1.- La rueda de una locomotora es r_o =1 m a la temperatura de 0º¿Cuál es la diferencia entre el número de rotaciones de la rueda, a lo largo de un recorrido de L=1000 km en verano con una temperatura de t_1= 25ºC y en invierno con una temperatura de t_2= -25ºC. El coeficiente de dilatación lineal es $\alpha = 2.10^{-5}\ K^{-1}$.

La longitud de la rueda en función de la temperatura es

$$L_{t1} = 2\pi\ r_o\left(1+\alpha\ t_1\right) \quad ; \quad L_{t2} = 2\pi\ r_o\left(1+\alpha\ t_2\right)$$

El número de vueltas en L = 10^6 m

$$n_1 = \frac{L}{2\pi\ r_o\left(1+\alpha\ t_1\right)} \quad ; \quad n_2 = \frac{L}{2\pi\ r_o\left(1+\alpha\ t_2\right)}$$

La diferencia

$$n_2 - n_1 = \frac{L}{2\pi\ r_o}\left[\frac{1}{1+\alpha\ t_2} - \frac{1}{1+\alpha\ t_1}\right] = \frac{10^6}{2\pi}\left[\frac{1}{1-2.10^{-5}*25} - \frac{1}{1+2.10^{-5}*25}\right] = 159$$

2.- Un reloj de péndulo funciona perfectamente cuando la temperatura es 15,0ºC. Si la temperatura ambiente sube a 30,0ºC, calcular ¿cuántos segundos se retrasará al cabo de 24 horas?
La longitud del péndulo a t_{15} es 0,50 m y el coeficiente de dilatación del material con que está hecho es $\alpha = 2{,}0.10^{-5}\ K^{-1}$.

Calculamos los periodos

$$T_{15} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5}{g}} \qquad ; \qquad T_{30} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5\left(1+2.10^{-5}*15\right)}{g}}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$T_{15}=1{,}418503 \text{ s} \qquad y \qquad T_{30} = 1{,}418716 \text{ s}$$

En cada periodo la diferencia de tiempo es $2{,}13.10^{-4}$ s

$$\frac{1{,}418503}{2{,}13.10^{-4}} = \frac{24*3600}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 12{,}97 s$$

Teniendo en cuenta que para hacer el cálculo hemos tomado g = 9,81 m/s^2 y el valor del coeficiente de dilatación que está dado con una cifra significativa, el resultado numérico está afectado de esas incertidumbres. Por ello debemos decir que el reloj retrasa aproximadamente unos 13 segundos.
Con los valores dados, la incertidumbre es del orden de

$$\left(\frac{0{,}01}{9{,}81}+\frac{0{,}02}{15}+\frac{0{,}1}{2{,}0}\right).100 = 5\ \%$$

Lo que nos indica que el retraso debe estar comprendido entre 12 y 14 segundos.

3.- Una bola de cobre de diámetro D = 1,2 cm, cuya temperatura es T_i =300 K, se coloca en el centro de una cavidad en cuyo interior se ha hecho el vacío y sus paredes se mantienen cerca del cero absoluto. Admitiendo que la bola emite radiación comportándose como un cuerpo negro, determinar el tiempo que ha de transcurrir para que su temperatura se reduzca a la mitad.

Datos. Densidad del cobre ρ=8,93 g/cm3

Calor específico del cobre= 24,4 J/mol K

Masa molar del cobre M =63,55 g/mol

Constante de Stefan-Boltzmann, σ = 5,7.10^{-8} W/m^{2}K^4

La bola pierde energía térmica y como consecuencia disminuye su temperatura, dicha energía es absorbida por las paredes del recipiente. En un tiempo dt la bola disminuye su temperatura en dT y su energía disminuye en dE.

$$dE = mc\cdot dT = V\rho\ c\cdot dT = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3\rho\ c\cdot dT = \frac{1}{6}\pi D^3\rho\ c\cdot dT \quad J\ (1)$$

Esta energía la ha radiado la bola por su superficie en un tiempo dt, y de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann

$$dE = \sigma\left(\frac{J}{s\ m^2\ K^4}\right)T^4\left(K^4\right)\cdot 4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2\left(m^2\right)\cdot dt(s) = \pi D^2\sigma T^4 dt \quad J\ (2)$$

(1) y (2) son iguales en valor absoluto, pero en (1) dT es negativo y en (2), dt es positivo por lo que al igualarlas ponemos un signo menos a (1).

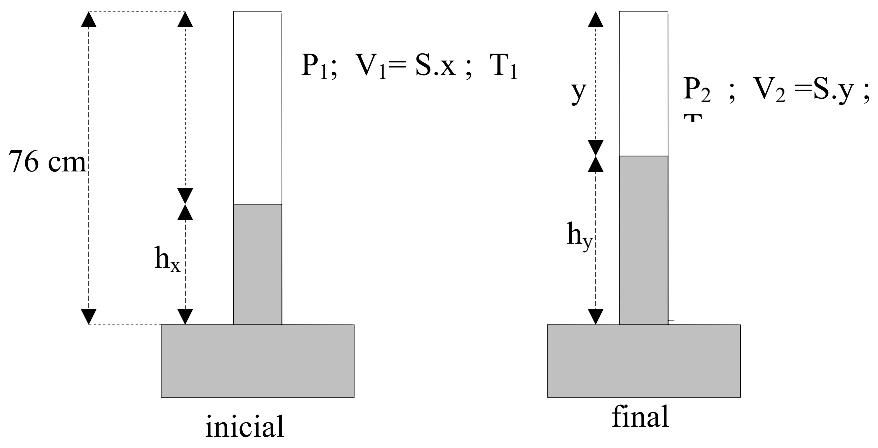
$$-\frac{1}{6}\pi\ D^3\rho\cdot c\cdot dT = \pi D^2\sigma T^4 dt \Rightarrow \quad -\int_{Ti}^{Tf}\frac{dT}{T^4} = \int_0^{t_f}\frac{6\sigma}{\rho\ cD}dt \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\frac{1}{T^3}\Big]_{Ti}^{Tf} = \frac{6\sigma}{\rho\ cD}t\ \Big]_o^{t_f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{T_f^3}-\frac{1}{T_i^3}\right) = \frac{6\sigma}{\rho\ cD}t_f \Rightarrow t_f = \frac{\rho\ cD\left(\frac{1}{T_f^3}-\frac{1}{T_i^3}\right)}{18\sigma} = \frac{\rho\ cD\left(\frac{T_i^3-\left(\frac{T_i}{2}\right)^3}{\frac{T_i^3}{8}\cdot T_i^3}\right)}{18\sigma} = \frac{\rho\ cD\cdot 7}{18\sigma\cdot T_i^3} \Rightarrow$$

$$t_f = \frac{8{,}93.10^3\left(\frac{kg}{m^3}\right)\cdot\frac{24{,}4}{63{,}55.10^{-3}}\left(\frac{J}{kg\cdot K}\right)\cdot 1{,}2.10^{-2}(m)\cdot 7}{18\cdot 5{,}7.10^{-8}\left(\frac{J}{s\cdot m^2\cdot K^4}\right)\cdot\cdot 300^3\left(K^3\right)} = 10397\ \ s \approx 2{,}9\ horas$$

4.-Un tubo cilíndrico de sección S y altura 76 cm, está cerrado por un extremo. El tubo está sobre mercurio (densidad ρ) de modo que éste penetra en el tubo hasta una altura h_x. Entre el extremo cerrado del tubo y el nivel del mercurio existen 0,001 mol de un gas ideal cuya capacidad calorífica molar es C_v = 20,5 J/mol K. La presión exterior al tubo equilibra la de una columna de mercurio de 76 cm de altura. Si la temperatura del gas desciende 10ºC ¿cuánto calor cede dicho gas al ambiente?

En la figura 1 se representa la situación inicial y la final



.

De acuerdo con la ecuación de la hidrostática la presión del gas más la de la columna de mercurio es igual a la presión exterior. Lo aplicamos a la situación inicial y final.

$$P_1 + \rho g h_x = P_{atm} = \rho g 76 \;\Rightarrow\; P_1 = \rho g(76 - h_x) = \rho g x$$
$$P_2 + \rho g h_y = P_{atm} = \rho g 76 \;\Rightarrow\; P_2 = \rho g(76 - h_y) = \rho g y$$

Multiplicamos P_1 por V_2 y P_2 por V_1.

$$P_1V_2 = \rho g x S y \quad ; \quad ; P_2V_1 = \rho g y S x \;\Rightarrow\; P_1V_2 = P_2V_1 \quad (1)$$

Para un estado intermedio (con presión P y volumen V) entre la situación inicial y la final podemos escribir:

$$PV_1 = P_1V \quad (2)$$

Aplicamos el primer principio de la termodinámica entre el estado inicial y final.

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow nC_v(T_2 - T_1) = Q + W \Rightarrow \quad Q = nC_v(T_2 - T_1) - W \quad (3)$$

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{P_1V}{V_1}dV = -\frac{P_1}{V_1}\int_{V_1}^{V_2} V\,dV = -\frac{P_1}{V_1}\left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}\right) = -\frac{P_1V_2\cdot V_2}{2V_1} + \frac{P_1V_1}{2}$$

En la ecuación anterior sustituimos la (1) y la ecuación de los gases perfectos:

$$W = -\frac{P_2 V_1 \cdot V_2}{2 V_1} + \frac{P_1 V_1}{2} = -nR\frac{T_2}{2} + nR\frac{T_1}{2} = \frac{nR}{2}\left(T_1 - T_2\right)$$

Llevando esta ecuación a la (3).

$$Q = nC_V\left(T_2 - T_1\right) + \frac{nR}{2}\left(T_2 - T_1\right) = n\left(T_2 - T_1\right)\left(C_v + \frac{R}{2}\right) = 0{,}001 \cdot (-10)\left(20{,}5 + \frac{8{,}3}{2}\right)$$

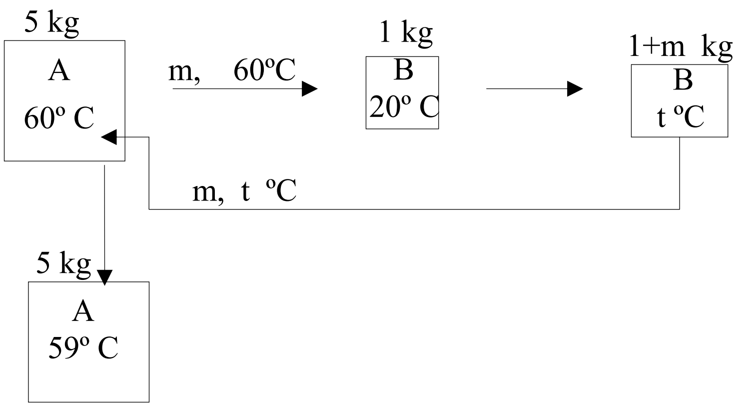
$$Q = -0{,}247\ \mathrm{J}$$

5.-Un recipiente A termoaislado contiene 5 kg de agua a la temperatura de 60ºC, otro recipiente B, también termoaislado, contiene 1 kg de agua a 20ºC. Del recipiente A se transfiere una masa de agua m al recipiente B y se espera a que se alcance el equilibrio térmico. Luego se transfiere de B a A la misma cantidad m de agua y cuando se alcanza el equilibrio térmico ese recipiente está a la temperatura de 59ºC.

a) Determinar m y la temperatura del recipiente B.

b) Dibujar una gráfica que indique las temperaturas de los recipientes A y B en función de la masa m transferida.

a) Un esquema ayuda a entender el proceso



Al pasar m kg de agua desde A a B, la temperatura de B aumenta a tºC. Si no hay pérdidas de calor

$$m \cdot c_e \cdot (60 - t) = 1 \cdot c_e \cdot (t - 20) \;\Rightarrow\; m(60 - t) = t - 20 \quad (1)$$

Al pasar m kg de agua a la temperatura t al recipiente B, en éste hay 5 kg de agua a la temperatura de 59ºC.

$$(5 - m) \cdot c_e \cdot (60 - 59) = m \cdot c_e \cdot (59 - t) \;\Rightarrow\; 5 - m = m(59 - t) \quad (2)$$

A partir de (1) y (2), resulta

$$m(60 - t) - m(59 - t) = t - 20 - (5 - m) \;\Rightarrow\; m = t - 25 + m \;\Rightarrow\; t = 25^{\circ}$$

$$\text{De } (2) \;\Rightarrow\; m = \frac{t - 20}{60 - t} = \frac{25 - 20}{60 - 25} = \frac{1}{7}\,\text{kg}$$

b) Designamos con T a la temperatura del recipiente A. De acuerdo con el esquema de cálculo anterior

$$m(60 - t) = 1(t - 20) \Rightarrow 60m - tm = t - 20 \Rightarrow t = \frac{60m + 20}{1 + m}$$

$$(5-m)(60-T)=m(T-t) \;\Rightarrow\; T-t=\left(\frac{5-m}{m}\right)(60-T) \Rightarrow \; T=\frac{\left(\frac{5-m}{m}\right)60+t}{1+\frac{5-m}{m}}$$