XY.

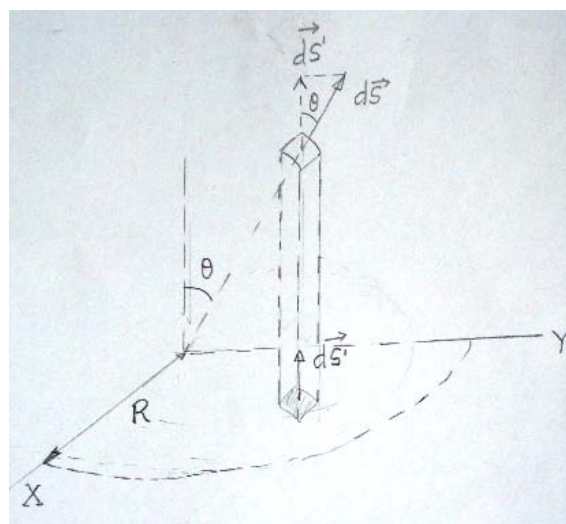


Fig.3

Si consideramos los distintos elementos de superficie sobre la semiesfera y las fuerzas que sobre cada uno de ellos actúan, resulta que solamente deben sumarse las componentes de las fuerzas en sentido vertical, ya que las de sentido horizontal se anulan por pares. La fig. 4 indica este hecho para un par de estas superficies. La componente de \vec{F} según Z

$$dF_z = dF \cos\theta = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \cos\theta$$

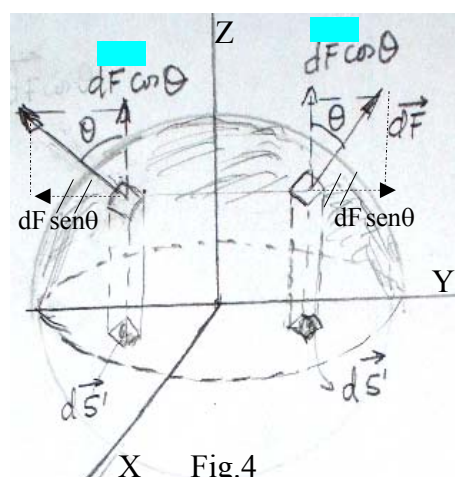


Fig.4

Considerando que todos los elementos de superficie $d\vec{S}$ que forman la semiesfera, son vectores perpendiculares al elemento correspondientes y si se proyectan en la dirección de Z, y se suman estas contribuciones, resulta que la suma es la superficie del círculo de radio R, situado en el plano XY.

Por consiguientes la fuerza F_Z se obtiene integrando sobre toda la semiesfera:

$$F_Z = \int_S dF \cos\theta = \int_S \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \cos\theta = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \int_S dS \cos\theta = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi R^2$$

$$F_Z = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi R^2 = \frac{\left(\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^2}\right)^2}{2\epsilon_0} \pi R^2 = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}$$

Vectorialmente:
$$\vec{F}_Z = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2} \vec{k}$$

Evidentemente, por el principio de acción y reacción, sobre la otra semiesfera actúa una fuerza igual

y de sentido contrario:
$$\vec{F}'_Z = -\frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2} \vec{k}$$

b) El razonamiento para este caso es el mismo que el anterior, pero ahora r hemos de expresarlo en función de h y del radio de la esfera R, ver fig.5

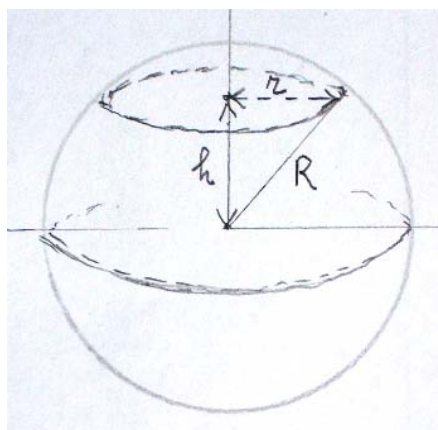


Fig.5

$$\sum dS \cos\theta = \pi r^2 = \pi(R^2 - h^2) \Rightarrow F_Z = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi(R^2 - h^2) \Rightarrow$$

$$F_Z = \frac{\left(\frac{Q}{4\pi R^2}\right)^2}{2\epsilon_0} \pi(R^2 - h^2) = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^4} (R^2 - h^2)$$

$$F_Z = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)$$

230.- El péndulo de un reloj patrón ejecuta una oscilación completa en un segundo, esto es, su periodo es $T = 1s$. Otro reloj de péndulo tiene una longitud algo mayor que el patrón. Ambos péndulos se encuentran en un instante determinado en fase y vuelven a estarlo cuando han transcurrido 150 s según el reloj patrón. a) Calcular: a) el retraso que sufre el segundo reloj respecto del patrón cuando han transcurrido 20 horas. b) ¿Cuánto debe acortarse el péndulo del segundo reloj para que ambos indiquen la misma hora?

El periodo de un péndulo simple tiene de ecuación $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Cuando el péndulo del reloj patrón efectúa una oscilación, el segundo péndulo no llega a efectuar una oscilación ya que al tener mayor longitud su periodo es mayor. Por tanto en cada oscilación del patrón, el segundo péndulo se retrasa algo, este retraso se ira acumulando al transcurrir el tiempo y llegará un momento en el que el retraso sea de una oscilación completa y entonces si el péndulo patrón ha efectuado n oscilaciones y el otro péndulo habrá efectuado $n-1$ oscilaciones. Esta situación ocurre cuando transcurren 150 segundos.

Para el péndulo patrón $n \cdot T = 150$ y para el otro péndulo $(n-1) T' = 150$, siendo T el periodo del péndulo patrón y T' el periodo del otro péndulo.

$$nT = (n-1)T' \Rightarrow T' = \frac{n}{n-1} T = \frac{150}{149} \cdot 1 = \frac{150}{149} s$$

Si designamos con L a la longitud del péndulo patrón y L' a la del segundo péndulo resulta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}; T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} \Rightarrow \frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{L}{L'}} \Rightarrow L' = L \frac{T'^2}{T^2}$$

Cuando el péndulo patrón efectúa una oscilación completa transcurre 1 segundo de tiempo; el otro péndulo indica un tiempo de $\left(1 - \frac{149}{150}\right)s$.

a)

$$\frac{1s}{\left(1 - \frac{149}{150}\right)s} = \frac{20 \text{ hora} \cdot 3600 \frac{s}{\text{hora}}}{x} \Rightarrow x = 72000 \cdot \left(1 - \frac{149}{150}\right) = 480s$$

b) Designamos con ΔL lo que hay que acortar al segundo péndulo para que indique lo mismo que el patrón

$$\Delta L = L' - L = L \frac{T'^2}{T^2} - L = L \left(\frac{T'^2}{T^2} - 1 \right) = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \left(\frac{T'^2}{T^2} - 1 \right) = \frac{9,8}{4\pi^2} \left(\frac{150^2}{149^2} - 1 \right) = 0,00334 \text{ m}$$