

## PROBLEMAS VARIADOS 8

**241.-** En lo alto de un plano inclinado de masa  $m_1$ ; ángulo  $\alpha$  y longitud  $L$ , se coloca una masa (considerada puntual)  $m_2$ . Se admite que no existe ningún tipo de rozamiento. Se pide determinar la aceleración del plano inclinado cuando la masa puntual  $m_2$  desliza por él.

El sistema formado por el plano y la masa puntual se encuentran inicialmente como indica la figura 1(a) y al cabo de un tiempo  $t$ , cuando la masa  $m$  llega al final del plano, como indica la figura 1(b). Inicialmente el plano inclinado y la masa  $m_2$  se encuentra en reposo, por tanto la velocidad del centro de masas del sistema en ese instante es nula.

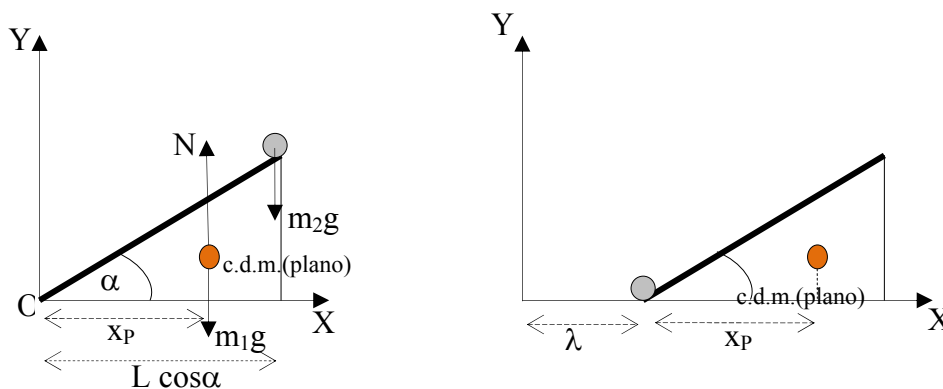


Fig. 1 (a)

Fig.1 (b)

Designamos con  $L$  a la longitud del plano. Respecto del sistema de referencia ( $OXY$ ), la abscisa de la masa puntual es  $L \cos \alpha$ , y la del centro de masas del plano inclinado, es  $x_P$ . Al cabo del tiempo  $t$ , la masa puntual tiene una abscisa  $\lambda$  y el centro de masas del plano inclinado  $\lambda + x_P$ .

Las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema son: el peso  $m_2g$  de la masa  $m_2$ , el peso  $m_1g$  del plano inclinado y la fuerza  $N$  con que el suelo empuja al plano, todas ellas perpendiculares al eje  $X$  [nótese que entre las masa  $m_1$  y  $m_2$  también se ejercen fuerzas y reacciones, pero son interiores al sistema y no influyen en el movimiento general del mismo, aparecen representadas en la Fig. 2].

Aplicando la ley de Newton al sistema

$$\sum F_{\text{ext}}(x) = \sum m_{\text{total}} \cdot a_x = (m_1 + m_2) a_x$$

Teniendo en cuenta que el sumatorio de las fuerzas exteriores es nulo se deduce:

$$(m_1 + m_2) \cdot \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = \text{Cte} = 0 \Rightarrow x_{\text{CM}}(\text{sistema}) = \text{Cte}$$

La ecuación anterior nos indica que la abscisa del centro de masas del sistema no se desplaza, es la misma en el tiempo  $t=0$  que cuando el tiempo es  $t$ , a pesar de que tanto el plano inclinado como la masa  $m_2$  se han movido. Se deduce:

$$\begin{aligned} x_{\text{CM}}(\text{sistema}) &= \frac{m_1 x_P + m_2 L \cos \alpha}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (x_P + \lambda) + m_2 \lambda}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_2 L \cos \alpha = \lambda (m_1 + m_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{m_2 L \cos \alpha}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

En el intervalo de tiempo  $t=0$  a  $t=t$  la masa  $m_2$  recorre la longitud  $L$  del plano y el plano inclinado la distancia  $\lambda$ .

Teniendo presente que el plano posee una aceleración  $\mathbf{a}$  dirigida a lo largo del eje  $X$  positivo, del sistema  $(OXY)$ ; es necesario tomar otro sistema de ejes sobre el plano inclinado  $(O'X'Y')$  que será no-inercial. La masa  $m_2$  por moverse en este sistema las fuerzas que actúan sobre ella son: su peso, la fuerza de inercia  $F_i = -m_2 \cdot a$  y la fuerza de reacción  $N_p$  con que el plano la empuja, tal como se indica en la figura 2.

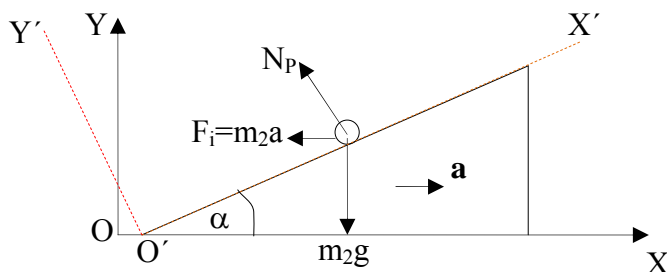


Fig.2

En el intervalo de tiempo  $t=0$  a  $t=t$ , la masa  $m_2$  llega a  $O'$  donde  $x' = 0$  :

$$\Sigma F_{X'} = -m_2 g \operatorname{sen} \alpha - m_2 a \cos \alpha = m_2 a_{x'} \Rightarrow a_{x'} = -(g \operatorname{sen} \alpha + a \cos \alpha)$$

$$x' - x'_0 = \frac{1}{2} a_{x'} t^2 \quad ; \quad 0 - L = -\frac{1}{2} (g \operatorname{sen} \alpha + a \cos \alpha) t^2$$

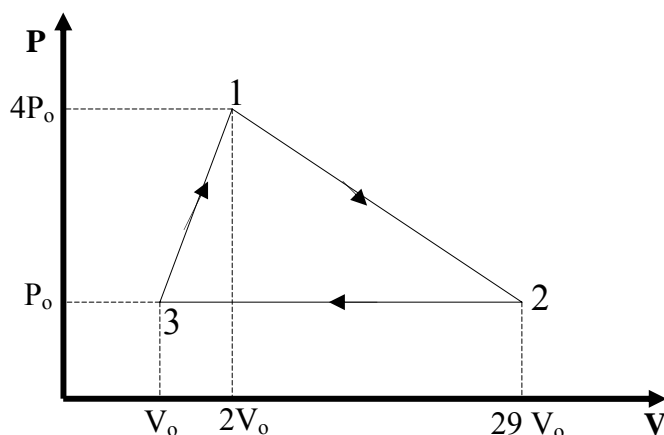
En el mismo intervalo de tiempo escribimos para el plano de masa  $m_1$ .

$$\lambda = \frac{1}{2} a t^2$$

De estas ecuaciones se deduce dividiendo miembro a miembro:

$$\begin{aligned} \frac{L}{\lambda} &= \frac{g \operatorname{sen} \alpha + a \cos \alpha}{a} \Rightarrow \frac{L}{\frac{m_2 L \cos \alpha}{m_1 + m_2}} = \frac{g \operatorname{sen} \alpha + a \cos \alpha}{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow a \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) &= g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + a \cos^2 \alpha \Rightarrow a \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} - \cos^2 \alpha \right) = g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= \frac{g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{m_1}{m_2}} \end{aligned}$$

242.- Un mol de un gas ideal realiza reversiblemente, el ciclo indicado en la figura.



$$P_0 = 1 \text{ atm} ; V_0 = 1 \text{ L} ; R = 0,082 \text{ atm L/(mol K)}$$

a) Construir los diagramas T-V y T-P. b) Determinar las coordenadas termodinámicas correspondientes al punto de máxima temperatura.

a)

Transformación 1-2

Hallamos la ecuación que relaciona la presión con el volumen. Aplicamos la ecuación de una recta que pasa por dos puntos

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Rightarrow P - 4 = \frac{1 - 4}{29 - 2} (V - 2) \Rightarrow P - 4 = -\frac{V}{9} + \frac{2}{9} \Rightarrow P = -\frac{V}{9} + \frac{38}{9} \quad (1)$$

Dado que el gas es perfecto, podemos deducir la relación entre T y V.

$$PV = nRT \Rightarrow \left( \frac{38 - V}{9} \right) \cdot V = RT \Rightarrow T = \frac{38V - V^2}{9R} \quad (2)$$

La ecuación que relaciona T con P es la siguiente:

$$-\frac{V}{9} = P - \frac{38}{9} \Rightarrow V = 38 - 9P \Rightarrow P \cdot (38 - 9P) = RT \Rightarrow T = \frac{38P - 9P^2}{R} \quad (3)$$

Transformación 2-3

La transformación es una isóbara. Si P y V representan la presión y el volumen en cualquier punto de la recta 2-3

$$\frac{V}{T} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{29}{T_2} ; 1 \cdot 29 = RT_2 \Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{29}{\frac{29}{R}} \Rightarrow T = \frac{V}{R} \quad (4) ; \quad P = \text{Cte} = 1 \text{ atm}$$

### Transformación 3-1

Hallamos la ecuación que relaciona la presión con el volumen. Aplicamos la ecuación de una recta que pasa por dos puntos

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Rightarrow P - 1 = \frac{4 - 1}{2 - 1} (V - 1) \Rightarrow P - 1 = 3V - 3 \Rightarrow P = 3V - 2 \quad (5)$$

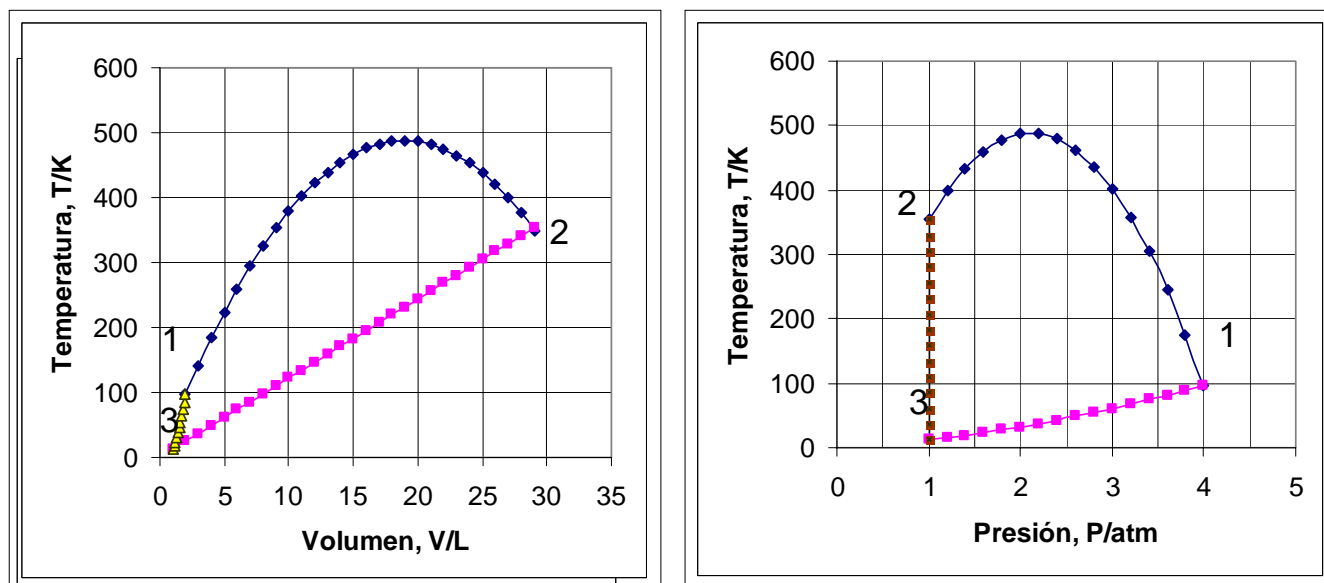
Dado que el gas es perfecto, podemos deducir la relación entre T y V.

$$PV = RT \Rightarrow (3V - 2) \cdot V = RT \Rightarrow T = \frac{3V^2 - 2V}{R} \quad (6)$$

La ecuación que relaciona T con P es la siguiente:

$$V = \frac{P + 2}{3} \Rightarrow P \cdot \left( \frac{P + 2}{3} \right) = RT \Rightarrow T = \frac{P^2 + 2P}{3R} \quad (7)$$

Los cálculos están hechos con Excel. Se dan valores a V o a P en las ecuaciones según que estas magnitudes aparezcan en las fórmulas como variables independientes. Así en las ecuaciones (1), (2), (4), (5), (6) la variable independiente es el volumen, y en las ecuaciones (3) y (7) es la presión.



b) Elegimos la ecuación (2)  $T = \frac{38V - V^2}{9R}$ , Derivamos respecto a la variable V e igualamos a cero

$$\frac{dT}{dV} = \frac{38 - 2V}{9R} = 0 \Rightarrow V = 19L$$

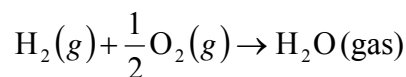
La máxima temperatura se produce cuando el volumen es 19 L y la temperatura

$$T = \frac{38 \cdot 19 - 19^2}{9 \cdot 0,082} = 489K$$

**243.- En la cámara de combustión de un motor de reacción penetran por segundo  $m$  kg de hidrógeno y la cantidad de oxígeno necesaria para su combustión completa. El orificio de salida de la tobera del motor tiene una sección  $S$  expresada en  $m^2$ , siendo  $p$  la presión en atmósferas y  $T$  la temperatura en kelvin. Determinar la fuerza con que los gases de salida impulsan al motor.**

**Dato .  $R = 0,082$  (atm .L)/(mol K)**

En la cámara de combustión del motor se produce una reacción química entre el hidrógeno y el oxígeno.



De la estequiometría de la reacción se deduce que los moles formados de vapor de agua son los mismos que los de entrada de hidrógeno. Dado que la masa molar del hidrógeno es:  $2 \frac{g}{mol} = 2 \frac{kg}{kgmol}$  y la del agua  $18 \frac{g}{mol} = 18 \frac{kg}{kgmol}$ , se deduce que la masa de vapor de agua que por segundo abandona la tobera es:

$$\text{Moles de hidrógeno a la entrada: } \frac{m \left( \frac{kg}{s} \right) \cdot \frac{1}{2} \frac{kgmol}{kg}}{2 \frac{kg}{kgmol}} = \frac{m}{2} \frac{kgmol}{s}$$

kg de vapor de agua que salen por la tobera por segundo:

$$\frac{m}{2} \frac{kgmol}{s} \cdot 18 \frac{kg}{kgmol} = 9m \frac{kg}{s}$$

El volumen de vapor de agua que abandona la tobera es igual a la masa de vapor de agua dividido por la densidad del vapor en las condiciones de presión y temperatura que existen a la salida. Admitiendo que el vapor de agua se comporta como un gas perfecto.

$$pV = \frac{\text{gramos}}{M_{H_2O}} RT \Rightarrow p = \frac{\rho_{H_2O}}{M_{H_2O}} RT \Rightarrow \rho_{H_2O} = \frac{p M_{H_2O}}{RT} = \frac{p(\text{atm}) \cdot \frac{18g}{mol}}{0,082 \frac{\text{atmL}}{mol} T(K)} = 219,5 \frac{p}{T} \frac{g}{L}$$

$$\text{Gasto} = \frac{\text{masa por s}}{\rho_{H_2O}} = \frac{9m \frac{kg}{s}}{219,5 \frac{p}{T} \frac{g}{L}} = \frac{9m \frac{kg}{s}}{219,5 \frac{p}{T} \frac{10^{-3}kg}{10^{-3}m^3}} = \frac{9m}{219,5} \frac{m^3}{\frac{p}{T} s} = Sv \Rightarrow$$

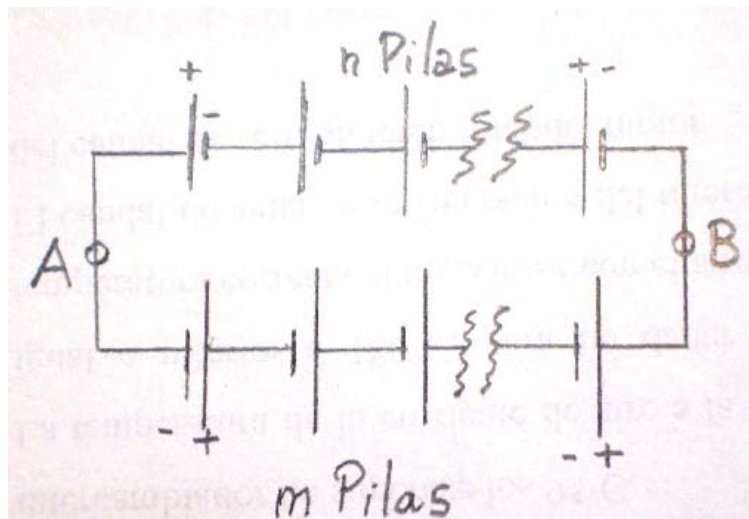
$$v = \frac{9m}{219,5} \frac{m}{\frac{p}{T} \cdot S}$$

Teniendo en cuenta que la fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento

$$F = m \cdot \frac{9mT}{219,5pS} \text{ N}$$

Si en la ecuación anterior hubiese que sustituir valores numéricos  $m$  las magnitudes se expresarían  $m$  en kg,  $T$  en K,  $p$  en atm y  $S$  en  $m^2$ .

244.- Se construye un circuito como indica la figura inferior, a base de pilas iguales de fuerza electromotriz  $\varepsilon$  y resistencia interna  $r$ . En el circuito consideramos dos puntos A y B de modo que en la parte superior se han colocado  $n$  pilas y en la inferior  $m$ . Se pide la diferencia de potencial entre los puntos A y B.



Hallamos la diferencia de potencial entre A y B por el camino inferior. Designamos con  $I$  la intensidad que circula por el circuito que es la misma en todo él.

$$V_A - V_B = \sum \varepsilon - \sum IR \Rightarrow V_A - V_B = m\varepsilon - Imr \Rightarrow I = \frac{m\varepsilon - (V_A - V_B)}{mr}$$

Aplicamos la ley de Ohm generalizada a todo el circuito:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{(m+n)\varepsilon}{(m+n)r} = \frac{\varepsilon}{r}$$

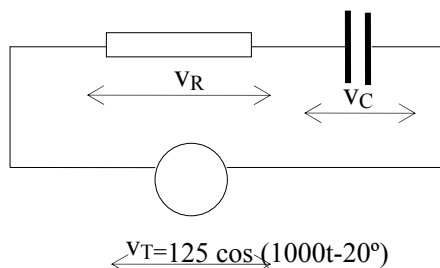
Igualando las dos ecuaciones:

$$\frac{m\varepsilon - (V_A - V_B)}{mr} = \frac{\varepsilon}{r} \Rightarrow \varepsilon - \frac{(V_A - V_B)}{m} = \varepsilon \Rightarrow \frac{(V_A - V_B)}{m} = 0 \Rightarrow V_A - V_B = 0$$

Cualquiera que sea la relación entre  $n$  y  $m$  la diferencia de potencial es nula.

**245.- Se dispone de un condensador de capacidad  $C=2\mu\text{F}$  y de una resistencia  $R = 100 \Omega$ . Ambos elementos se colocan primero en serie y después en paralelo, en ambos casos se someten a una diferencia de potencial alterna de valor  $V= 125 \cos(1000t-20^\circ)$ . Determinar en cada caso la intensidad total.**

a) En la figura se representan las caídas de tensión en la resistencia y en el condensador



Representamos mediante la ecuación

$$I = I_m \cos(1000t + \varphi)$$

la intensidad que circula por la resistencia y el condensador.

Calculamos el valor de  $I_m$  a partir de la impedancia del circuito

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{100^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 1000}\right)^2} = 510 \Omega \Rightarrow I_m = \frac{125}{510} = 0,245 \text{ A}$$

En el circuito se cumple:

$$v_T = v_R + v_C = IR + \frac{\int I dt}{C} \Rightarrow 125 \cos(1000t - 20^\circ) = 0,245 \cdot 100 \cdot \cos(1000t + \varphi) + \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} \int I dt$$

$$125 \cos(1000t - 20^\circ) = 0,245 \cdot 100 \cdot \cos(1000t + \varphi) + \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} [0,245 \sin(1000t + \varphi)] \cdot \frac{1}{1000}$$

La ecuación anterior se cumple para cualquier instante de tiempo  $t \geq 0$ . Si consideramos el instante  $t = 0$  nos queda:

$$125 \cdot \cos(-20^\circ) = 24,5 \cdot \cos \varphi - 122,5 \sin \varphi = 24,5 \cdot \cos \varphi + 122,5 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \Rightarrow$$

$$117,5 - 24,5 \cos \varphi = 122,5 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \Rightarrow 0,959 - 0,20 \cos \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la última ecuación, reagrupamos términos y resolvemos la ecuación de segundo grado.

$$0,920 + 0,040 \cos^2 \varphi - 0,384 \cos \varphi = 1 - \cos^2 \varphi \Rightarrow 1,040 \cos^2 \varphi - 0,384 \cos \varphi - 0,080 = 0 \Rightarrow$$

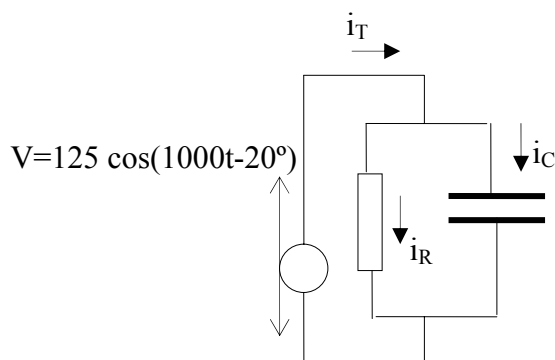
$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{0,384 \pm \sqrt{0,384^2 + 4 \cdot 1,040 \cdot 0,080}}{2,08} = \frac{0,384 \pm 0,693}{2,08}$$

Las dos soluciones de la ecuación son:  $\cos \varphi = 0,518$  y  $\cos \varphi = -0,149$ , que corresponden a los ángulos  $\varphi = 58,8^\circ$  y  $\varphi = 98,6^\circ$ . La primera solución es la correcta pues el desfase no puede ser mayor de  $90^\circ$  por haber solo una resistencia y un condensador, por tanto.

$$I = 0,245 \cos(1000t + 58,8^\circ)$$

b) En el esquema siguiente se establecen las intensidades que circulan por la fuente, la resistencia y el condensador.

Calculamos el valor de  $I_m$  a partir de la impedancia del circuito



La ecuación de la intensidad total es:

$$i_T = I_m \cos(1000t + \varphi)$$

Calculamos la impedancia del circuito:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{10^4} + (2 \cdot 10^{-6} \cdot 1000)^2} \Rightarrow Z = 98 \Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{125}{Z} = \frac{125}{98} = 1,28 \text{ A}$$

$$i_T = 1,28 \cos(1000t + \varphi) = i_R + i_C = \frac{125 \cos(1000t - 20^\circ)}{100} + C \frac{dV}{dt} =$$

$$= \frac{125 \cos(1000t - 20^\circ)}{100} - C \cdot 125 \sin(1000t - 20^\circ) \cdot 1000 \Rightarrow$$

$$1,28 \cos(1000t + \varphi) = 1,25 \cos(1000t - 20^\circ) - 0,25 \sin(1000t - 20^\circ)$$

Si en la última ecuación hacemos  $t=0$ , resulta:

$$1,28 \cos \varphi = 1,25 \cos(-20^\circ) - 0,25 \sin(-20^\circ) \Rightarrow \cos \varphi = 0,984 \Rightarrow \varphi = 10,1^\circ$$

$$i_T = 1,28 \cos(1000t + 10,1^\circ)$$