

PROBLEMAS VARIADOS 6

231.- Un péndulo simple de longitud L , se separa un ángulo θ_0 de su posición de equilibrio y se deja oscilar libremente.

a) Determinar la tensión de la cuerda en función del ángulo θ que la cuerda del péndulo forma con la dirección vertical.

b) Representar en una gráfica la tensión frente a θ para $\theta_0 = 45^\circ$ y $\theta_0 = 60^\circ$.

c) Calcular la aceleración total de la masa puntual del péndulo en función de θ .

d) construir la gráfica de la aceleración total en función de θ , para $\theta_0 = 20, 40, 60, \text{ y } 70$ grados.

a) Para cualquier ángulo θ las fuerzas que actúan sobre la masa puntual del péndulo son su peso y la tensión de la cuerda (ver figura 1). Como la masa está girando la tensión de la cuerda ha de proporcionar la fuerza centrípeta mv^2/L .

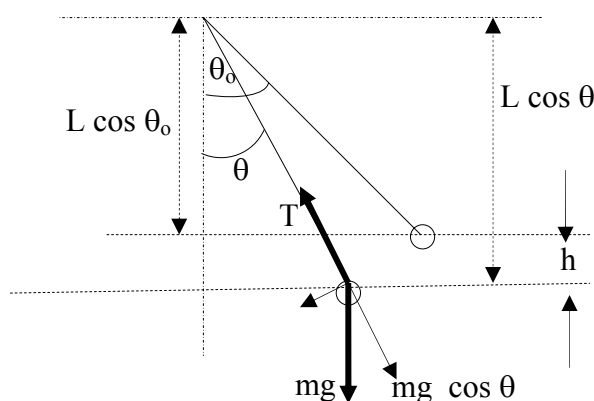


Fig.1

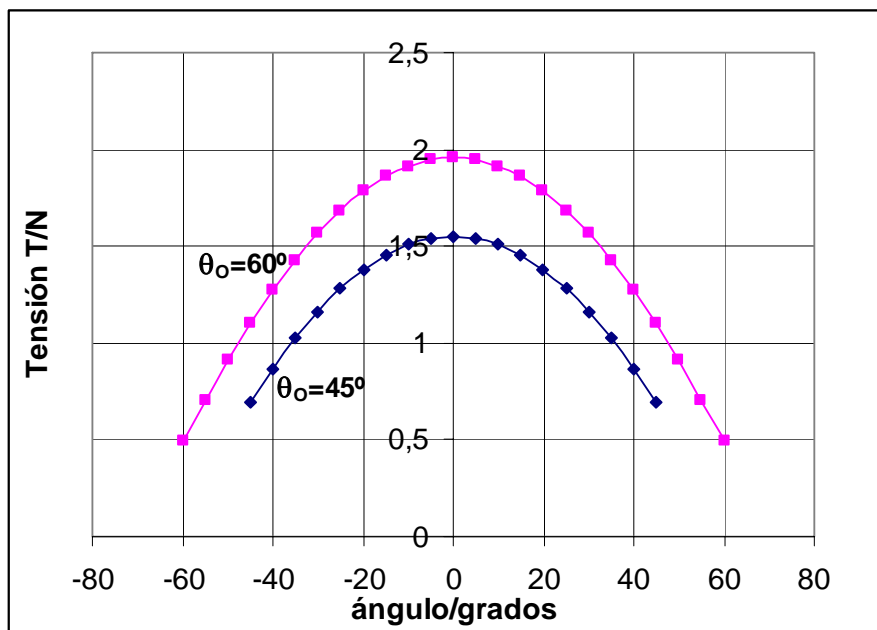
En la figura 1, L es la longitud del péndulo, y designamos con v a la velocidad del péndulo cuando el ángulo es θ . La longitud h es lo que ha descendido el péndulo desde su posición inicial (θ_0) hasta la posición θ .

$$\text{Podemos escribir } T = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{L} \quad \text{y} \quad mgh = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} mv^2$$

Combinando ambas ecuaciones resulta:

$$T = mg \cos \theta + 2mg(\cos \theta - \cos \theta_0) = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \quad (1)$$

b) La representación gráfica de T frente a θ , es la siguiente:



La tensión es máxima cuando el péndulo pasa por la posición vertical ($\theta = 0$)

c) Para una posición cualquiera θ del péndulo en la figura 1, la aceleración total a_T se compone de la aceleración tangencial y de la centrípeta. Ambas aceleraciones, tangencial y centrípeta, son vectores perpendiculares entre sí, por tanto:

$$a_T^2 = a^2 + a_c^2 = (g \operatorname{sen} \theta)^2 + \left(\frac{v^2}{L} \right)^2 = g^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \left(\frac{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}{L} \right)^2 \Rightarrow$$

$$a_T^2 = g^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 4g^2 (\cos^2 \theta + \cos^2 \theta_0 - 2 \cos \theta \cos \theta_0) \Rightarrow$$

$$a_T^2 = g^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta_0 - 8 \cos \theta \cos \theta_0) \Rightarrow$$

$$a_T = g \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta_0 - 8 \cos \theta \cos \theta_0} \Rightarrow$$

$$a_T = g \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta_0 - 8 \cos \theta \cos \theta_0} \quad (2)$$

a) La ecuación (2) nos dice que si fijamos (θ_0), la aceleración total dependerá del ángulo θ , esto quiere decir que a_T será diferente en los distintos lugares de oscilación del péndulo, por ello vamos a estudiar cómo varía a_T respecto de θ .

b)

$$\frac{da_T}{d\theta} = g \frac{-6 \cos \theta \operatorname{sen} \theta + 8 \operatorname{sen} \theta \cos \theta_0}{2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta_0 - 8 \cos \theta \cos \theta_0}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 \cos \theta \operatorname{sen} \theta + 8 \operatorname{sen} \theta \cos \theta_0 = 0; \quad \operatorname{sen} \theta (-6 \cos \theta + 8 \cos \theta_0) = 0 \quad (3)$$

La ecuación (3) tiene dos soluciones $\theta = 0$ y $3 \cos \theta = 4 \cos \theta_0 \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{3}{4} \cos \theta$

El máximo valor de $\cos \theta = 1$, por tanto, $\cos \theta_0 = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta_0 = 41,4^\circ$

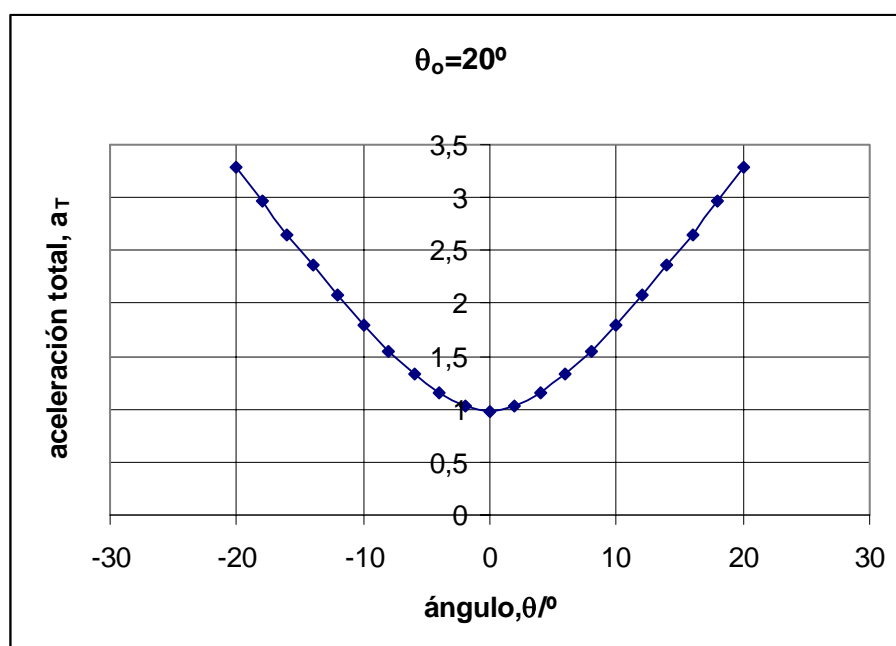
Si en la ecuación (3), damos a θ_0 un valor inferior a $41,4$ grados la ecuación tiene una solución y es $\theta = 0$.

Si en la ecuación (3), damos a θ_0 un valor superior a $41,4$ grados la ecuación tiene más de una solución.

Cuando $\theta_0 = 20^\circ$

$$a_T = 9,8 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta + 4 \cdot \cos^2 20^\circ - 8 \cdot \cos 20^\circ \cos \theta} = 9,8 \sqrt{4,53 + 3 \cos^2 \theta - 7,52 \cos \theta}$$

la gráfica a_T frente a θ es:

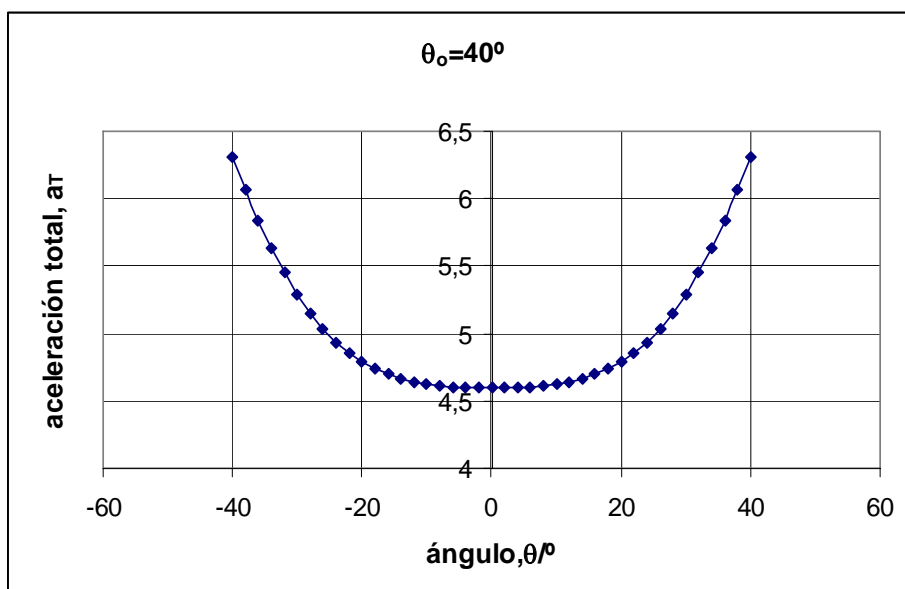


En este caso se presenta un mínimo en el punto más bajo del péndulo

Cuando $\theta_0 = 40^\circ$

$$a_T = 9,8 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta + 4 \cdot \cos^2 40^\circ - 8 \cdot \cos 40^\circ \cos \theta} = 9,8 \sqrt{3,35 + 3 \cos^2 \theta - 6,13 \cos \theta}$$

la gráfica a_T frente a θ es:

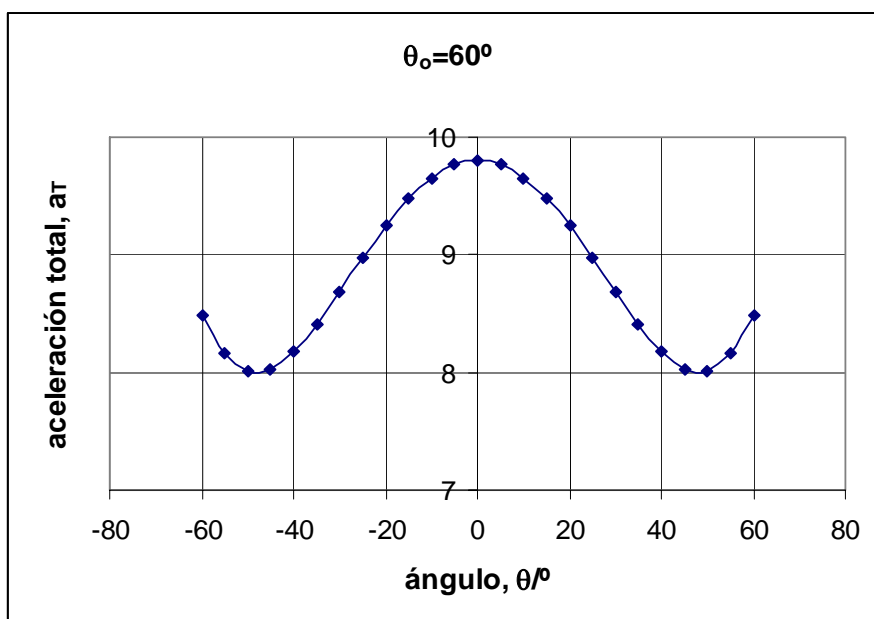


El mínimo se encuentra en el punto más bajo de la posición del péndulo

Cuando $\theta_0 = 60^\circ$

$$a_T = 9,8\sqrt{1 + 3\cos^2\theta + 4\cos^2 60^\circ - 8\cos 60^\circ \cos\theta} = 9,8\sqrt{3,00 + 3\cos^2\theta - 4,00\cos\theta}$$

la gráfica a_T frente a θ es:



Como ahora el ángulo es mayor de $41,4$ aparecen las soluciones $\sin\theta = 0$ que ahora es un máximo y

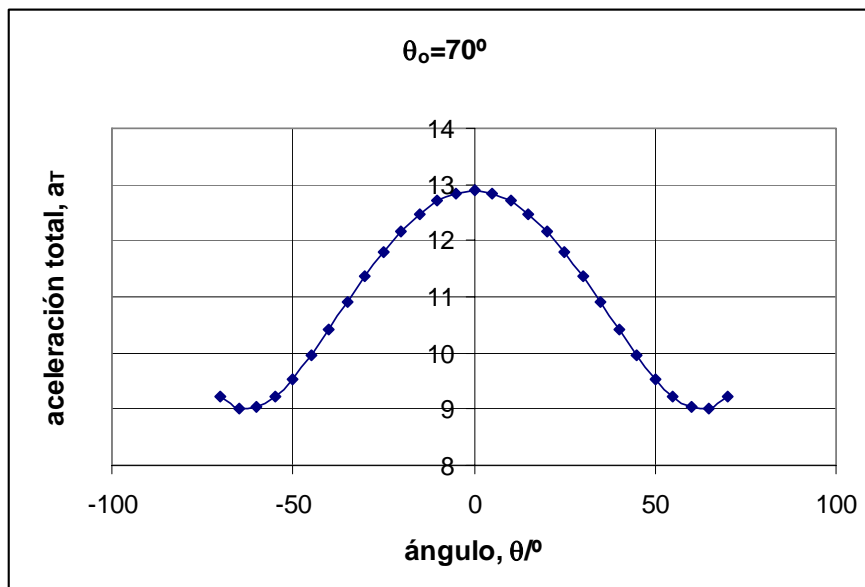
$$\cos\theta_0 = \frac{3}{4}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{4\cos 60^\circ}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \pm 48,2^\circ$$

Que presenta dos mínimos

Cuando $\theta_0 = 70^\circ$

$$a_T = 9,8\sqrt{1 + 3\cos^2\theta + 4\cos^2 70^\circ - 8\cos 70^\circ \cos\theta} = 9,8\sqrt{1,47 + 3\cos^2\theta - 2,74\cos\theta}$$

la gráfica a_T frente a θ es:



Como ahora el ángulo es mayor de $41,4$ aparecen las soluciones $\sin \theta = 0$ que es un máximo y

$$\cos \theta_0 = \frac{3}{4} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{4 \cdot \cos 70^\circ}{3} = \frac{1,368}{3} \Rightarrow \theta = \pm 62,8^\circ$$

232.- Un carrito se desplaza por un suelo horizontal con una velocidad v_C constante. El carrito dispone de un dispositivo que puede lanzar una bola con una velocidad v_B en dirección vertical hacia arriba. a) Describir el movimiento de la bola y su posición a medida que transcurre el tiempo, así como la del carrito. Representar gráficamente ambos movimientos si $v_C = 1 \text{ m/s}$ y $v_B = 3 \text{ m/s}$

b) Ahora el carrito se encuentra en lo alto de un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Estando el carrito en reposo se lanza la bola con velocidad v_B perpendicular al plano. Describir el movimiento de la bola y su posición a medida que transcurre el tiempo, así como la del carrito. Obtener las graficas de posiciones del carrito y de la bola cuando $\alpha = 45^\circ$.

c) El carrito se encuentra en el plano inclinado del apartado anterior y lanza la bola con velocidad vertical v_B perpendicular al plano, siendo la velocidad del carrito v_C paralela al plano y en sentido ascendente. a) Describir el movimiento de la bola y su posición a medida que transcurre el tiempo, así como la del carrito. Obtener las graficas de posiciones del carrito y de la bola cuando $\alpha = 45^\circ$. Despreciar todos los rozamientos.

a) Tomamos unos ejes cartesianos fijos de referencia, con origen en el lugar que ocupa el carrito en el tiempo $t=0$. La bola al salir del carrito está dotada de dos velocidades una horizontal v_C y otra vertical v_B , por lo que respecto del sistema elegido describirá una trayectoria parabólica. El carrito se desplaza por el eje X con velocidad uniforme v_C .

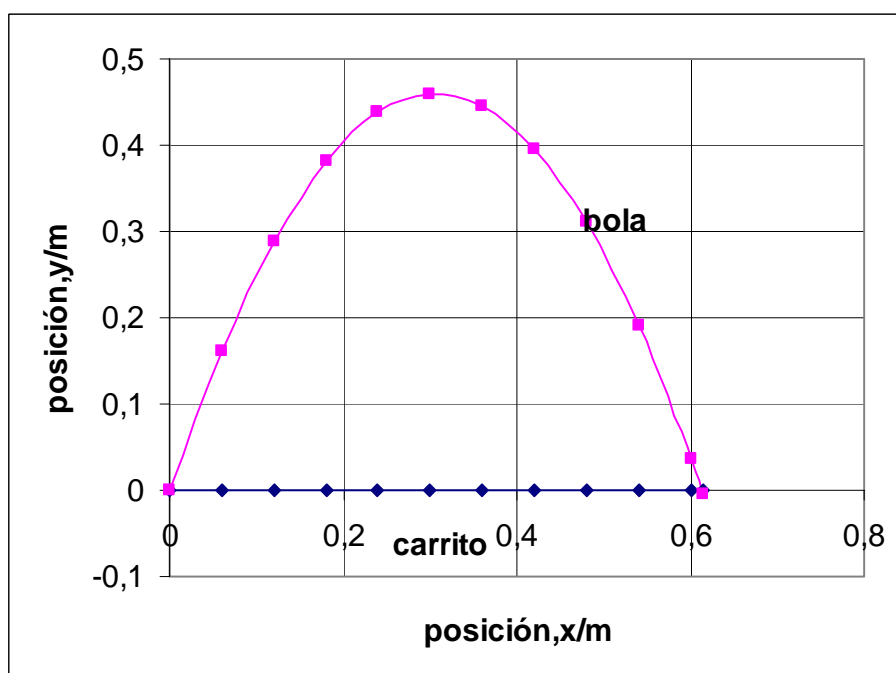
Ecuaciones de la bola:

$$x_B = v_C t \quad ; \quad y_B = v_B t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y_B = v_B \frac{x_B}{v_C} - \frac{1}{2} g \frac{x_B^2}{v_C^2} = 3 x_B - \frac{9,8}{2 \cdot 1} x_B^2 = 3 x_B - 4,9 x_B^2$$

Ecuación del carrito:

$$x_C = v_C t; \quad \text{como } v_C = 1 \text{ m/s} \Rightarrow v_C = t$$

Las abscisas del carrito y la de la bola son las mismas, por tanto, en todo momento, el carrito está justamente debajo de la bola y cuando $y_B=0$, la bola caerá sobre el carrito.



b) En la figura 1 se indican los ejes X_P e Y_P de referencia, fijos en el plano inclinado.

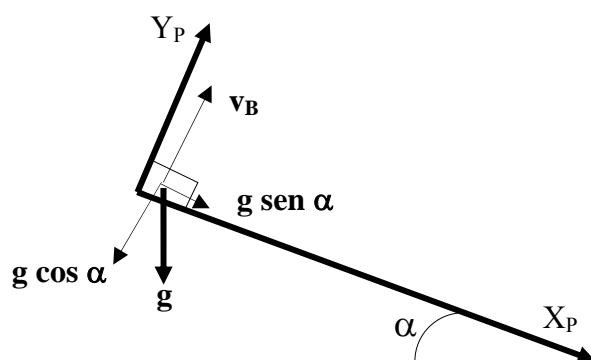


Fig.1

La bola en la dirección del eje Y_p lleva una velocidad inicial v_B y está sometida a una aceleración $-g \cos \alpha$; en la dirección del eje X_p su velocidad inicial es cero y está sometida a una aceleración $g \sin \alpha$.

Las ecuaciones de movimiento de la bola son:

$$x_B = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_B = v_B t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B = v_B \sqrt{\frac{2x_B}{g \sin \alpha}} - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot \frac{2x_B}{g \sin \alpha} = v_B \sqrt{\frac{2x_B}{g \sin \alpha}} - \frac{x_B}{\tan \alpha} \quad (1)$$

Las ecuaciones de movimiento del carrito son:

$$x_C = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_C = 0 \quad (2)$$

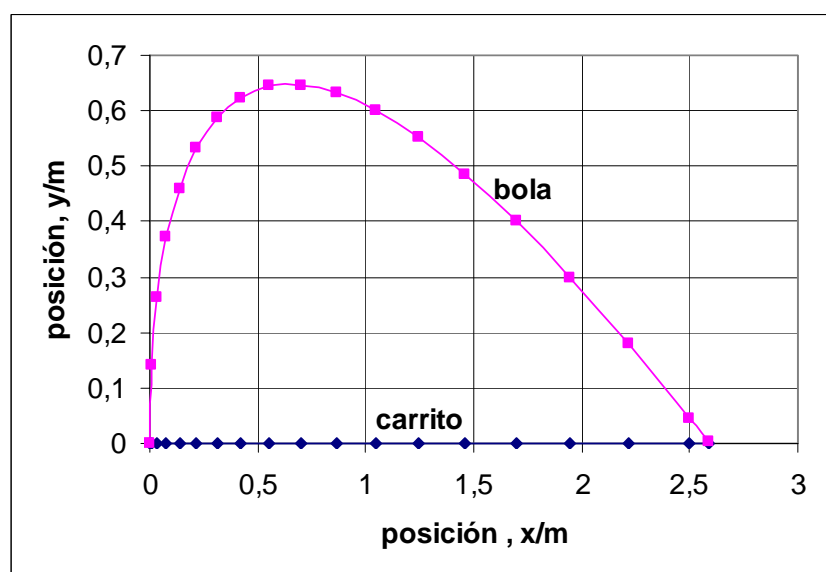
Dado que $x_C = x_B$ se deduce que para los ejes de referencia X_p e Y_p ; el carrito está debajo de la bola en todo momento.

Para los valores numéricos dados en el enunciado

$$y_B = 3 \sqrt{\frac{2x_B}{9,8 \cdot \sin 45}} - \frac{x_B}{\tan 45} = 1,61 \sqrt{x_B} - x_B$$

$$x_C = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot \sin 45 \cdot t^2 = 3,46 t^2$$

Las gráficas de movimiento de ambos cuerpos



En la figura 2 se ha elegido un sistema de referencia distinto al anterior

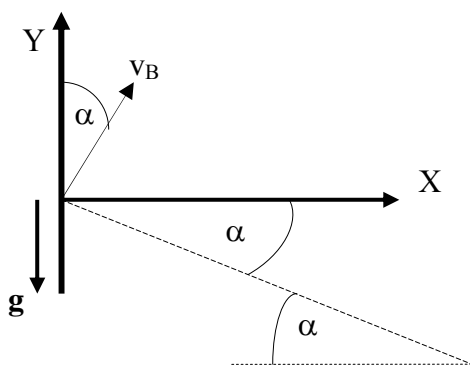


Fig.2

Las ecuaciones de movimiento de la bola son:

$$x_B = v_B \operatorname{sen} \alpha \cdot t ; \quad y_B = v_B \operatorname{cos} \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

El carrito desliza sobre el plano inclinado con una aceleración de módulo $g \operatorname{sen} \alpha$ y al cabo de un tiempo t ha recorrido sobre el plano una distancia medida sobre el plano

$$l = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2$$

Para ese valor de l , las correspondientes coordenadas en el sistema XY (condiciones de ligadura) son:

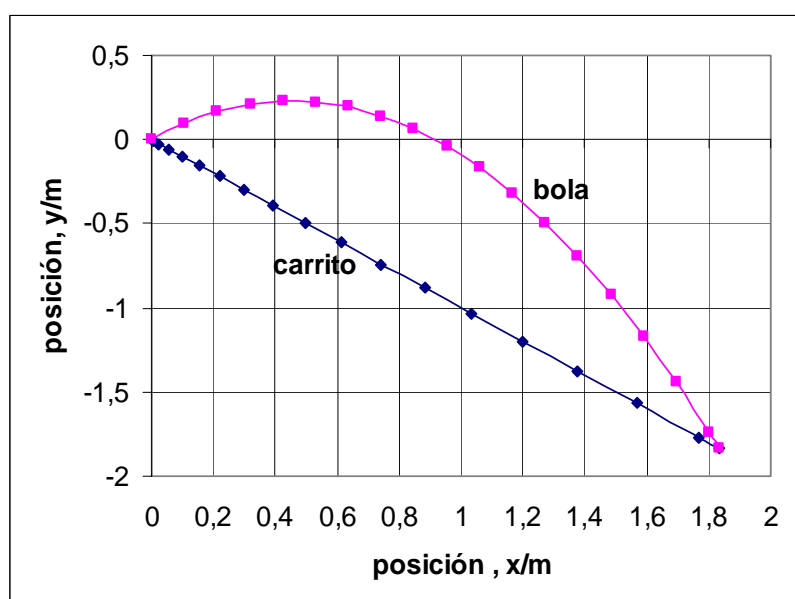
$$x_C = l \operatorname{cos} \alpha = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \cdot t^2 ; \quad y_C = -l \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2} g \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot t^2$$

Para los valores numéricos dados en el enunciado:

$$x_B = 2,12 t ; \quad y_B = 2,12 t - 4,9 t^2$$

$$x_C = 2,45 t^2 ; \quad y_C = -2,45 t^2$$

Las posiciones de las trayectorias de la bola y del carrito están en la gráfica siguiente:



Esta gráfica nos indica que desde el punto de vista del sistema XY el carrito no está permanentemente debajo de la bola pero sí que coinciden en un lugar del plano inclinado (distinto al inicial) tal como ocurre en el sistema $X_P Y_P$.

c) Tomamos unos ejes de referencia $X_P Y_P$, como los de la figura 1.

Ecuaciones de la bola

$$x_B = -v_C t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_B = v_B t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2$$

Ecuaciones del carrito

$$x_C = -v_C t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_C = 0$$

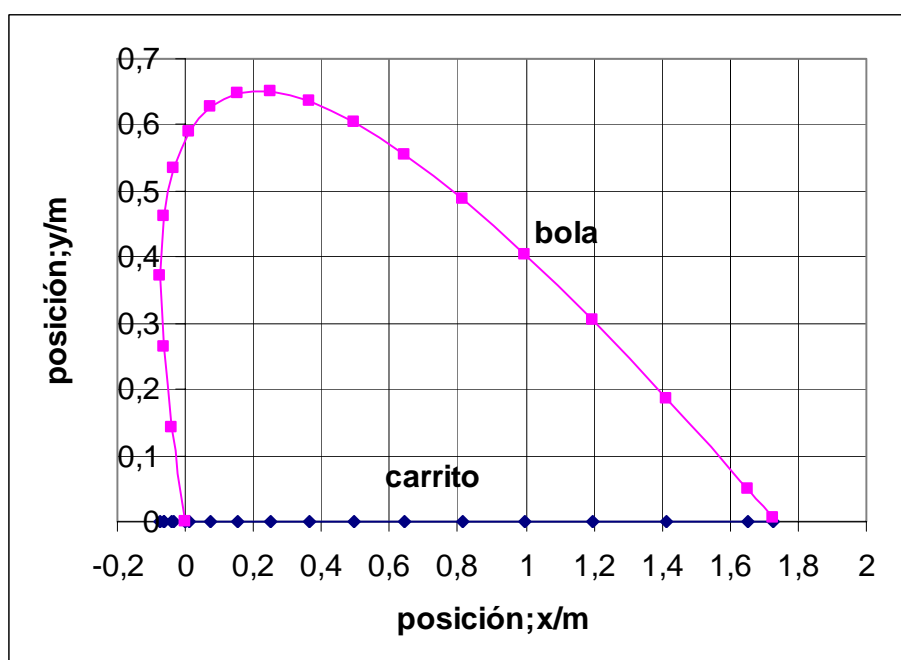
Como $x_C = x_B$, el carrito está siempre debajo de la bola y en un determinado lugar se encontrarán, aparte del instante inicial.

Sustituyendo los valores del enunciado en las ecuaciones anteriores resulta:

$$x_B = -t + 3,46 t^2 \quad ; \quad y_B = 3t - 3,46 t^2$$

$$x_C = -t + 3,46 t^2 \quad ; \quad y_C = 0$$

Las posiciones de las trayectorias de la bola y del carrito están en la gráfica siguiente:



Elegimos ahora un sistema de referencia XY como se indica en la figura 3

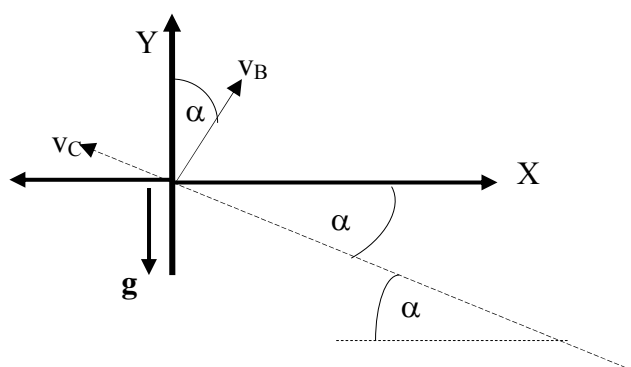


Fig.3

Las ecuaciones de la bola son:

$$x_B = (v_B \operatorname{sen} \alpha - v_C \operatorname{cos} \alpha)t \quad ; \quad y_B = (v_B \operatorname{cos} \alpha + v_C \operatorname{sen} \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Si el carrito recorre sobre el plano inclinado una distancia l en un tiempo t , resulta:

$$l = -v_C t + \frac{1}{2}g \operatorname{sen} \alpha t^2$$

Y las coordenadas de esa posición respecto del sistema XY de la figura 3 (condiciones de ligadura).

$$x_C = l \operatorname{cos} \alpha = -v_C \operatorname{cos} \alpha \cdot t + \frac{1}{2}g \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_C = -l \operatorname{sen} \alpha = v_C \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2}g \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot t^2$$

Para un ángulo $\alpha = 45^\circ$

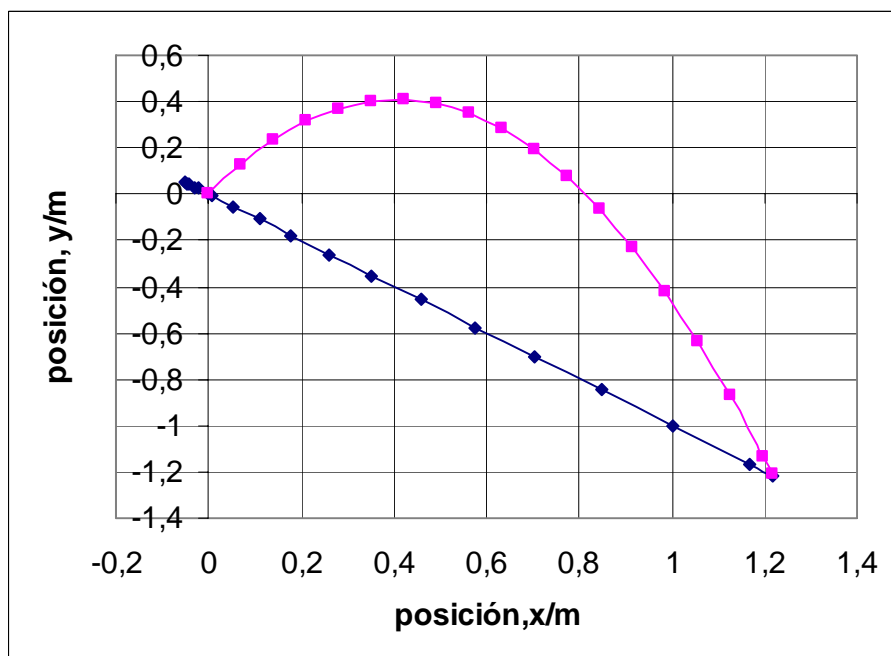
$$x_B = (3 \cdot \operatorname{sen} 45 - 1 \cdot \operatorname{cos} 45)t = 1,41t \quad ;$$

$$y_B = (3 \cdot \operatorname{cos} 45 + 1 \cdot \operatorname{sen} 45)t - 4,9t^2 = 2,83t - 4,9t^2$$

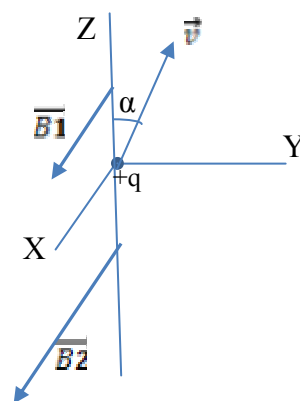
$$x_C = -1 \cdot \operatorname{cos} 45 \cdot t + 4,9 \cdot \operatorname{cos} 45 \operatorname{sen} 45 t^2 = -0,707t + 2,45t^2$$

$$y_C = 1 \cdot \operatorname{sen} 45 \cdot t - 4,9 \cdot \operatorname{sen}^2 45 t^2 = 0,707t - 2,45t^2$$

Las posiciones de las trayectorias de la bola y del carrito están en la gráfica siguiente



233.- Una partícula de masa m y carga $+q$ se encuentra en el instante inicial sobre el eje Y , formando su velocidad un ángulo α respecto del eje Z . En el semiplano superior YZ existe un campo magnético uniforme B_1 dirigido según el eje positivo X y en el semiplano inferior un campo magnético B_2 también dirigido en el sentido positivo del eje X , siendo $B_2 > B_1$. Se pide estudiar el movimiento de la partícula a partir del instante inicial.



La partícula al penetrar en el campo B_1 sufre una fuerza perpendicular a su velocidad que modifica su dirección, pero no su módulo, de valor:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}_1$$

La velocidad \vec{v} y el campo \vec{B}_1 forman un ángulo de 90° , por lo que se puede escribir

$$F_1 = qvB_1 = m \frac{v^2}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{mv}{qB_1}$$

La partícula describe un arco de circunferencia OQ (figura 1) con velocidad constante. Al llegar a Q penetra en el campo magnético B_2 y describe otro arco de circunferencia QP de radio

$$F_2 = qvB_2 = m \frac{v^2}{R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{mv}{qB_2} ; R_1 > R_2$$

Al llegar a P se repite la situación de O y a partir de este momento el movimiento se repite de forma periódica.

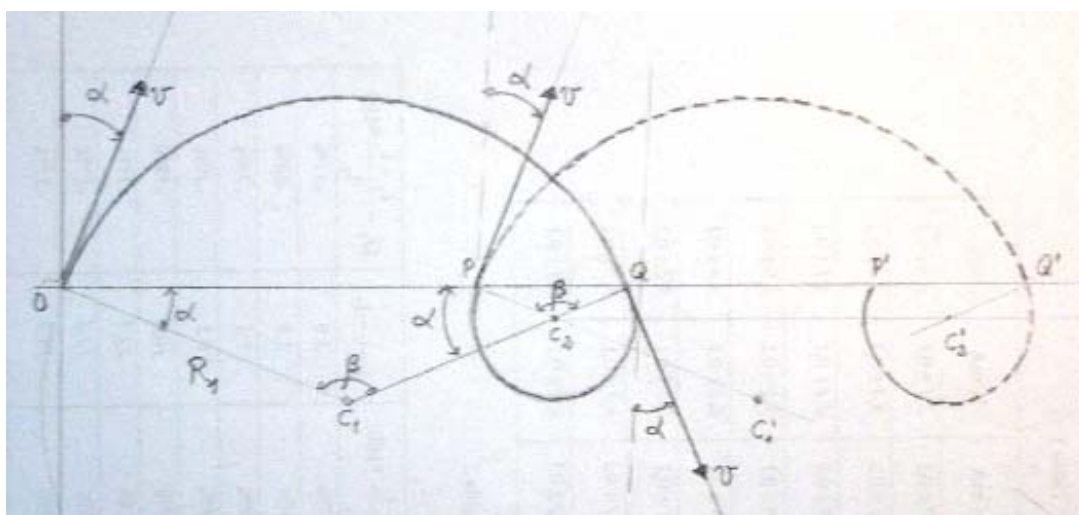


Fig.1

Vamos a calcular el periodo del movimiento. Determinamos primero el tiempo t_1 que emplea la partícula en ir desde O hasta Q .

La longitud del arco OQ vale recordando que el arco es igual al ángulo abarcado, expresado en radianes, por el radio.

$$L_{OQ} = \beta R_1$$

Del triángulo OC₁Q

$$2\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \beta = \pi - 2\alpha \Rightarrow L_{OQ} = (\pi - 2\alpha)R_1$$

Teniendo en cuenta que el arco OQ se recorre con velocidad constante

$$t_1 = \frac{L_{OQ}}{v} = \frac{(\pi - 2\alpha)R_1}{v}$$

Calculamos ahora el tiempo que emplea la partícula en recorrer el arco QP,. Utilizamos el razonamiento anterior

$$L_{QP} = (2\pi - \beta)R_2 = (2\pi - \pi + 2\alpha)R_2 \Rightarrow t_2 = \frac{(\pi + 2\alpha)R_2}{v}$$

El periodo T del movimiento

$$T = t_1 + t_2 = \frac{(\pi - 2\alpha)R_1 + (\pi + 2\alpha)R_2}{v} = \frac{\pi(R_1 + R_2) - 2\alpha(R_1 - R_2)}{v}$$

La velocidad media con que la partícula recorre el segmento OP es:

$$v_m = \frac{OP}{T} = \frac{OQ - PQ}{T} = \frac{2R_1 \cos \alpha - 2R_2 \cos \alpha}{\frac{\pi(R_1 + R_2) - 2\alpha(R_1 - R_2)}{v}} = \frac{2v \cos \alpha (R_1 - R_2)}{\pi(R_1 + R_2) - 2\alpha(R_1 - R_2)}$$

Expresamos los radios en función de los campos magnéticos

$$R_1 - R_2 = \frac{mv}{q} \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} \right) = \frac{mv}{q} \left(\frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \right); \quad R_1 + R_2 = \frac{mv}{q} \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) = \frac{mv}{q} \left(\frac{B_2 + B_1}{B_1 B_2} \right)$$

Llevando estas relaciones a la velocidad media:

$$v_m = \frac{2v \cos \alpha \frac{mv}{q} \left(\frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \right)}{\pi \frac{mv}{q} \left(\frac{B_1 + B_2}{B_1 B_2} \right) - 2\alpha \frac{mv}{q} \left(\frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \right)} = \frac{2v \cos \alpha (B_2 - B_1)}{\pi(B_1 + B_2) - 2\alpha(B_2 - B_1)}$$

234.-Una esfera de radio r expuesta a la radiación solar es capaz de absorberla íntegramente. Se pide el radio de dicha esfera si se cumple que la fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y la esfera se equilibra con la fuerza de presión de la radiación solar.

Datos Potencia radiada por el Sol $P_s=4.10^{26}$ W, densidad de la esfera 10^3 kg/m³, Constante de Gravitación Universal $G = 6,67.10^{-11}$ N.m²/kg² ; Masa del Sol $=1,99.10^{30}$ kg.

La luz está formada por fotones, partículas sin masa, con energía y con momento, existiendo entre estas dos últimas magnitudes la relación:

$$E = pc \quad (1)$$

Por consiguiente al absorber la esfera energía procedente de la radiación solar “absorbe” momento lineal, esto es, cambia el momento y ese cambio de momento origina una fuerza que se denomina de presión de la radiación.

El Sol lanza al espacio de forma uniforme una energía por unidad de tiempo de valor P_s . Si la esfera se encuentra a una distancia R del Sol, la energía que le llega por unidad de tiempo y unidad de superficie es:

$$P_B = \frac{P_s}{4\pi R^2}$$

La superficie de la esfera que absorbe la radiación es πr^2 , tal como puede deducirse de la figura 1.

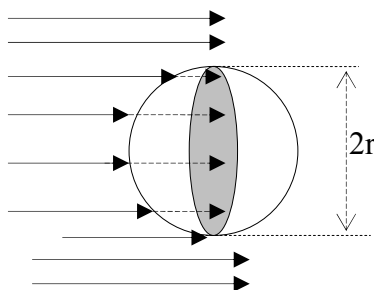


Fig.1

La energía que por unidad de tiempo absorbe la esfera de superficie $S = \pi r^2$ es:

$$E_B = P_B \cdot S = \frac{P_s}{4\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \frac{P_s \cdot r^2}{4 R^2}$$

Simultáneamente con esa absorción de energía se produce una variación por unidad de tiempo en el momento lineal de la radiación, de acuerdo con la ecuación (1), y precisamente esa variación por unidad de tiempo del momento lineal, es la fuerza de la radiación

$$c \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{P_s r^2}{4R^2} \Rightarrow F_B = \frac{P_s r^2}{4c R^2}$$

La fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y la esfera es:

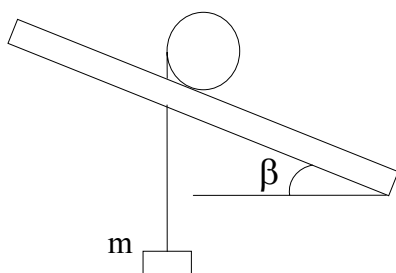
$$F_g = \frac{GM_s m_b}{R^2} = \frac{GM_s \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_B}{R^2}$$

Igualando ambas fuerzas:

$$F_g = \frac{P_s r^2}{4cR^2} = \frac{GM_s \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_B}{R^2} \Rightarrow \frac{P_s}{4c} = GM_s \cdot \frac{4}{3}\pi r \rho_B \Rightarrow r = \frac{3P_s}{16\pi G M_s c \rho_B} \Rightarrow$$

$$r = \frac{3 \cdot 4 \cdot 10^{26}}{16\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^3} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

235.-Un cilindro macizo de masa M y radio R está situado sobre un plano inclinado que forma con la horizontal un ángulo β . Lleva enrollada una cuerda de masa despreciable y en el extremo libre de la misma se ha colocado una masa $m = \frac{M}{4}$ (ver figura). Dicha cuerda pasa por una rendija que posee el plano inclinado a lo largo del mismo. Se supone que el rozamiento entre el cilindro y el plano es $\mu=0,3$, que la cuerda no desliza sobre el cilindro y que no existe ningún otro tipo de rozamiento. Determinar el movimiento del cilindro de modo que éste rueda pero no deslice por el plano inclinado.



Admitimos de entrada para el sentido del movimiento, que la masa m se desplaza en dirección vertical y hacia arriba o que el cilindro rueda hacia abajo del plano inclinado, las fuerzas que actúan sobre el sistema son las indicadas en la figura 1.

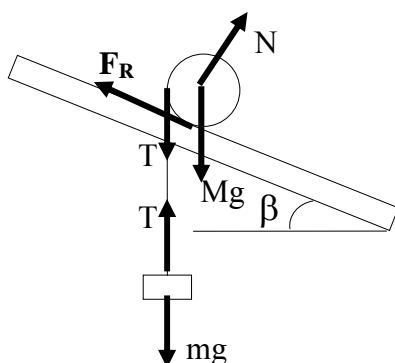


Fig.1

El hilo no desliza por la garganta del cilindro y en consecuencia la aceleración de la masa m suspendida, es la misma que la aceleración tangencial de la periferia de éste. A su vez, por rodar el cilindro por el plano inclinado, se cumple que la aceleración de su c.d.m. es igual a la angular por el radio del cilindro y en consecuencia la aceleración de la masa m , es la misma que la del c.d.m. del cilindro.

Con estas consideraciones, las ecuaciones de la Dinámica aplicadas al sistema, respecto de unos ejes situados en el plano inclinado son las siguientes *:

$$T \operatorname{sen} \beta + Mg \operatorname{sen} \beta - F_R = Ma \quad (1)$$

$$F_R R - TR = I \alpha \quad (2)$$

$$T - mg = ma \quad (3)$$

$$a = \alpha R \quad (4)$$

De (3) despejamos T , y de (2) F_R , y llevamos estos valores a (1).

$$T = mg + ma ; F_R = \frac{I \alpha}{R} + T = \frac{\frac{1}{2} MR^2 \cdot \frac{a}{R}}{R} + mg + ma = a \left(\frac{1}{2} M + m \right) + mg \Rightarrow$$

$$m(g+a) \operatorname{sen} \beta + Mg \operatorname{sen} \beta - a \left(\frac{1}{2} M + m \right) - mg = Ma$$

Operando en la última ecuación:

$$Mg \operatorname{sen} \beta - mg + mg \operatorname{sen} \beta = a \left(M + \frac{1}{2} M + m - m \operatorname{sen} \beta \right) \Rightarrow a = \frac{(M+m) \operatorname{sen} \beta - m}{\frac{3}{2} M + m(1 - \operatorname{sen} \beta)} g$$

Según el enunciado $M=4m$, luego la aceleración es igual a:

$$a = \frac{5m \operatorname{sen} \beta - m}{7m - m \operatorname{sen} \beta} g = \frac{5 \operatorname{sen} \beta - 1}{7 - \operatorname{sen} \beta} g$$

La aceleración en el sentido del movimiento, esto es, rodando hacia abajo del plano, es positiva:

$$a > 0 \Rightarrow \frac{5 \operatorname{sen} \beta - 1}{7 - \operatorname{sen} \beta} g > 0 \Rightarrow 5 \operatorname{sen} \beta - 1 > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \beta > \frac{1}{5} \Rightarrow \beta > 11,5^\circ$$

La condición encontrada es que el ángulo del plano sea mayor de $11,5^\circ$, ahora bien, la fuerza de rozamiento tiene un valor límite superior, de modo que $F_R < \mu N$.

Determinemos el valor de N de la figura 1, se deduce:

$$\begin{aligned} N - T \cos \beta - Mg \cos \beta &= 0 \Rightarrow N = T \cos \beta + Mg \cos \beta = m(g+a) \cos \beta + 4mg \cos \beta \Rightarrow \\ &\Rightarrow N = m \cos \beta (5g+a) \Rightarrow F_R < \mu m \cos \beta (5g+a) \end{aligned}$$

Sustituimos la fuerza de rozamiento y la aceleración por sus valores

$$\begin{aligned} F_R &= a \left(\frac{1}{2} M + m \right) + mg = 3ma + mg \Rightarrow 3ma + mg < \mu m \cos \beta (5g+a) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3a + g < \mu \cos \beta (5g+a) \Rightarrow \frac{3a+g}{\cos \beta (5g+a)} < \mu \end{aligned}$$

En la última ecuación se sustituye la aceleración por su valor:

$$\mu > \frac{3 \frac{5 \operatorname{sen} \beta - 1}{7 - \operatorname{sen} \beta} g + g}{\cos \beta \left(5g + \frac{5 \operatorname{sen} \beta - 1}{7 - \operatorname{sen} \beta} g \right)} = \frac{\frac{14 \operatorname{sen} \beta + 4}{7 - \operatorname{sen} \beta}}{\frac{5 \cos \beta (7 - \operatorname{sen} \beta) + (5 \operatorname{sen} \beta - 1) \cos \beta}{7 - \operatorname{sen} \beta}} \Rightarrow \mu > \frac{14 \operatorname{sen} \beta + 4}{34 \cos \beta}$$

Según el enunciado $\mu=0,3$

$$0,3 > \frac{14 \operatorname{sen} \beta + 4}{34 \cos \beta} \Rightarrow 10,2 \cdot \cos \beta > 14 \operatorname{sen} \beta + 4$$

En la inecuación damos valores al ángulo β , hasta encontrar aquel para el que la inecuación ya no se verifica

$\beta/^\circ$	$10,2 \cdot \cos \beta$	$14 \operatorname{sen} \beta + 4$
22	9,457	9,244
22,5	9,424	9,358
22,7	9,410	9,403
22,8	9,403	9,425

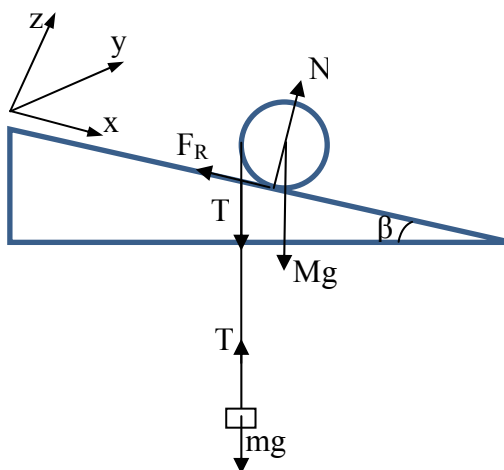
El ángulo β está comprendido entre: $22,7^\circ < \beta < 22,8^\circ$

La consecuencia es que el cilindro rueda para valores menores de $22,8^\circ$. Si $\beta \geq 22,8^\circ$ la aceleración es positiva, el cilindro rueda hacia abajo y si $\beta \leq 22,7^\circ$ es negativa, el cilindro rueda hacia arriba del plano inclinado.

** Las ecuaciones (1) a (4) se han escrito en forma escalar. la justificación vectorial de dichas ecuaciones se hace a continuación:*

El hilo no desliza por la garganta del cilindro y en consecuencia la aceleración de la masa m suspendida, es la misma que la aceleración tangencial de la periferia de éste. A su vez, al rodar el cilindro por el plano inclinado, se cumple que la aceleración de su c.d.m. $\vec{a} = -\vec{\alpha} \times \vec{R}$. Consecuentemente la aceleración en módulo de la masa m , es la misma que la del c.d.m. del cilindro.

Con estas consideraciones, las ecuaciones de la Dinámica aplicadas al sistema, respecto de unos ejes (triedro a derechas) situados en el plano inclinado son las siguientes:



En la masa M .

$$\sum F_x = T \operatorname{sen} \beta + Mg \operatorname{sen} \beta - F_R = Ma$$

$$\sum F_z = N - T \cos \beta - Mg \cos \beta = 0$$

En la masa m .

$$\sum F_z = T \cos \beta - mg \cos \beta = m \cdot a \cos \beta \quad \rightarrow \quad T = mg + ma$$

Por rodar, la aceleración del c.d.m. tiene sentido contrario a

$$\vec{a} \times \vec{R} : \vec{a} = a\vec{i} = -\vec{a} \times \vec{R} = -(-aR\vec{i}) = aR\vec{i}.$$

$$a = \alpha \cdot R \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

$$\sum \text{Momentos} = F_R \cdot R - T \cdot R = I \cdot \alpha; \quad F_R \cdot R = I \alpha + T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \frac{a}{R} + (mg + ma)R$$

$$F_R = \left(\frac{1}{2}M + m\right)a + mg$$