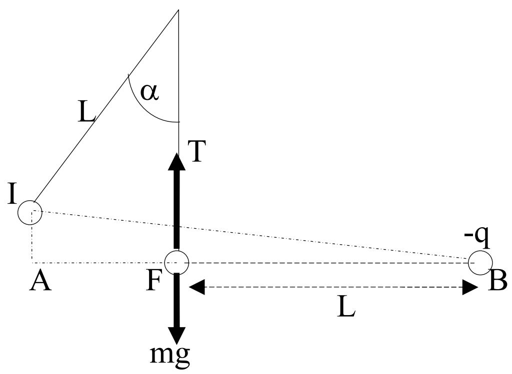
PROBLEMAS VARIADOS 7

***236**.- Un péndulo simple de longitud L=1 m, lleva en su extremo una masa m= 5 g, con una carga +q=10^{-6}C. Inicialmente se encuentra separado de su posición vertical por un ángulo α y con velocidad cero. A una distancia L, medida en dirección horizontal, de la posición más baja del péndulo está situada una carga fija -q. a) Calcular la tensión de la cuerda cuando la masa m pasa por la posición más baja. b) Calcular el valor numérico de T si α = 45º. c) Calcular el valor de α si T = 3/2 mg.*
La aceleración de la gravedad es g=10 m/s^2.

a) Cuando el péndulo pasa por la posición más baja, la tensión T de la cuerda sostiene el peso de la masa m y proporciona la fuerza centrípeta.



$$T = mg + m\frac{v^2}{L}$$

Para calcular la velocidad v que lleva la masa m al pasar por la posición más baja, considerando que el campo gravitatorio y el electrostático son conservativos, aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica, entre la posición inicial I y la posición más baja F. Tomamos como referencia nula de la energía potencial gravitatoria la posición F.

En la posición I, la energía de la masa m es potencial y electrostática

$$E_I = mg\,\overline{IA} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q\cdot(-q)}{IB} = mg(L - L\cos\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{\sqrt{IA^2 + AB^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_I = mgL(1-\cos\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{\sqrt{[L(1-\cos\alpha)]^2 + (AF + L)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_I = mgL(1-\cos\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{\sqrt{[L(1-\cos\alpha)]^2 + (L\,\mathrm{sen}\,\alpha + L)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_I = mgL(1-\cos\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o L}\frac{q^2}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + (1+\mathrm{sen}\,\alpha)^2}}$$

En la posición F, las energías de la masa m son cinética y potencial electrostática

$$E_F = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{L}$$

Del principio de conservación de la energía.

$$E_F = E_I \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{L} = mgL(1-\cos\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{L\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + (1+\operatorname{sen}\alpha)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{L} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{L^2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + (1+\operatorname{sen}\alpha)^2}}\right] + 2mg(1-\cos\alpha)$$

La tensión de la cuerda es:

$$T = mg + \frac{mv^2}{L} = mg + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{L^2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + (1+\operatorname{sen}\alpha)^2}}\right] + 2mg(1-\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$T = mg(3-2\cos\alpha) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{L^2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + (1+\operatorname{sen}\alpha)^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = mg(3-2\cos\alpha) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{L^2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = mg(3-2\cos\alpha) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{L^2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)}}\right]$$

b)
$$T = 7{,}93.10^{-2} + 9.10^9 \cdot 2 \cdot \left(10^{-6}\right)^2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}45 - \cos 45)}}\right] = 7{,}93.10^{-2} + 7{,}61.10^{-3} \Rightarrow$$

$$T = 8{,}69.10^{-2}\ \mathrm{N}$$

c)
$$\frac{\frac{3}{2}mg - mg(3-2\cos\alpha)}{18.10^{-3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)}} \Rightarrow$$

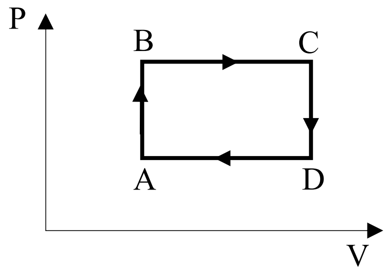
$$\frac{2\cos\alpha \cdot mg - \frac{3}{2}mg}{18.10^{-3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)}} = 1 - \frac{0{,}1\cos\alpha - 0{,}075}{18.10^{-3}} \Rightarrow \text{La}$$

$$\frac{0{,}018}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)}} + 0{,}1\cos\alpha = 0{,}093$$

última ecuación se resuelve por tanteo

α=33º	0,095 > 0,093
α=34º	0,094 > 0,093
α=35º	0,093 = 0,093

237.- Un gas ideal realiza el ciclo indicado en la figura inferior.



La presión P_B=2P_A, V_D=2V_A. El coeficiente adiabático del gas es: γ=7/5.
a) Calcular el rendimiento del ciclo. b) Calcular el calor evacuado durante el ciclo.

a) El rendimiento del ciclo es el cociente entre el trabajo efectuado y el calor suministrado

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_S|}$$

El trabajo efectuado corresponde numéricamente al área encerrada por el ciclo

$$W = (V_D - V_A)\cdot(P_B - P_A) = V_A P_A = nRT_A$$

Con el convenio de signos empleado (calor y trabajo positivos los recibe el sistema, calor y trabajo negativos los cede el sistema) ese trabajo debe ir precedido de signo negativo.

Calculamos las temperaturas en A, B, C, y D.

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} \Rightarrow \quad T_B = \frac{P_B V_B}{P_A V_A} T_A = \frac{2P_A V_A}{P_A V_A} T_A = 2T_A$$

$$\frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_C V_C}{T_C} \Rightarrow \quad T_C = \frac{P_C V_C}{P_B V_B} T_B = \frac{2V_A}{V_A} 2T_A = 4T_A$$

$$\frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_D V_D}{T_D} \Rightarrow \quad T_D = \frac{P_D V_D}{P_C V_C} T_c = \frac{P_A V_A}{P_A V_A} 2T_A = 2T_A$$

Observando las temperaturas se deduce que el calor absorbido se hace de A a B y de B a C.

$$Q_S = n C_V (T_B - T_A) + nC_P (T_C - T_B) = n C_V T_A + nC_P\, 2T_A$$

$$\eta = \left|\frac{W}{Q_S}\right| = \frac{nRT_A}{nT_A(C_V + 2C_P)} = \frac{R}{C_V + 2C_P} = \frac{C_P - C_V}{C_V + 2C_P} = \frac{\frac{C_P}{C_V} - 1}{1 + 2\frac{C_P}{C_V}} = \frac{\gamma - 1}{1 + 2\gamma} = \frac{2}{19}$$

b) El calor cedido se verifica desde C a D y de D a A.

$$Q_E = n C_V (T_D - T_C) + n C_P (T_A - T_D) = -n C_V \cdot 2T_A - nC_P\ T_A = -nT_A (C_P + 2C_V)$$

El signo negativo indica que el calor sale del sistema.

238.- Un hilo conductor tiene forma de polígono regular con n lados. Está inscrito sobre una circunferencia de radio R y recorrido por una corriente continua de intensidad I. a) Calcular el módulo de campo magnético creado por el conductor en el centro de la circunferencia. b) Hallar el valor del módulo del campo cuando n tiende a infinito.

a) Designamos con L=AB, a la longitud de uno de los lados del polígono. El vector $\vec{dB}$ creado por un elemento de corriente, situado en uno de los lados del polígono es perpendicular al plano que contiene a la circunferencia y saliente hacia el lector, como se puede deducir de la ley de Biot-Savart. Por ser todos los vectores campo magnético de cada uno de los lados, de la misma dirección y sentido, el módulo del vector campo magnético debido a los n lados del polígono, es igual al de un lado multiplicado por el número de lados.

En la figura 1 hemos representado uno de los lados del polígono, el AB=L, y sobre él hemos considerado un elemento de corriente cuya longitud es dx y que dista x=MN del punto M (punto central del lado AB), situado a una distancia **a** de O.

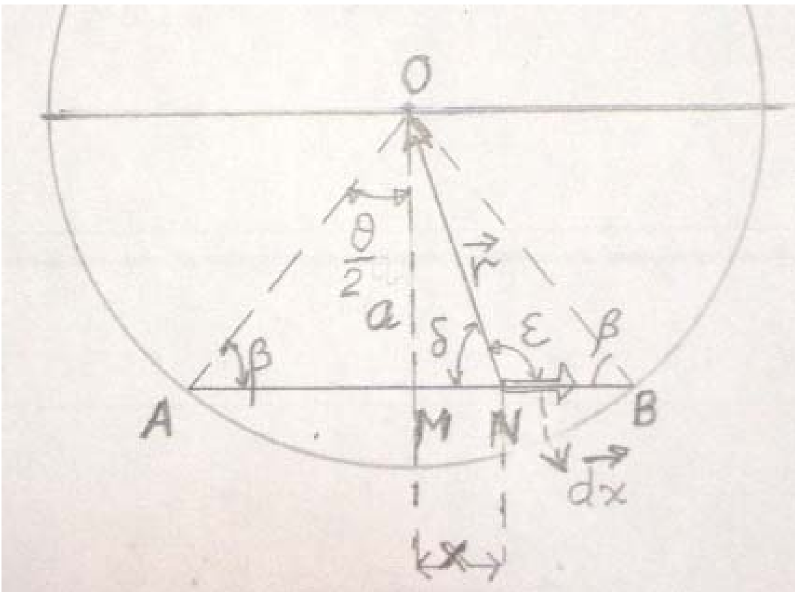


Fig. 1

De acuerdo con la ley de Biot-Savart el vector campo creado por ese elemento de corriente en el centro de la circunferencia vale:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_O I}{4\pi}\frac{d\vec{x} \times \vec{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_O I}{4\pi}\frac{dx \cdot r \cdot \operatorname{sen}\varepsilon}{r^3} = \frac{\mu_O I}{4\pi}\frac{dx \cdot \operatorname{sen}\varepsilon}{r^2} \quad (1)$$

De la figura 1 se deduce que x, r y ε son variables. Vamos a tratar de relacionarlas entre sí.

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}(\pi-\varepsilon) = \frac{a}{r} \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\operatorname{sen}(\pi-\varepsilon)}; \qquad \cos\delta = \cos(\pi-\varepsilon) = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r\cos(\pi-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow x = \frac{a\cdot\cos(\pi-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(\pi-\varepsilon)} = \frac{\sqrt{R^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}\cdot\cos(\pi-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(\pi-\varepsilon)} = \frac{\sqrt{4R^2-L^2}\cos(\pi-\varepsilon)}{2\ \operatorname{sen}(\pi-\varepsilon)} \Rightarrow$$

Diferenciando la ecuación : $dx = \frac{dx}{d\varepsilon}d\varepsilon$ resulta :

$$dx = -\frac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2(\pi-\varepsilon)+\cos^2(\pi-\varepsilon)}{\operatorname{sen}^2(\pi-\varepsilon)}d\varepsilon = -\frac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2\ \operatorname{sen}^2(\pi-\varepsilon)}d\varepsilon$$

Llevando los valores de dx y r a la ecuación (1) resulta:

$$dB = -\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\frac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2\ \operatorname{sen}^2(\pi-\varepsilon)}}{\frac{a^2}{\operatorname{sen}^2(\pi-\varepsilon)}}\cdot(\operatorname{sen}\varepsilon)d\varepsilon = -\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2a^2}(\operatorname{sen}\varepsilon)d\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dB = -\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2\left(\frac{4R^2-L^2}{4}\right)}(\operatorname{sen}\varepsilon)d\varepsilon \quad \Rightarrow \quad dB = -\frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{4R^2-L^2}}\cdot\operatorname{sen}\varepsilon\, d\varepsilon$$

Ahora, la ecuación anterior solamente tiene la variable ε. Para evaluar la contribución al módulo del campo magnético, del lado AB = 2 AM = 2 MB, integramos, situando un 2 delante, para que nos permita variar el ángulo ε desde π/2 hasta β; ver fig.1:

$$B_{AB} = -2\frac{\mu_O I}{2\pi\sqrt{4R^2-L^2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta}\operatorname{sen}\varepsilon\ d\varepsilon = -\frac{\mu_O I}{\pi\sqrt{4R^2-L^2}}\left[-\cos\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} = \frac{\mu_O I}{\pi\sqrt{4R^2-L^2}}\cos\beta$$

De la figura 1 se deduce que $\cos\beta = \frac{\frac{L}{2}}{R} = \frac{L}{2R}$ y $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{L}{2}}{R} \Rightarrow L = 2R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

$$B_{AB}=\frac{\mu_o I}{\pi\sqrt{4R^2-L^2}}\cdot\frac{L}{2R}=\frac{\mu_o I}{\pi\sqrt{4R^2-4R^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\cdot\frac{2R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{2R}\Rightarrow$$

$$B_{AB}=\frac{\mu_o I}{\pi 2R\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=\frac{\mu_o I\cdot\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\pi 2R\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\mu_o I\cdot\operatorname{tag}\frac{\theta}{2}}{2\pi R}$$

Si el polígono tiene n lados se cumple que $\theta=\frac{2\pi}{n}$ y además el campo magnético debido a todo el polígono es, B_{total} = n B_{AB}.

$$B_{total}=n\frac{\mu_o I}{2\pi R}\operatorname{tag}\frac{\pi}{n}$$

b) Si n tiende a infinito el polígono tiende a formar una circunferencia y el campo vale.

$$B_C=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\mu_o I}{2\pi R}\operatorname{tag}\frac{\pi}{n}\right]=\frac{\mu_o I}{2\pi R}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\operatorname{tag}\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\right]$$

Aplicando la regla de L´Hopital

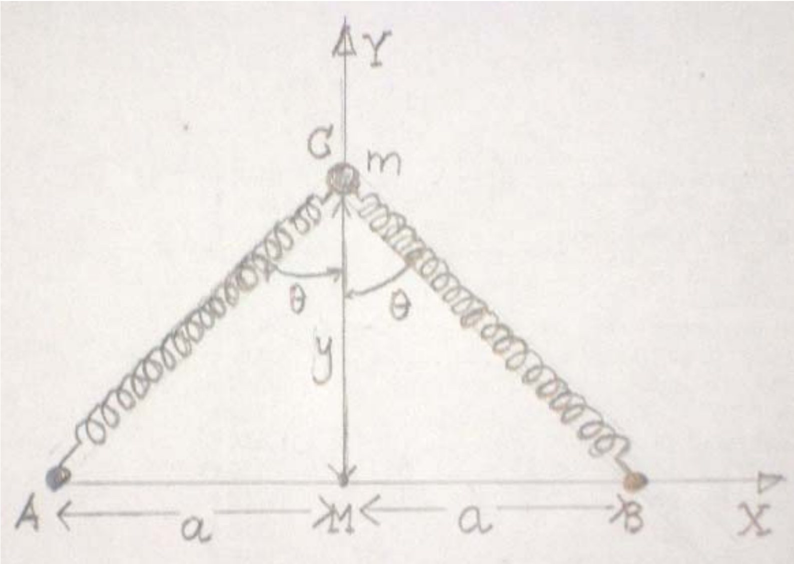
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\operatorname{tag}\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\cdot\left(-\frac{\pi}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}\right]=\pi$$

Sustituyendo en la ecuación anterior resulta:

$$B_C=\frac{\mu_o I}{2R}$$

Ecuación que corresponde, como es lógico, al campo magnético creado por una espira circular, recorrida por una corriente de intensidad I, en el centro de la misma.

239.- En la figura inferior la masa m está unida a dos muelles iguales cuya constante elástica es k. Los muelles están sujetos firmemente en las posiciones A y B y el conjunto se apoya sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Cuando la masa m se encuentra en la posición M los dos muelles tienen su longitud natural (a en la figura), esto es, ni estirados ni contraídos.



Cuando la masa m se encuentra en la posición C.
a) Calcular la fuerza con que actúan los muelles sobre dicha masa.
b) Calcular la energía potencial elástica de la masa m.
c) Evaluar el trabajo que ha de realizarse para llevar la masa m desde la posición M a la C.

a) Sobre la masa m el muelle de la izquierda actúa con una fuerza cuyo módulo es:

$$F_I = k\,\Delta l$$

Siendo Δl el aumento de longitud del muelle de la izquierda respecto de su longitud natural a.

$$\Delta l = \sqrt{a^2 + y^2} - a \quad \Rightarrow \quad F = k\left(\sqrt{a^2 + y^2} - a\right)$$

El vector $\vec{F}_I$ tiene dos componentes que son:

$$\vec{F}_I = -k\left(\sqrt{a^2 + y^2} - a\right)\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} - k\left(\sqrt{a^2 + y^2} - a\right)\cos\theta\,\vec{j}$$

El muelle de la derecha tiene dos componentes sobre los ejes que son:

$$\vec{F}_D = +k\left(\sqrt{a^2 + y^2} - a\right)\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} - k\left(\sqrt{a^2 + y^2} - a\right)\cos\theta\,\vec{j}$$

Luego la fuerza resultante es:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_I + \vec{F}_D = -2k\left(\sqrt{a^2+y^2} - a\right)\cos\theta\,\vec{j} = -2k\left(\sqrt{a^2+y^2} - a\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\,\vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_R = -2\,k\,y\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)\cdot\vec{j}$$

b) La energía potencial almacenada por cada uno de los muelles vale

$$E_P = \frac{1}{2}k\,\Delta l^2 = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{a^2+y^2} - a\right]^2 = \frac{1}{2}k\left(a^2 + y^2 + a^2 - 2a\sqrt{a^2+y^2}\right)$$

La energía potencial elástica del sistema es la suma de la correspondiente a cada muelle.

$$E_t = 2\left(\frac{1}{2}k\,\Delta l^2\right) = k\left[\sqrt{a^2+y^2} - a\right]^2 = k\left(2a^2 + y^2 - 2a\sqrt{a^2+y^2}\right) \quad (1)$$

c) La fuerza que actúa sobre la masa m es variable y depende de la distancia entre la posición de la masa m y el punto M. Designamos a esa distancia con λ, el trabajo elemental para desplazar la masa m una distancia dλ debe ser realizado por una fuerza igual y de sentido contrario a $\vec{F}_R$ que actúe a través de sucesivos estados de equilibrio con objeto de que no adquiera energía cinética:

$$dW = F_R\,\vec{j}\cdot d\lambda\,\vec{j} = 2k\lambda\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\right)d\lambda \;\Rightarrow\; W = 2k\int_0^y \lambda\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\right)d\lambda \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = 2k\int_0^y \lambda\,d\lambda - k\,a\int_0^y \frac{2\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\,d\lambda$$

Para resolver la segunda integral hacemos el cambio de variable:

$$p^2 = a^2 + \lambda^2 \Rightarrow 2\,p\,dp = 2\lambda\,d\lambda$$

Con lo que la integral queda:

$$-k\,a\int \frac{2\,p\,dp}{p} = -2\,k\,a\,p = -2\,k\,a\sqrt{a^2+\lambda^2}$$

Llevando a (2)

$$W = \left[2k\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^y - \left[2\,k\,a\sqrt{a^2+\lambda^2}\right]_0^y = k\,y^2 - \left[2\,k\,a\sqrt{a^2+y^2}\right] + 2\,k\,a^2 \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) valen igual, puesto que el trabajo realizado sobre el sistema se invierte en energía potencial elástica, ya que se trata del trabajo realizado contra una fuerza conservativa, y efectuado en sucesivos estados de equilibrio.

240.-Una partícula de masa en reposo $m(o)_1$ se desplaza con una velocidad $+v_1$ constante paralela al eje X de un sistema de referencia S. En este mismo sistema se encuentra, enfrente de la partícula anterior, otra de masa en reposo $m(o)_2$ con velocidad nula. Aplicando la teoría de la relatividad

a) Calcular la cantidad de movimiento de ambas partículas en el sistema S.

b) Calcular la energía de cada partícula respecto del sistema S

c) Calcular la velocidad del centro de masa del sistema formado por las dos partículas respecto de S

d) Calcular las velocidades de las partículas respecto del centro de masas.

e) Calcular las cantidades de movimiento de ambas partículas respecto del sistema ligado al centro de masas.

Utilizar las relaciones siguientes: $\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\gamma \;\; ; \;\; \dfrac{m(o)_2}{m(o)_1}=\mu$

a) La cantidad de movimiento en la teoría de la relatividad es: $\vec{p}=\gamma\, m\, \vec{v}$, siendo m la masa en reposo de la partícula

$$\vec{p}_1=\gamma\, m(o)_1\, \vec{v}_1 \;\; ; \;\; \vec{p}_2=\gamma\, m(o)_2\, \vec{v}_2=0$$

b) La ecuación de la energía según la teoría de la relatividad: $E=\gamma\, mc^2$. Para la partícula 2 que esta en reposo $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}}=1$

$$E_1=\gamma\, m(o)_1 c^2 \quad ; \quad E_2=\gamma\, m(o)_2 c^2=m(o)_2 c^2$$

c) Recurrimos a la ecuación de la velocidad del centro de masas

$$\vec{v}_{CM}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

Las masas que figuran en la ecuación anterior son las masas medidas en el sistema S

$$\vec{v}_{CM}=\frac{\gamma\, m(o)_1\, \vec{v}_1+\gamma\, m(o)_2\, \vec{v}_2}{\gamma\, m(o)_1+m(o)_2}=\frac{\gamma\, m(o)_1\, \vec{v}_1}{\gamma\, m(o)_1+m(o)_2}=\frac{\gamma\, \vec{v}_1}{\gamma+\dfrac{m(o)_2}{m(o)_1}}=\frac{\gamma\, \vec{v}_1}{\gamma+\mu}$$

d) La ecuación relativista que relaciona las velocidades medidas en dos sistemas es:

$$v'_x=\frac{v_x-V}{1-\dfrac{v_x V}{c^2}}$$

Aplicando la ecuación anterior, tenemos:

$$\left(v_1\right)_{CM}=\frac{v_1-v_{CM}}{1-\frac{v_1 v_{CM}}{c^2}}=\frac{v_1-\frac{\gamma v_1}{\gamma+\mu}}{1-\frac{v_1\frac{\gamma v_1}{\gamma+\mu}}{c^2}}=\frac{\frac{v_1\mu}{\gamma+\mu}}{1-\frac{v_1^2\gamma}{c^2(\gamma+\mu)}}=\frac{\frac{v_1\mu}{\gamma+\mu}}{\frac{c^2(\gamma+\mu)-v_1^2\gamma}{c^2(\gamma+\mu)}}=\frac{v_1\mu c^2}{\gamma\left(c^2-v_1^2\right)+\mu c^2}$$

Tenemos en cuenta que

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}=\gamma \quad\Rightarrow\quad \frac{c^2}{c^2-v_1^2}=\gamma^2 \quad\Rightarrow\quad c^2-v_1^2=\frac{c^2}{\gamma^2}$$

Sustituyendo en $\left(v_1\right)_{CM}$

$$\left(v_1\right)_{CM}=\frac{v_1\mu c^2}{\gamma\frac{c^2}{\gamma^2}+\mu c^2}=\frac{v_1\mu}{\frac{1}{\gamma}+\mu}=\frac{v_1\mu\gamma}{1+\mu\gamma}$$

Para la masa m_2.

$$\left(v_2\right)_{CM}=\frac{v_2-v_{CM}}{1-\frac{v_2 v_{CM}}{c^2}}=-\frac{\gamma v_1}{\gamma+\mu}$$

e) Aplicando la ecuación relativista de la cantidad de movimiento en su aspecto modular

$$\left(p_1\right)_{CM}=\gamma\ m(o)_1\cdot\left(v_1\right)_{CM}=\frac{m(o)_1}{\sqrt{1-\frac{\left[\left(v_1\right)_{CM}\right]^2}{c^2}}}\cdot\left(v_1\right)_{CM}=\frac{c\ m(o)_1}{\sqrt{c^2-\left[\frac{v_1\mu\gamma}{1+\mu\gamma}\right]^2}}\cdot\frac{v_1\mu\gamma}{1+\mu\gamma}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(p_1\right)_{CM}=\frac{c\,m(o)_1\,v_1\,\mu\gamma}{\sqrt{c^2(1+\mu\gamma)^2-\left(v_1\mu\gamma\right)^2}}=\frac{c\,m(o)_1\,v_1\,\mu\gamma}{\sqrt{c^2+c^2\mu^2\gamma^2+2c^2\mu\gamma-\mu^2\gamma^2 v_1^2}}=$$

$$=\frac{c\,m(o)_1\,v_1\,\mu\gamma}{\sqrt{c^2+\mu^2\gamma^2\left(c^2-v_1^2\right)+2c^2\mu\gamma}}=\frac{c\,m(o)_1\,v_1\,\mu\gamma}{\sqrt{c^2+\mu^2\gamma^2\frac{c^2}{\gamma^2}+2c^2\mu\gamma}}\Rightarrow$$

$$\left(p_1\right)_{CM}=\frac{m(o)_1\,v_1\,\mu\gamma}{\sqrt{1+\mu^2+2\mu\gamma}}$$

$$(p_2)_{CM} = \gamma\ m(o)_2 \cdot (v_2)_{CM} = \frac{m(o)_2}{\sqrt{1 - \frac{[(v_2)_{CM}]^2}{c^2}}} \cdot (v_2)_{CM} = \frac{c\ m(o)_2}{\sqrt{c^2 - \left[-\frac{\gamma v_1}{\gamma+\mu}\right]^2}} \cdot \left(-\frac{\gamma v_1}{\gamma+\mu}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_2)_{CM} = \frac{-c\, m(o)_2\ \gamma v_1}{\sqrt{c^2(\gamma+\mu)^2 - \gamma^2 v_1^2}} = \frac{-c\, m(o)_2\, \gamma v_1}{\sqrt{c^2\gamma^2 + c^2\mu^2 + c^2 2\gamma\mu - \gamma^2 v_1^2}} =$$

$$= \frac{-c\, m(o)_2\, \gamma v_1}{\sqrt{c^2\mu^2 + \gamma^2\left(c^2 - v_1^2\right) + 2c^2\gamma\mu}} = \frac{-c\, m(o)_2\, \gamma v_1}{\sqrt{c^2\mu^2 + \gamma^2 \frac{c^2}{\gamma^2} + 2c^2\mu\gamma}} \Rightarrow$$

$$(p_2)_{CM} = -\frac{m(o)_2\, \gamma v_1}{\sqrt{1+\mu^2+2\mu\gamma}}$$

Dado que la cantidad de movimiento es un vector podemos escribir

$$(\vec{p}_1)_{CM} = \frac{m(o)_1\, \mu\gamma}{\sqrt{1+\mu^2+2\mu\gamma}}\, \vec{v}_1 \quad ; \quad (\vec{p}_2)_{CM} = -\frac{m(o)_2\ \gamma}{\sqrt{1+\mu^2+2\mu\gamma}}\, \vec{v}_1$$

Como $m(o)_2 = \mu\, m(o)_1$, resulta que: $(\vec{p}_1)_{CM} + (\vec{p}_2)_{CM} = 0$.