PROBLEMAS VARIADOS 7

56.-Un automóvil recorre en línea recta una distancia L con velocidad uniforme v y a continuación frena hasta pararse con una aceleración a constante. Se pide determinar el valor de v, el cual determina que el tiempo empleado en el recorrido total del automóvil sea el mínimo posible.

Una apreciación intuitiva del problema nos dice que si v es muy grande, la longitud L la recorrerá en poco tiempo, pero necesitará un tiempo largo para frenar, por el contrario, si v es pequeña tardará mucho tiempo en recorrer la distancia L pero poco tiempo en frenar, esto quiere decir que habrá una velocidad v para la que el tiempo sea mínimo.

El tiempo que tarda en recorrer la distancia L es:

$$t_1 = \frac{L}{v}$$

El tiempo que tarda en frenar con aceleración a constante

$$v_{final} = 0 = v - at_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v}{a}$$

El tiempo total del recorrido:

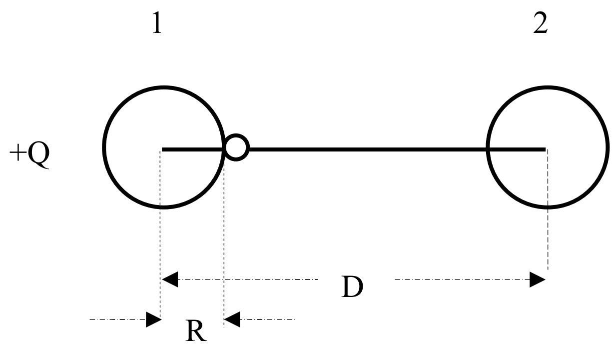
$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{v} + \frac{v}{a}$$

Como t ha de ser mínimo derivamos la expresión anterior respecto de v e igualamos a cero

$$\frac{dt}{dv} = 0 = \frac{-L}{v^2} + \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{v^2} = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{La}$$

57.- Dos esferas de radio R y carga +Q (la carga de cada esfera está distribuida uniformemente sobre su superficie), están separadas una distancia D>>R. Una de las esferas lleva adherida en su superficie una muy pequeña esfera de carga –q y masa m. Determinar qué velocidad mínima hay que comunicar a esa pequeña esfera para que se adhiera a la otra esfera.

La situación inicial está reflejada en la figura

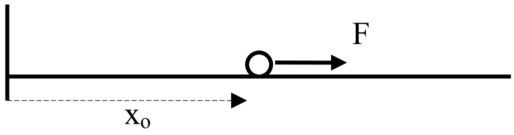


La esfera pequeña esta sometida a dos fuerzas de naturaleza eléctrica, una dirigida al centro de la esfera 1 y otra dirigida al centro de la esfera 2 . La primera fuerza es más intensa porque la distancia de la esfera uno a la esfera pequeña es R mientras que la de la esfera 2 es D-R>R. En consecuencia para despegar la esfera pequeña de la esfera 1 hemos de comunicarle una cierta velocidad, la cual nos bastará con que al llegar a la distancia D/2 tenga velocidad nula, ya que a partir de ese momento la atracción de la esfera 2 es mayor que la de la esfera 1.
Dado que los campos son conservativos establecemos la suma de la energía inicial (cinética + potencial eléctrica) y cuando la esfera pequeña esté en D/2 (energía cinética nula+energía potencial eléctrica)

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Qq}{R} - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Qq}{D-R} = 0 - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Qq}{\frac{D}{2}} - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Qq}{\frac{D}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Qq}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{D-R} - \frac{2}{D} - \frac{2}{D}\right) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Qq}{2m\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{D-R} - \frac{4}{D}\right)}$$

58.- Una partícula de masa m, se desplaza a lo largo del eje X. La mencionada partícula se encuentra, en el instante t=0, en la posición x_o con velocidad v_o y está sometida a una fuerza constante F dirigida como indica la figura.



Determinar v=f(t) y v=f(x)

Hacemos uso de la segunda ecuación de Newton

$$F = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \int F dt = \int m \; dv \quad \Rightarrow \quad Ft = mv + Cte$$

Para hallar la constate recurrimos a las condiciones iniciales, cuando t=0 , la velocidad es v_o, sustituyendo en la expresión anterior

$$0 = mv_o + Cte \quad \Rightarrow \quad Cte = -mv_o$$

$$Ft = mv - mv_0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Ft}{m} + v_o$$

Volviendo a la ecuación de Newton

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int F dx = \int mv \; dv \Rightarrow \quad Fx = m\frac{v^2}{2} + Cte$$

Según las condiciones iniciales cuando $x = x_o$, $v = v_o$

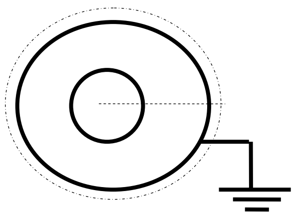
$$Fx_o = m\frac{v_o^2}{2} + Cte \quad \Rightarrow \quad Cte = Fx_o - m\frac{v_o^2}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$Fx = m\frac{v^2}{2} + Fx_o - m\frac{v_o^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2F(x - x_o)}{m} + v_o^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2F(x - x_o)}{m} + v_o^2}$$

59.- Una esfera metálica de radio R esta cargada a un potencial V. Calcular el potencial de la mencionada esfera si
a) Se rodea de una capa esférica, de radio R_2 y espesor despreciable, concéntrica con la esfera y se conecta a tierra. b) Si en lugar de unir la capa esférica a tierra se une a la esfera c) si se rodea de una capa esférica cuyo radio interior es R2 y el exterior R3 y la unimos a tierra.

a) Supongamos una superficie esférica exterior a la capa esférica de radio $r>R_2$



El potencial de la capa esférica es cero ya que está unida a tierra, $V_r=0$

Aplicamos el teorema de Gauss. El flujo eléctrico que atraviesa la superficie esférica de radio $r \geq R_2$ es:

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{\sum q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int -dV_r = \frac{\sum q}{4\pi\ \varepsilon_o}\int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{\sum q}{4\pi\ \varepsilon_o r} + Cte \Rightarrow \text{cuando } r = \infty \ , \quad V_r = 0 \rightarrow Cte = 0 \Rightarrow V_r = \frac{\sum q}{4\pi\ \varepsilon_o r} = 0$$

De la última expresión se deduce $\sum q = 0$, por lo que si la carga de la esfera es +Q la de la capa esférica es –Q.
Designamos con V_1 el potencial que tiene ahora la esfera y calculamos el campo en un lugar $R_1 \leq r \leq R_2$

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int -dV_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r} + Cte \Rightarrow \text{cuando } r = R_2 \ , \quad V_r = 0 \rightarrow Cte = -\frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r} - \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o R_2} \qquad (1)$$

Dado que la ecuación (1) la podemos aplicar cuando $r = R_1$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o R_1} \cdot R_1\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \quad \Rightarrow \quad V_1 = V\frac{R_2 - R_1}{R_2}$$

b) Si unimos la esfera a la capa esférica pasará carga de la esfera a la capa hasta que los potenciales se igualen. La carga Q inicial se reparte entre la esfera y la capa esférica

$Q = q_1+q_2$. Designamos con V_2 al nuevo potencial de la esfera.

Calculamos el campo en r, siendo r prácticamente igual a R_2 (como en la figura superior)

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{q_1+q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int -dV_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\int\frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

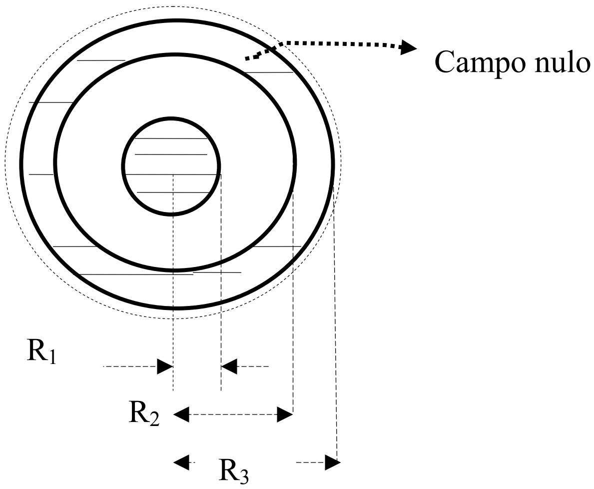
$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r} + Cte \Rightarrow \text{cuando } r = \infty, \quad V_r = 0 \rightarrow Cte = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r} \quad (2)$$

En al ecuación (2) cuando $r=R_2$, $Vr = V_2$, ya que los potenciales se igualan

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o R_2} = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o R_1}\frac{R_1}{R_2} = V\frac{R_1}{R_2}$$

c) En el interior de la capa esférica el campo es nulo ya que la mencionada capa es conductora.



Calculemos el campo en un lugar en que $R_2 \leq r \leq R_3$, esto es en el interior de la capa esférica donde el campo es nulo.

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E = \frac{\sum q}{4\pi\ r^2 \varepsilon_o} = 0 \Rightarrow \quad \sum q = 0$$

Como la carga de la esfera es Q sobre el interior de la capa esférica (radio R_2) aparece una carga –Q, y por influencia aparece en el exterior de la capa esférica una carga +Q.

Calculamos ahora el campo en un lugar donde $r>R_3$

$$E\cdot S=\frac{\sum q}{\varepsilon_o} \quad\Rightarrow\quad E=\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q-Q+Q}{r^2}=\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}=-\frac{dV_r}{dr}\Rightarrow\int -dV_r=\frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\int\frac{dr}{r^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r=\frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r}+Cte\Rightarrow \text{cuando } r=\infty,\quad V_r=0\rightarrow Cte=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r=\frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r}\quad (3)$$

En la expresión (3) cuando r = R_3 tenemos el potencial en la cara externa de la capa esférica y también la cara interna ya que al ser el campo nulo en su interior su potencial es constante.

Calculamos ahora el campo y el potencial en un lugar en que $R_1\le r\le R_2$ y siguiendo los pasos ya aplicados anteriormente obtenemos

$$V=\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{r}+Cte\quad (4)$$

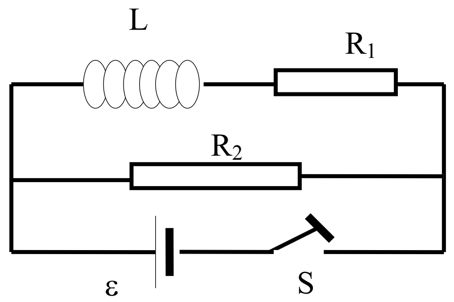
En la ecuación anterior cuando r =R_2 el potencial vale Vr de la ecuación (3) para r =R_3

$$\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{R_3}=\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{R_2}+Cte\quad\Rightarrow\quad Cte=\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right)$$

Volviendo a la ecuación (4) y aplicándola para r =R_1 y designando con V_3 al nuevo potencial

$$V_3=\frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=V-\frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)=V-\frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{R_3-R_2}{R_2R_3}\right)$$

60.- En el circuito de la figura inferior se ha cerrado el interruptor S y se ha establecido la corriente estacionaria. Si ahora se levanta el interruptor, queda desconectada la batería del circuito. Determinar a partir de ese instante, la cantidad de calor que se desprende en la resistencia R_2.



Cuando S está cerrado y se ha establecido la corriente estacionaria, y se tiene en cuenta que R_1 y R_2 están en paralelo, el valor de la intensidad que circula por la batería es
:

$$I=\frac{\varepsilon}{\sum R}=\frac{\varepsilon}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}=\frac{\varepsilon(R_1+R_2)}{R_1R_2}$$

La intensidad de la corriente que atraviesa la resistencia R_1 es: $I_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_1}$

La energía almacenada en la autoinducción es:

$$E = \frac{1}{2} L\, I_1^2$$

Al abrir S la energía almacenada en la autoinducción se transforma en energía térmica

en cada resistencia. Ahora las resistencias se encuentran en serie.

$$E = \frac{1}{2} L\, I_{1^o}^2 = E_1 + E_2$$

Las energías desprendidas en cada resistencia son proporcionales a sus valores

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2 \frac{R_1}{R_2}$$

$$E = \frac{1}{2} L\, I_1^2 = E_2 \frac{R_1}{R_2} + E_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} L \frac{\varepsilon^2}{R_1^2} = E_2 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \Rightarrow \quad E_2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 L R_2}{R_1^2 (R_1 + R_2)}$$

61.-La partícula Λ^o decae mediante la transformación

$$\boldsymbol{\Lambda^o \to p + \pi^-}$$

Si Λ^o se encuentra en reposo, determinar la energía cinética del pión.

Datos :Masas de las partículas

Λ^o = 1116 MeV/c^2 ; p = 938,3 MeV/c^2 ; p-= 139,6 MeV/c^2

Si la partícula Λ^o se encuentra en reposo quiere decir que la cantidad de movimiento del protón sumada a la del pión ha de ser cero, por tanto, ambas partículas tienen el mismo momento y se dirigen en la misma dirección y en sentido opuesto. Hacemos uso de la relación relativista

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = E_o^2 + p^2 c^2$$

Aplicándola al protón y al pión

$$\left(E^2 - E_o^2\right)_p = \left(p^2 c^2\right)_p \quad ; \quad \left(E^2 - E_o^2\right)_\pi = \left(p^2 c^2\right)_\pi$$

Al ser los momentos iguales

$$\left(E^2 - E_o^2\right)_p = \left(E^2 - E_o^2\right)_\pi \quad \Rightarrow \quad E_p^2 - E_\pi^2 = \left(E_o^2\right)_p - \left(E_o^2\right)_\pi = (938{,}3)^2 - (139{,}3)^2 \quad (1)$$

Aplicamos el principio de conservación de la energía

$$\left(E_o\right)_\lambda = E_p + E_\pi \quad \Rightarrow \quad E_p = \left(E_o\right)_\lambda - E_\pi = 1116 - E_\pi$$

Llevando esta ecuación a la (1)

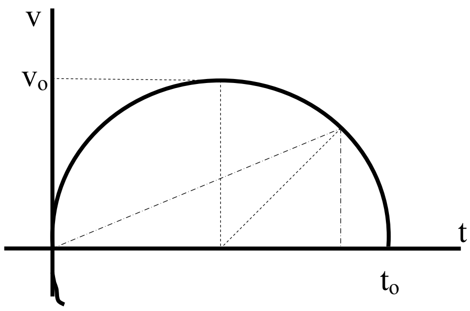
$$\left(1116 - E_\pi\right)^2 - E_\pi^2 = \left(938{,}3^2 - 139{,}6^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1116^2 + E_\pi^2 - 2\cdot 1116 E_\pi - E_\pi^2 = \left(938{,}3^2 - 139{,}6^2\right) \Rightarrow$$

$$E_\pi = \frac{1116^2 - \left(938{,}3^2 - 139{,}6^2\right)}{2\cdot 1116} = \left(E_c\right)_\pi + \left(E_\pi^o\right) \Rightarrow$$

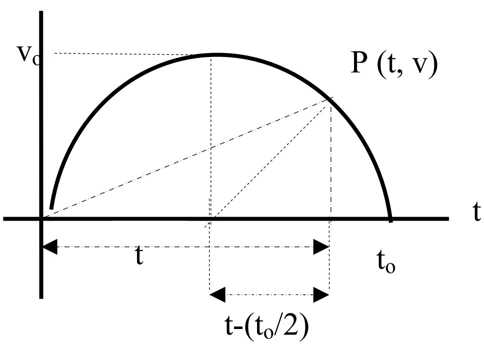
$$\left(E_c\right)_\pi = \frac{1116^2 - \left(938{,}3^2 - 139{,}6^2\right)}{2\cdot 1116} - 139{,}3 = 33 \text{ MeV}$$

62.- Una partícula se desplaza con una velocidad indicada por la semicircunferencia de la gráfica inferior. La máxima velocidad se indica por v_o. Determinar el desplazamiento efectuado por la partícula en función de v_o y t_o



Buscamos la relación entre la velocidad y el tiempo

El centro de la circunferencia tiene por coordenadas $\left(\frac{t_o}{2}, 0\right)$ y el radio de la circunferencia es $t_o/2$.



De la figura se deduce:

$$\left(t-\frac{t_o}{2}\right)^2+v^2=\left(\frac{t_o}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad t^2+\frac{t_o^2}{4}-tt_o+v^2=\frac{t_o^2}{4} \quad\Rightarrow\quad v^2=tt_o-t^2$$

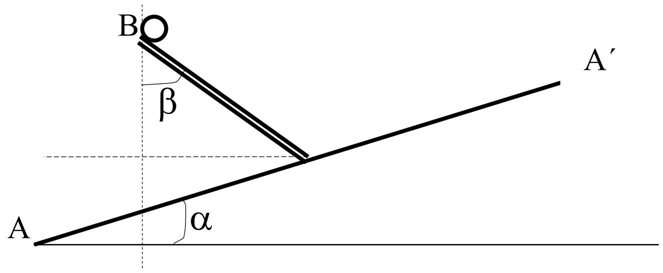
Aplicamos la ecuación anterior cuando $t=\frac{t_o}{2}$

$$v_o^2=\frac{t_o}{2}\cdot t_o-\left(\frac{t_o}{2}\right)^2=\frac{t_o^2}{4} \quad\Rightarrow\quad t_o=2v_o \quad (1)$$

El desplazamiento que sufre la partícula entre t=0 y $t=t_o$ es igual al área bajo la curva velocidad tiempo. Esa área vale:

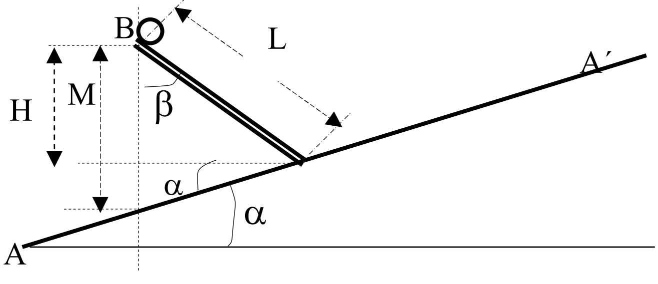
$$\Delta s=\frac{\pi\cdot\frac{t_o^2}{4}}{2}=\frac{\pi\ t_o\cdot t_o}{8}=\frac{\pi}{8}\cdot 2v_o\cdot t_o=\frac{\pi v_o t_o}{4}$$

63.- Un plano inclinado AA´ forma un ángulo α con la horizontal. Desde un punto B fijo se pueden construir diversos planos inclinados que lleguen al plano AA´.



Se pide el ángulo β que forma uno de los planos con la vertical (ver figura superior) en el que se cumpla que un cuerpo que parte, sin velocidad inicial, de B y desliza por él, llegue al plano AA´ en el tiempo mínimo. Se supone que el cuerpo desliza sin rozamiento

En la figura inferior L representa la longitud del plano, M la distancia de B al plano AA´ en dirección vertical



Conviene observar que si se cambia de plano, cambian β,L y H pero permanecen constantes M y α.

$$L = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g\ \cos\beta\ t^2 \quad (1)$$

Vamos a poner la variable L en función de β.

$$\cos\beta = \frac{H}{L} \quad ; \quad \text{tag}\alpha = \frac{M-H}{L\ \text{sen}\beta} \quad \Rightarrow L\ \text{tag}\alpha\ \text{sen}\beta = M - L\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{M}{\text{tag}\alpha\ \text{sen}\beta + \cos\beta} \quad (2)$$

Llevando la ecuación (2) a la (1)

$$\frac{M}{\text{tag}\alpha\ \text{sen}\beta + \cos\beta} = \frac{1}{2}g\cos\beta\ t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{\frac{2M}{g}}{\text{tag}\alpha\ \text{sen}\beta\ \cos\beta + \cos^2\beta}}$$

Como t ha de ser un mínimo derivamos la expresión anterior con respecto a β, e igualamos a cero.

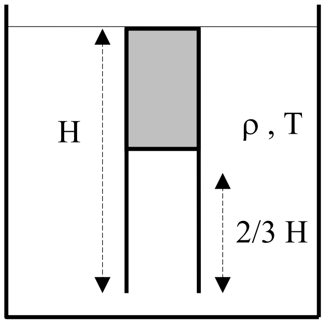
$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{\dfrac{\dfrac{-2M}{g}\left[\text{tag}\alpha\left(-\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta\right) - 2\cos\beta\ \text{sen}\beta\right]}{\left(\text{tag}\alpha\ \text{sen}\beta^{-}\cos\beta + \cos^2\beta\right)^2}}{2\sqrt{\dfrac{\frac{2M}{g}}{\text{tag}\alpha\ \text{sen}\beta^{-}\cos\beta + \cos^2\beta}}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tag}\alpha\left(-\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta\right) - 2\cos\beta\ \text{sen}\beta = 0$$

Hacemos uso de las relaciones trigonométricas: $\cos^2\beta - \text{sen}^2\beta = \cos 2\beta$ y $2\text{sen}\beta\ \cos\beta = \text{sen}2\beta$

$$\text{tag}\alpha \cdot \cos 2\beta - \text{sen}2\beta = 0 \Rightarrow \quad \frac{\text{tag}\alpha}{\text{tag}2\beta} - 1 = 0 \Rightarrow \quad \frac{\text{tag}\alpha}{\text{tag}2\beta} = 1 \Rightarrow \quad \alpha = 2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\alpha}{2}$$

64.- Un tubo cilíndrico está abierto por un extremo y cerrado por el otro. Su altura es H y su sección S. La presión atmosférica es P_o y la temperatura T_o.



El tubo se introduce en un recipiente que contiene un líquido de densidad ρ y que se encuentra a la temperatura T. Al cabo de un tiempo la temperatura del aire del tubo es igual a la del líquido y se observa que el líquido ha penetrado en el tubo una distancia 2/3 H. Determinar la temperatura inicial T_o.

Inicialmente el tubo está lleno de aire a la presión P_o, y a la temperatura T_o, ocupando un volumen SH. Después está a una temperatura T, ocupa un volumen $S \cdot \frac{1}{3}H$ y se encuentra al presión P_G.

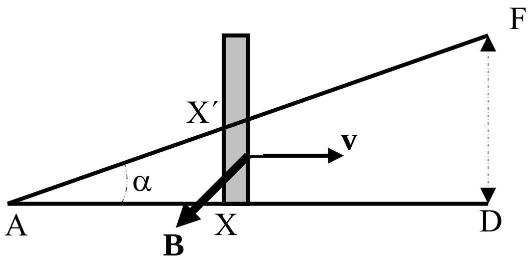
Para calcular P_G hacemos uso del hecho de que dos puntos del líquido que se encuentren en el mismo plano horizontal están a la misma presión

$$P_G + \rho\ g \cdot \frac{2}{3}H = P_o + \rho\ gH \quad \Rightarrow \quad P_G = P_o + \rho\ g \cdot \frac{1}{3}H$$

Suponiendo que el aire se comporta como un gas perfecto

$$\frac{P_o \cdot SH}{T_o} = \frac{\left(P_o + \rho\ g \cdot \frac{1}{3}H\right)\left(S \cdot \frac{1}{3}H\right)}{T} \quad \Rightarrow \quad T_o = \frac{3P_oT}{P_o + \rho\ g \cdot \frac{1}{3}H}$$

65.- Una barra cuya resistencia eléctrica por unidad de longitud es ρ, desliza, con velocidad constante v, sobre dos conductores sin resistencia. Estos conductores forman entre sí un ángulo α. Perpendicular al plano que forman la barra y los conductores se encuentra un campo magnético uniforme B(ver la figura inferior). La longitud del conductor AD es L y la de la barra es iguala la distancia DF. Se pide calcular el calor despendido cuando la barra se desplaza desde A hasta D.



Al desplazarse la barra hacia la derecha aumenta la superficie AXX´ y como consecuencia de ello se produce una fuerza electromotriz inducida cuyo modulo vale la derivada del flujo que atraviesa ese aumento de superficie con relación al tiempo. Esto se traduce en que aparece una corriente en el circuito AXX´ cuya intensidad se dirige desde X´a X en la barra, por lo que finalmente sobre la barra debe aparecer una fuerza

de sentido contrario al vector velocidad. Esta fuerza supone un trabajo que se debe hacer desde el exterior para mantener la barra en movimiento.

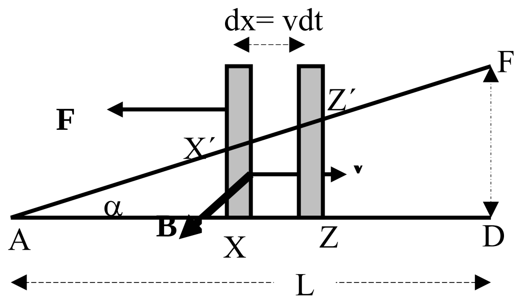


Fig.1

En la figura 1 la barra se ha desplazado hacia la derecha una longitud dx en un tiempo dt de modo que dx = vdt. En el instante inicial la superficie cerrada es AXX´ y luego es AZZ´.
Designamos con m a la longitud en la barra XX´ , con n a la longitud en la barra ZZ´. Y con x a la distancia AX. El aumento de superficie es:

$$dS = \frac{n(x + vdt)}{2} - \frac{mx}{2} \quad (1)$$

La relación ente m y n la hacemos por medio del ángulo α.

$$\mathrm{tag}\alpha = \frac{m}{x} = \frac{n}{x + v\ dt} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{m(x + v\ dt)}{x}$$

Sustituyendo en (1)

$$dS = \frac{m(x + vdt)^2}{2x} - \frac{mx}{2} = \frac{mx^2 + 2mxv\ dt - mx^2}{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = mv$$

En el cálculo anterior se desprecia el término que contiene un infinitésimo de segundo orden.

El valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida vale:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{BdS}{dt} = Bmv$$

La intensidad de corriente que pasa por la barra es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bmv}{\rho\ m} = \frac{Bv}{\rho}$$

La fuerza que se debe aplicar para mantener la barra con movimiento uniforme es:

$$F = IlB = \frac{Bv}{\rho} - m \cdot B = \frac{B^2 v}{\rho} m$$

El trabajo necesario que se debe aplicar desde el exterior para que la barra se desplace una longitud L vale:

$$W = \int_0^L \frac{B^2 v}{\rho} m dx = \frac{B^2 v}{\rho} \int_0^L x\ \mathrm{tag}\alpha\ dx = \frac{B^2 v\ \mathrm{tag}\alpha}{\rho} \frac{L^2}{2}$$

Este trabajo se convierte en calor en el circuito.