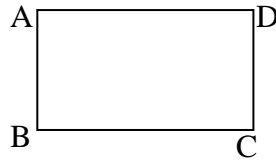
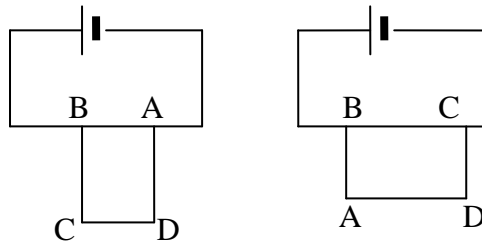


1.- Un hilo uniforme tiene forma de rectángulo ABCD



Si se conecta dicho rectángulo a un circuito eléctrico por los vértices AB, la resistencia vale  $R_1$ , pero si a ese mismo circuito se conecta por los vértices BC la resistencia es  $R_2=1,6 R_1$  ¿Cuál es la relación de las longitudes de los lados del rectángulo?

Designamos con  $r_1$  a la resistencia del lado AB y con  $r_2$  la del lado BC. Los dos posibles conexiones son las de la figura inferior



En el primer caso la resistencia  $r_1=AB$  está en paralelo con las resistencias en serie  $r_2+r_1+r_2$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1 + 2r_2} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1(r_1 + 2r_2)} \Rightarrow R_1 = \frac{r_1(r_1 + 2r_2)}{2(r_1 + r_2)}$$

En el segundo caso la resistencia  $r_2=BC$  está en paralelo con las resistencias en serie  $r_1+r_2+r_1$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2 + 2r_1} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_2(r_2 + 2r_1)} \Rightarrow R_2 = \frac{r_2(r_2 + 2r_1)}{2(r_1 + r_2)}$$

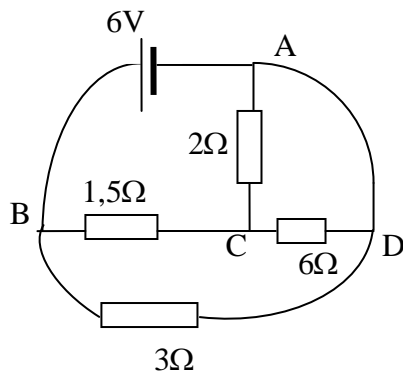
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2(r_2 + 2r_1)}{r_1(r_1 + 2r_2)} = 1,6$$

Si hacemos  $r_1$  igual a la unidad resulta:

$$r_2^2 + 2r_2 = 1,6 + 3,2r_2 \Rightarrow r_2^2 - 1,2r_2 - 1,6 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado y considerando la solución positiva  $r_2 = 2$ , por tanto, la relación de longitudes es la misma que la de resistencias por ser un hilo uniforme.

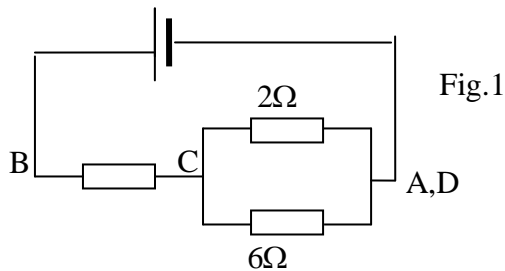
2.-Calcular en el circuito de la figura inferior la corriente total que atraviesa la batería



Vamos a convertir este esquema en otro en el que se vea más fácilmente la disposición de las resistencias.

Para ello señalamos los nudos A B C y D , observamos que entre Ay D no existe resistencia , por tanto, esos dos puntos están al mismo potencial y por tanto son el mismo nudo.

Esto nos lleva a decir que la resistencia de  $2\Omega$  y la de  $6\Omega$  están en paralelo y el conjunto de las dos en serie con la de  $1,5\Omega$ . El circuito de la parte superior excluyendo a la resistencia de  $3\Omega$  queda así (fig 1)



La resistencia de  $3\Omega$  está entre B y C, por tanto, en paralelo con las de la. figura 1. El circuito definitivo es el de la figura 2.

Resistencia entre C y A

$$\frac{1}{R_{CA}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \Rightarrow R_{CA} = \frac{3}{2}\Omega$$

Resistencia entre B y A

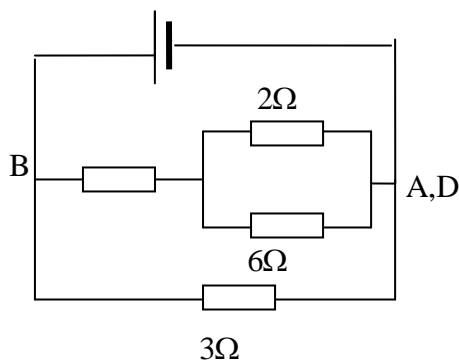
$$R_{BA} = 1,5 + \frac{3}{2} = 3\Omega$$

Fig.2 Resistencia total del circuito

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow R_T = \frac{3}{2}\Omega$$

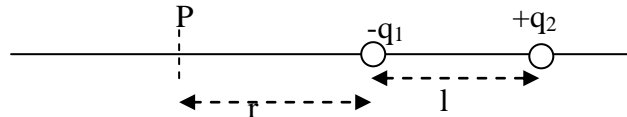
Intensidad total

$$I = \frac{6}{1,5} = 4A$$



3.-Sobre el eje  $X$  se encuentra una carga  $-q_1$ , a su derecha y a una distancia  $l$  se encuentra una carga  $+q_2$ , siendo en valor absoluto  $q_2 > q_1$ . Ambas cargas están fijas. Por el eje  $X$  y por la izquierda de  $q_1$  y desde el infinito se acerca una masa  $m$  con una carga  $+q_3$ . Calcular la velocidad mínima que debe tener en el infinito esta carga para que pueda alcanzar a  $q_1$ .

En la figura está el esquema de la situación de las cargas



En el punto P a una distancia  $r$  de  $-q_1$ , los campos eléctricos de las dos cargas se anulan. A la izquierda de P predomina el campo de  $+q_2$  y a la derecha de P el de  $-q_1$ . Dado que la carga  $q_3$  es positiva, a la izquierda de P es repelida, pero si rebasa el punto P, entonces es atraída, por consiguiente, si  $+q_3$  ha de llegar a  $-q_1$  basta con que su velocidad en P sea nula, ya que de ahí en adelante será atraída por  $-q_1$ .

El trabajo que es necesario realizar para que la carga  $+q_3$  llegue a P es:

$$W = q_3(V_\infty - V_P) = q_3(0 - V_P) = -q_3 \left[ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{q_2}{r+1} - \frac{q_1}{r} \right) \right]$$

El signo negativo indica que el trabajo debe realizarse en contra de las fuerzas del campo.

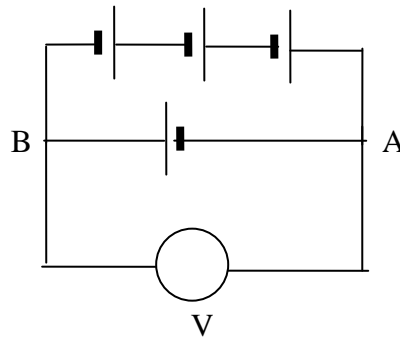
Este trabajo se realiza a costa de la energía cinética inicial que la carga  $q_3$  tiene en el infinito

$$\frac{1}{2}mv^2 = q_3 \left[ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{q_2}{r+1} - \frac{q_1}{r} \right) \right] \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q_3}{4\pi m\epsilon_0} \left( \frac{q_2}{r+1} - \frac{q_1}{r} \right)}$$

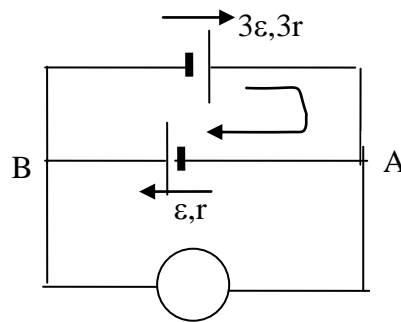
El valor de  $r$  se puede calcular a partir de que en el punto P las fuerzas son iguales

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_2}{(r+1)^2} \Rightarrow \frac{r+1}{r} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \Rightarrow \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} - 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} - 1}$$

4.- En el circuito de la figura inferior cada una de las pilas tiene una fuerza electromotriz  $\varepsilon$  y una resistencia interna  $r$ . El voltímetro tiene una resistencia interna muy superior a  $r$  y los cables carecen de resistencia. Determinar cuál será la lectura del voltímetro



El circuito de la figura equivale al siguiente



La intensidad que circula por la malla superior es:  $I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{3\varepsilon + \varepsilon}{3r + r} = \frac{\varepsilon}{r}$  y tiene el sentido de movimiento de las agujas de un reloj, como señala la flecha curvada de la figura.

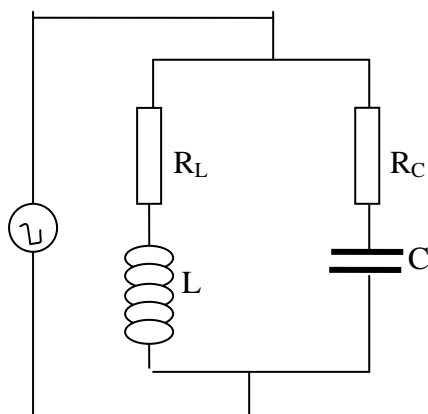
Si tomamos como sentido positivo el de la corriente y calculamos la diferencia de potencial por la parte inferior

$$V_A - V_B = \sum IR - \sum \varepsilon = Ir - \varepsilon = \frac{\varepsilon}{r}r - \varepsilon = 0$$

Si calculamos la misma diferencia de potencial por la parte superior

$$V_A - V_B = \sum IR - \sum \varepsilon = -I \cdot 3r - (-3\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{r} \cdot 3r + 3\varepsilon = 0$$

5.-En el circuito de la figura inferior determinar la frecuencia de resonancia



La impedancia de la rama que contiene la bobina vale  $Z_1 = R_L + L\omega i$

La impedancia de la rama que contiene el condensador vale  $Z_2 = R_C - \frac{1}{C\omega} i$

La admitancia de todo el circuito

$$Y = \frac{1}{R_L + L\omega i} + \frac{1}{R_C - \frac{i}{C\omega}}$$

Multiplicamos por el conjugado del denominador en cada fracción

$$Y = \frac{R_L - L\omega i}{R_L^2 + L^2\omega^2} + \frac{R_C + \frac{i}{C\omega}}{R_C^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \Rightarrow Y = \frac{R_L}{R_L^2 + L^2\omega^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} + i \left( \frac{-L\omega}{R_L^2 + L^2\omega^2} + \frac{\frac{1}{C\omega}}{R_C^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \right)$$

La resonancia se produce cuando la parte imaginaria es nula

$$\frac{L\omega_r}{R_L^2 + L^2\omega_r^2} = \frac{C\omega_r}{R_C^2 C^2 \omega_r^2 + 1} \Rightarrow LR_C^2 C^2 \omega_r^2 + L = CR_L^2 + L^2 C \omega_r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_r^2 (LR_C^2 C^2 - L^2 C) = CR_L^2 - L \Rightarrow \omega_r^2 = \frac{\left(R_L^2 - \frac{L}{C}\right)C}{LC^2 \left(R_C^2 - \frac{L}{C}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}} \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}}$$

Para que haya resonancia se tiene que cumplir que

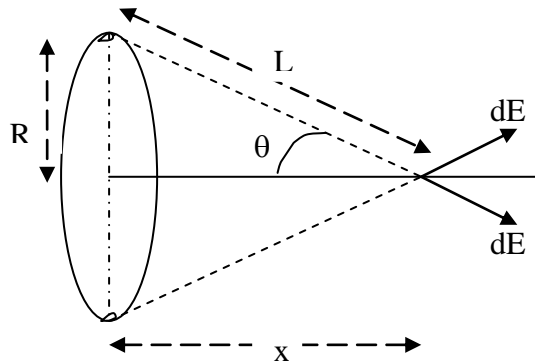
$$R_L^2 > \frac{L}{C} \quad \text{y} \quad R_C^2 > \frac{L}{C}$$

o también que

$$R_L^2 < \frac{L}{C} \quad \text{y} \quad R_C^2 < \frac{L}{C}$$

Para que el discriminante de la raíz sea positivo.

6.- Un anillo de radio  $R$  tiene distribuida uniformemente una carga de  $Q$  culombios. a) Calcular el campo eléctrico en un punto de su eje que dista del centro del anillo  $x$ . b) Dibujar la gráfica campo (eje Y) frente a distancia  $x$ , para una espira de radio  $R=10$  cm y  $Q = 1$  nC c) Determinar para qué valor de  $x$  el módulo del campo es máximo y el valor del campo en ese punto.

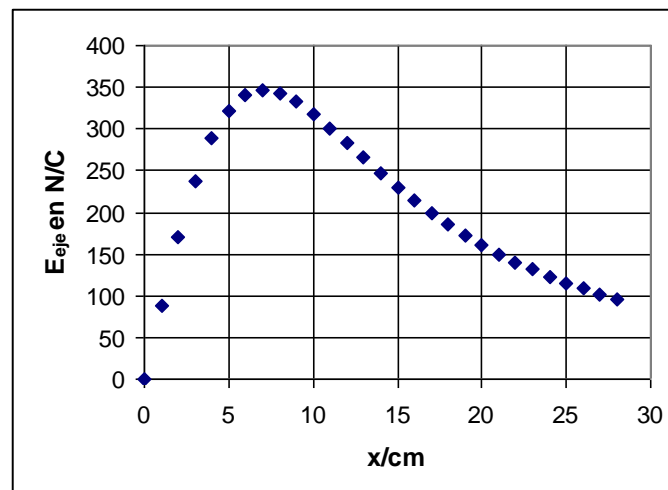


Escogemos dos elementos de longitud  $dl$  situados en los extremos de un diámetro. Cada elemento tendrá una carga  $dq = \frac{Q}{2\pi R} dl$  y crearán sendos campos  $d\vec{E}$ , tales como los que se indican en la figura superior. Ambos campos tienen la componente sobre la vertical igual y de sentido contrario y sobre la horizontal igual y del mismo sentido. Esto supone que al sumar las contribuciones de los distintos elementos en los que se descompone el aro la componente vertical se anula y solo queda sumar la componente sobre el eje horizontal.

$$dE_{\text{eje}} = dE \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dQ}{L^2} \cdot \frac{x}{L} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\pi R}{L^3} dl \cdot x \Rightarrow E_{\text{eje}} = \frac{Qx}{8\pi^2 \epsilon_0 R (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\text{eje}} = \frac{Qx}{8\pi^2 \epsilon_0 R (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi R = \frac{Qx}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

b)



De la gráfica se observa que el campo presenta un máximo. Para hallar su valor derivamos la función  $E_{\text{eje}} = f(x)$  frente a  $x$ , e igualamos a cero.

c)

$$\frac{dE_{\text{eje}}}{dx} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{(\mathbf{R}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2}(\mathbf{R}^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(\mathbf{R}^2 + x^2)^3} \right] = 0 \Rightarrow (\mathbf{R}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - (\mathbf{R}^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbf{R}^2 + x^2) = 3x^2 \Rightarrow \mathbf{R}^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{2}} = \frac{10 \text{ cm}}{\sqrt{2}} = 7,07 \text{ cm}$$

$$E_{\text{eje}} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Qx}{(\mathbf{R}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-9} \cdot 0,0707}{(0,1^2 + 0,0707^2)^{\frac{3}{2}}} = 346 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

**7.- Un condensador plano de capacidad  $C$  está descargado. Mediante un hilo muy largo se une una de las armaduras a una esfera de radio  $R$  y carga  $q_0$  y la otra se une a tierra. Calcular la carga que permanece en la esfera después de la unión.**

Parte de la carga de la esfera pasa al condensador y este flujo de carga cesa cuando los potenciales se igualen. Designamos con  $q_C$  la carga que adquiere el condensador y con  $q$  la carga que permanece en la esfera.

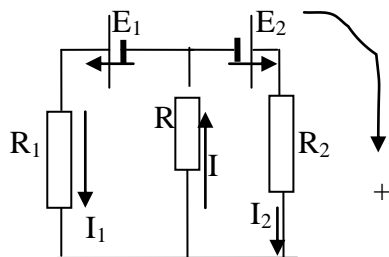
Por una parte se conserva la carga y por otra se igualen los potenciales del condensador y de la esfera

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= q + q_C \\ \frac{q_C}{C} &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R} q \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{q_0 - q}{C} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R} q \Rightarrow \frac{q_0}{C} = q \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R} + \frac{1}{C} \right) \Rightarrow q = \frac{q_0}{\frac{C}{4\pi \epsilon_0 R} + 1}$$

8.-En el circuito de la figura inferior hay que determinar el valor de la resistencia  $R$  para que la potencia calorífica generada en dicha resistencia sea la máxima posible y además calcular cuánto vale esa potencia máxima.

Se supone que las pilas carecen de resistencias internas.



Se toma como sentido positivo el de las agujas de un reloj. Las ecuaciones para las mallas izquierda y derecha son:

$$-E_1 = -I_1 R_1 - IR$$

$$E_2 = I_2 R_2 + IR$$

Para un nudo

$$I = I_1 + I_2$$

A partir de las tres ecuaciones

$$I = \frac{E_1 - IR}{R_1} + \frac{E_2 - IR}{R_2} \Rightarrow I \left( 1 + \frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2} \right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \Rightarrow I \left( 1 + \frac{R(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2}}{\frac{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}} \Rightarrow I = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}$$

La potencia térmica generada en la resistencia  $R$ , vale:

$$P = I^2 R = \frac{(E_1 R_2 + E_2 R_1)^2}{[R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)]^2} \cdot R \quad (1)$$

Como se pide que la potencia sea máxima derivamos la función anterior respecto de  $R$  e igualamos a cero.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{[R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)]^2 \cdot (E_1 R_2 + E_2 R_1)^2 - (E_1 R_2 + E_2 R_1)^2 R \cdot 2[R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)](R_1 + R_2)}{[R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)]^4} = 0$$

De la ecuación anterior

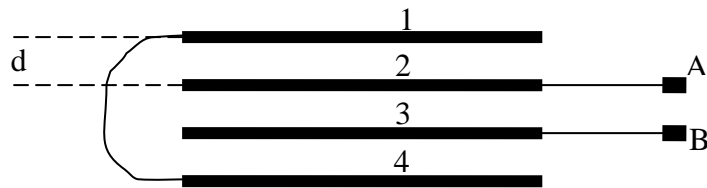
$$R_1 R_2 + R(R_1 + R_2) - 2R(R_1 + R_2) = 0 \Rightarrow R_1 R_2 - R(R_1 + R_2) \Rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

Llevando la ecuación (2) a (1)

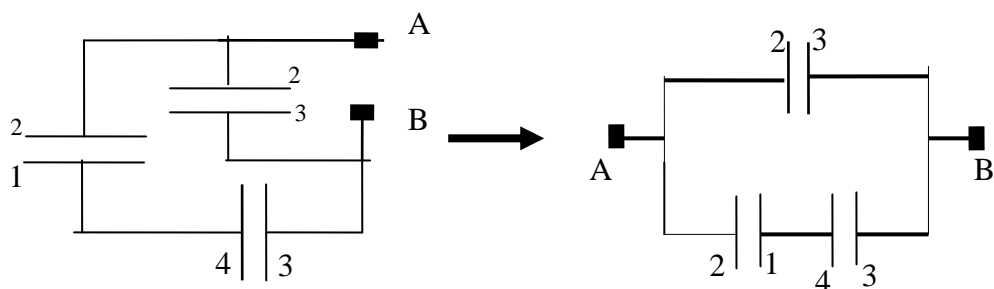
$$P_{\max} = \frac{(E_1 R_2 + E_2 R_1)^2}{\left[ R_1 R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (R_1 + R_2) \right]^2} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(E_1 R_2 + E_2 R_1)^2}{4R_1^2 R_2^2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\max} = \frac{(E_1 R_2 + E_2 R_1)^2}{4R_1 R_2 (R_1 + R_2)}$$

9.-Calcular la capacidad del sistema de condensadores de la figura inferior. Cada placa metálica tiene una superficie  $S$  y entre dos placas existe una distancia  $d$ .



Para saber cómo están conectados los condensadores hemos numerado las placas. Las figuras inferiores indican cómo se conectan las placas.



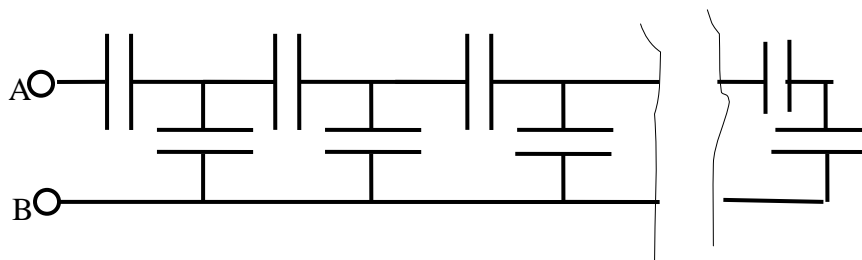
En la última figura se observa que los dos condensadores inferiores se encuentran en serie y el conjunto de ellos en paralelo con el tercero. Por tanto la capacidad del conjunto es:

La capacidad de 2-1 y 4-3  $\frac{1}{C_A} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_A = \frac{C}{2}$

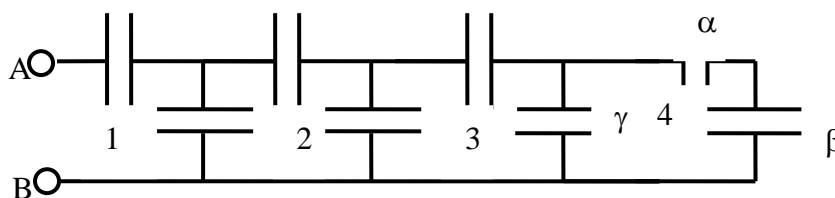
La capacidad equivalente  $C_E = \frac{C}{2} + C = \frac{3}{2} C$

La capacidad de cada condensador plano es:  $C = \epsilon \frac{S}{d} \Rightarrow C_E = \frac{3}{2} \frac{\epsilon S}{d}$

10.- Determinar la capacidad equivalente entre A y B en el circuito de la figura inferior. Los condensadores son iguales y la capacidad de cada uno es C.



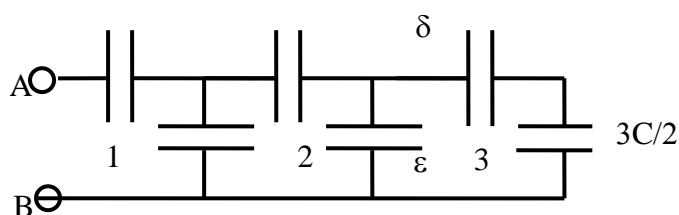
Supongamos que en lugar de ser infinitas las mallas solamente son cuatro



Vamos a eliminar la malla 4 sustituyéndola por un solo condensador. Los condensadores  $\alpha$  y  $\beta$  están en serie y el conjunto de los dos en paralelo con el  $\gamma$ . Los tres pueden sustituirse por un solo condensador

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_1 = \frac{C}{2} \Rightarrow C_E = C + \frac{C}{2} = \frac{3C}{2}$$

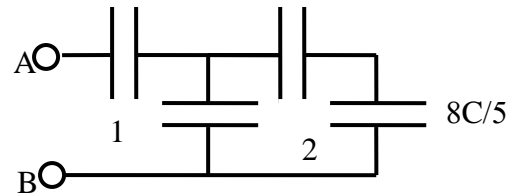
El sistema de condensadores quedaría así:



En la malla 3 sustituimos los condensadores  $\epsilon$ ,  $\delta$  y el de capacidad  $3C/2$  por un solo condensador

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{2}{3C} \Rightarrow C_2 = \frac{3C}{6} \Rightarrow C_E = C + \frac{3C}{5} = \frac{8C}{5}$$

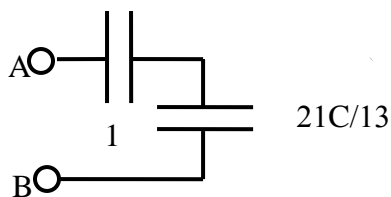
El sistema de condensadores quedaría así



Los tres condensadores de la malla 2 los sustituimos por un solo condensador

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C} + \frac{5}{8C} \Rightarrow C_3 = \frac{8C}{13} \Rightarrow C_E = C + \frac{8C}{13} = \frac{21C}{13}$$

El sistema de condensadores quedaría así



La capacidad entre A y B es:

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C} + \frac{13}{21C} \Rightarrow C_{AB} = \frac{21C}{34}$$

Analicemos la secuencia obtenida

$$\frac{3C}{2} ; \frac{8C}{5} ; \frac{21C}{13} ; C_{AB} = \frac{21C}{34}$$

De los tres primeros términos se deduce que el denominador de uno de ellos es igual a la suma de numerador y denominador del anterior y que su numerador es igual a la suma del numerador del anterior más su propio denominador, en general

$$\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} ; \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1} + (x_{n-1} + y_{n-1})}{x_{n-1} + y_{n-1}} = \frac{2x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}} = \frac{2\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + 1}{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + 1} = \frac{2a + 1}{a + 1}$$

Si nos fijamos en el valor de la capacidad equivalente resulta que su numerador es igual al del último término y su denominador es la suma del numerador y denominador del último término, en general

$$C_{AB} = \frac{x_n}{x_n + y_n} = \frac{\frac{x_n}{y_n}}{\frac{x_n}{y_n} + 1} = \frac{a}{a + 1} \quad (1)$$

Para averiguar el valor de  $a$  establecemos que cuando existen infinitas mallas

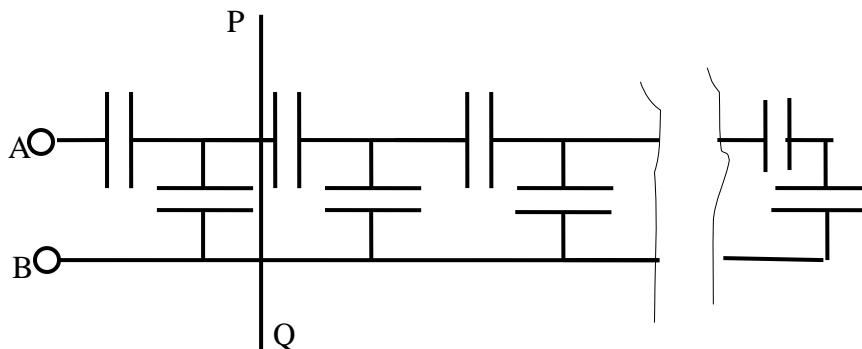
$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0 \Rightarrow \frac{2a+1}{a+1} - a = 0 \Rightarrow 2a+1 - a^2 - a = 0 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Sustituyendo la solución positiva en la ecuación (1)

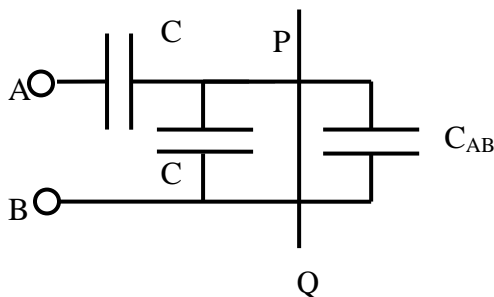
$$C_{AB} = \frac{a}{a+1} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{9-5} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow$$

$$C_{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Otra forma de abordar el problema se basa en que al existir infinitas mallas, el añadir o quitar una no debe afectar al resultado, según esto podemos reducir el sistema al siguiente



Todo lo que está a la derecha de la línea PQ tiene una capacidad  $C_{AB}$  y el sistema siguiente también, en virtud de que añadir una malla a la serie infinita no afecta al resultado



Los condensadores  $C_{AB}$  y  $C$  (el que está más cerca de la línea PQ) están en paralelo y su equivalente es:

$$C' = C_{AB} + C$$

$C'$  está en serie con el otro  $C$ , por tanto, la capacidad equivalente es:

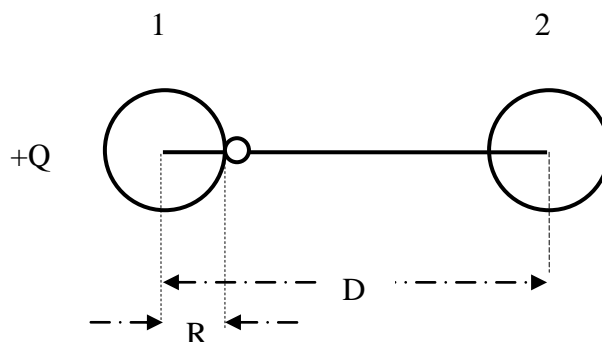
$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_{AB} + C} = \frac{C_{AB} + 2C}{C^2 + C_{AB}C} \Rightarrow C'' = C_{AB} = \frac{C^2 + C_{AB}C}{C_{AB} + 2C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{AB}^2 + 2C_{AB}C = C^2 + C_{AB}C \Rightarrow C_{AB}^2 + C_{AB}C - C^2 = 0 \Rightarrow C_{AB} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4C^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

**11.- Dos esferas de radio  $R$  y carga  $+Q$  (la carga de cada esfera está distribuida uniformemente sobre su superficie), están separadas una distancia  $D \gg R$ . Una de las esferas lleva adherida en su superficie una muy pequeña esfera de carga  $-q$  y masa  $m$ . Determinar qué velocidad mínima hay que comunicar a esa pequeña esfera para que se adhiera a la otra esfera.**

La situación inicial está reflejada en la figura



La esfera pequeña está sometida a dos fuerzas de naturaleza eléctrica, una dirigida al centro de la esfera 1 y otra dirigida al centro de la esfera 2. La primera fuerza es más intensa porque la distancia de la esfera uno a la esfera pequeña es  $R$  mientras que la de la esfera 2 es  $D-R > R$ . En consecuencia para despegar la esfera pequeña de la esfera 1 hemos de comunicarle una cierta velocidad, la cual nos bastará con que al llegar a la distancia  $D/2$  tenga velocidad nula, ya que a partir de ese momento la atracción de la esfera 2 es mayor que la de la esfera 1.

Dado que los campos son conservativos establecemos la suma de la energía inicial ((cinética + potencial eléctrica) y cuando la esfera pequeña esté en  $D/2$  (energía cinética nula + energía potencial eléctrica)

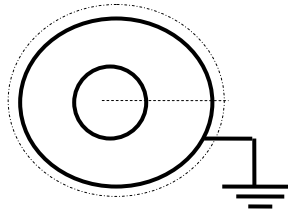
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{D-R} = 0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{\frac{D}{2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{\frac{D}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{D-R} - \frac{2}{D} - \frac{2}{D} \right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Qq}{2m\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{D-R} - \frac{4}{D} \right)}$$

12.- Una esfera metálica de radio  $R$  esta cargada a un potencial  $V$ . Calcular el potencial de la mencionada esfera si

a) Se rodea de una capa esférica, de radio  $R_2$  y espesor despreciable, concéntrica con la esfera y se conecta a tierra. b) Si en lugar de unir la capa esférica a tierra se une a la esfera c) si se rodea de una capa esférica cuyo radio interior es  $R_2$  y el exterior  $R_3$  y la unimos a tierra.

a) Supongamos una superficie esférica exterior a la capa esférica de radio  $r > R_2$



El potencial de la capa esférica es cero ya que está unida a tierra,  $V_r = 0$

Aplicamos el teorema de Gauss. El flujo eléctrico que atraviesa la superficie esférica de radio  $r \geq R_2$  es:

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sum q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int -dV_r = \frac{\sum q}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{\sum q}{4\pi \epsilon_0 r} + \text{Cte} \Rightarrow \text{cuando } r = \infty, \quad V_r = 0 \rightarrow \text{Cte} = 0 \Rightarrow V_r = \frac{\sum q}{4\pi \epsilon_0 r} = 0$$

De la última expresión se deduce  $\sum q = 0$ , por lo que si la carga de la esfera es  $+Q$  la de la capa esférica es  $-Q$ .

Designamos con  $V_1$  el potencial que tiene ahora la esfera y calculamos el campo en un lugar  $R_1 \leq r \leq R_2$

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int -dV_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + \text{Cte} \Rightarrow \text{cuando } r = R_2, \quad V_r = 0 \rightarrow \text{Cte} = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_2} \quad (1)$$

Dado que la ecuación (1) la podemos aplicar cuando  $r = R_1$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_1} \cdot R_1 \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \Rightarrow V_1 = V \frac{R_2 - R_1}{R_2}$$

b) Si unimos la esfera a la capa esférica pasará carga de la esfera a la capa hasta que los potenciales se igualen. La carga  $Q$  inicial se reparte entre la esfera y la capa esférica  $Q = q_1 + q_2$ . Designamos con  $V_2$  al nuevo potencial de la esfera.

Calculamos el campo en  $r$ , siendo  $r$  prácticamente igual a  $R_2$  (como en la figura superior)

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int -dV_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

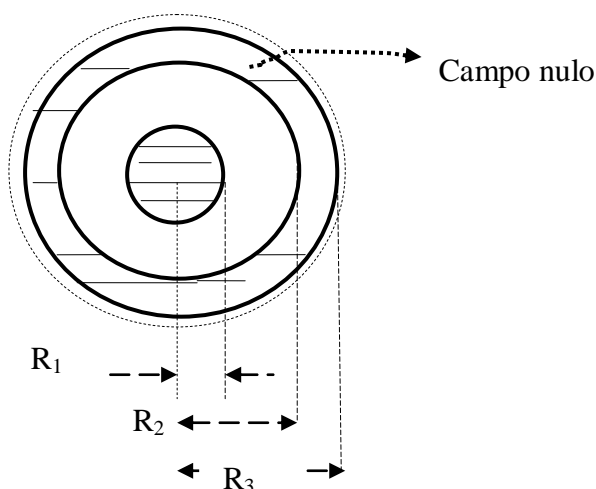
$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + \text{Cte} \Rightarrow \text{cuando } r = \infty, \quad V_r = 0 \rightarrow \text{Cte} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} \quad (2)$$

En la ecuación (2) cuando  $r=R_2$ ,  $V_r = V_2$ , ya que los potenciales se igualan

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_1} \frac{R_1}{R_2} = V \frac{R_1}{R_2}$$

c) En el interior de la capa esférica el campo es nulo ya que la mencionada capa es conductora.



Calculemos el campo en un lugar en que  $R_2 \leq r \leq R_3$ , esto es en el interior de la capa esférica donde el campo es nulo.

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sum q}{4\pi r^2 \epsilon_0} = 0 \Rightarrow \sum q = 0$$

Como la carga de la esfera es  $Q$  sobre el interior de la capa esférica (radio  $R_2$ ) aparece una carga  $-Q$ , y por influencia aparece en el exterior de la capa esférica una carga  $+Q$ .

Calculamos ahora el campo en un lugar donde  $r > R_3$

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q - Q + Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int -dV_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + \text{Cte} \Rightarrow \text{cuando } r = \infty, \quad V_r = 0 \rightarrow \text{Cte} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} \quad (3)$$

En la expresión (3) cuando  $r = R_3$  tenemos el potencial en la cara externa de la capa esférica y también la cara interna ya que al ser el campo nulo en su interior su potencial es constante.

Calculamos ahora el campo y el potencial en un lugar en que  $R_1 \leq r \leq R_2$  y siguiendo los pasos ya aplicados anteriormente obtenemos

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r} + \text{Cte} \quad (4)$$

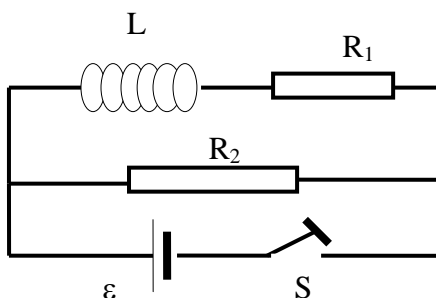
En la ecuación anterior cuando  $r = R_2$  el potencial vale  $V_r$  de la ecuación (3) para  $r = R_3$

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R_3} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R_2} + \text{Cte} \Rightarrow \text{Cte} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Volviendo a la ecuación (4) y aplicándola para  $r = R_1$  y designando con  $V_3$  al nuevo potencial

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = V - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = V - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3} \right)$$

13.- En el circuito de la figura inferior se ha cerrado el interruptor  $S$  y se ha establecido la corriente estacionaria. Si ahora se levanta el interruptor, queda desconectada la batería del circuito. Determinar a partir de ese instante, la cantidad de calor que se desprende en la resistencia  $R_2$ .



Cuando  $S$  está cerrado y se ha establecido la corriente estacionaria, y se tiene en cuenta que  $R_1$  y  $R_2$  están en paralelo, el valor de la intensidad que circula por la batería es :

$$I = \frac{\varepsilon}{\sum R} = \frac{\varepsilon}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{\varepsilon(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$$

La intensidad de la corriente que atraviesa la resistencia  $R_1$  es:  $I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}$

La energía almacenada en la autoinducción es:

$$E = \frac{1}{2} L I_1^2$$

Al abrir  $S$  la energía almacenada en la autoinducción se transforma en energía térmica en cada resistencia. Ahora las resistencias se encuentran en serie.

$$E = \frac{1}{2} L I_1^2 = E_1 + E_2$$

Las energías desprendidas en cada resistencia son proporcionales a sus valores

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow E_1 = E_2 \frac{R_1}{R_2}$$

$$E = \frac{1}{2} L I_1^2 = E_2 \frac{R_1}{R_2} + E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} L \frac{\varepsilon^2}{R_1^2} = E_2 \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 L R_2}{R_1^2 (R_1 + R_2)}$$

**14.- Un generador de corriente alterna cuya fuerza electromotriz está dada por la expresión  $\varepsilon = \varepsilon_0 \text{ sen } \omega t$  se une a una autoinducción  $L$  sin resistencia óhmica. Determinar cómo varía la intensidad en la autoinducción en función del tiempo.**

Al conectar la corriente aparece en la autoinducción una fuerza electromotriz inducida cuyo valor es:  $-L \frac{di}{dt}$ , por tanto, al no haber resistencia en el circuito  $i R = 0$

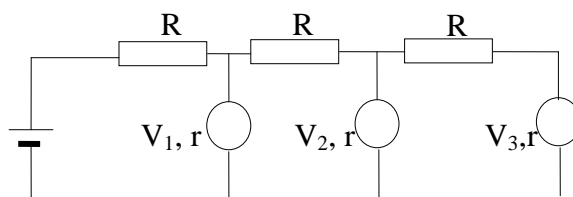
$$\begin{aligned} \varepsilon - L \frac{di}{dt} = 0 &\Rightarrow \varepsilon_0 \text{ sen } \omega t - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \int L di = \int \varepsilon_0 \text{ sen } \omega t \Rightarrow \\ &\Rightarrow Li = -\frac{\varepsilon_0}{\omega} \cos \omega t + \text{Cte} \end{aligned}$$

Cuando  $t=0$ ,  $i=0$  luego

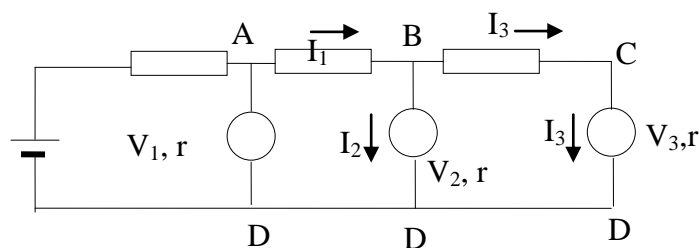
$$\text{Cte} = \frac{\varepsilon_0}{\omega}$$

$$i = \frac{\varepsilon_0}{L\omega} (1 - \cos \omega t)$$

15.- En el circuito de la figura las resistencias son iguales a  $R$  y los voltímetros son idénticos, cada uno con una resistencia interna  $r$ . El voltímetro 1 indica  $10\text{ V}$  y el 3 marca  $8\text{ V}$ . ¿Qué indicará el voltímetro 2?



Establecemos las intensidades en las mallas



$$V_A - V_D = V_1 = I_1 R + I_2 r \quad ; \quad I_2 = \frac{V_2}{r}$$

$$V_B - V_D = V_2 = I_3 R + I_3 r \quad ; \quad I_3 = \frac{V_3}{r}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Combinando la tercera ecuación con la primera y sustituyendo el valor de  $I_3$ .

$$V_1 = (I_2 + I_3)R + I_2 r = I_2(R + r) + I_3 R = V_2 \frac{R + r}{r} + \frac{V_3}{r} R \quad (1)$$

A partir de las segundas ecuaciones

$$V_2 = V_3 \frac{R}{r} + V_3 \quad (2)$$

Despejamos  $\frac{R}{r} = x$  de la ecuación (2)  $x = \frac{R}{r} = \frac{V_2 - V_3}{V_3}$  y lo llevamos a la (1)

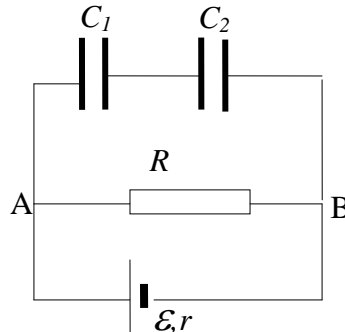
$$V_1 = V_2 \frac{R + r}{r} + \frac{V_3}{r} R = V_2(x + 1) + V_3 x = V_2 \left( \frac{V_2 - V_3}{V_3} + 1 \right) + V_3 \left( \frac{V_2 - V_3}{V_3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{V_2^2}{V_3} + V_2 - V_3 \Rightarrow V_2^2 + V_2 V_3 - V_3^2 - V_1 V_3 = 0 \Rightarrow V_2^2 + 8 V_2 - 64 - 80 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$V_2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 144}}{2} = 8,6 \text{ V}$$

16. Calcular en el circuito de la figura la caída de tensión en cada uno de los condensadores. Se sabe que si la resistencia  $R$  se cortocircuita, la intensidad que pasa por la batería se triplica respecto a la que pasa por el circuito de la figura.



Designamos con  $\Delta V_1$  la caída de tensión en el condensador 1 y con  $\Delta V_2$  la caída de tensión en el condensador 2.

$$V_A - V_B = \Delta V_1 + \Delta V_2 = IR = \varepsilon - Ir \quad (1)$$

Los dos condensadores están en serie, por tanto ambos tienen la misma carga en sus armaduras y se cumplirá que

$$q = C_1 \Delta V_1 = C_2 \Delta V_2$$

Si cortocircuitamos la resistencia  $R$  poniendo un cable sin resistencia entre  $A$  y  $B$  la intensidad de la corriente que atraviesa la batería es  $3I$

$$3I = \frac{\varepsilon}{r} \Rightarrow Ir = \frac{\varepsilon}{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

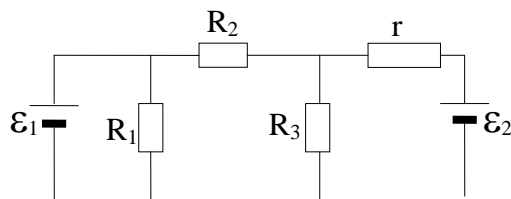
$$V_A - V_B = \Delta V_1 + \Delta V_2 = IR = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

Sustituyendo  $\Delta V_1$  y  $\Delta V_2$  en función de  $q$  y las capacidades de los condensadores, resulta:

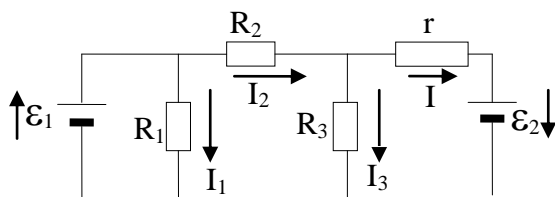
$$\frac{2\varepsilon}{3} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \frac{q(C_1 + C_2)}{C_1 C_2} \Rightarrow q = \frac{2\varepsilon}{3} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\Delta V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{2\varepsilon}{3} \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad ; \quad \Delta V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{2\varepsilon}{3} \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

17.- Calcular la intensidad de la corriente que circula por la resistencia  $r$  del circuito de la figura inferior. La resistencia interna de las pilas es despreciable.



Admitimos que las fuerzas electromotrices  $\varepsilon$  son positivas del polo positivo al negativo y establecemos intensidades de corriente en las mallas.



Tomamos como sentido positivo el movimiento de las agujas de un reloj.

$$\text{Primera malla} \quad \varepsilon_1 = I_1 R_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1}$$

$$\text{Segunda malla} \quad -I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 R_2 = I_1 R_1 - I_3 R_3$$

$$\text{Tercera malla} \quad I r - I_3 R_3 = \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{I r - \varepsilon_2}{R_3}$$

$$\text{Nudo} \quad I_2 = I_3 + I \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{I r - \varepsilon_2}{R_3} + I$$

Sustituyendo  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{I r - \varepsilon_2}{R_3} R_2 + I R_2 &= \frac{\varepsilon_1}{R_1} R_1 - \frac{I r - \varepsilon_2}{R_3} R_3 \Rightarrow I \left( \frac{r R_2}{R_3} + R_2 + r \right) - \frac{\varepsilon_2 R_2}{R_3} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow I (r R_2 + R_2 R_3 + r R_3) &= \varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_2 (R_2 + R_3) \Rightarrow I = \frac{\varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_2 (R_2 + R_3)}{r (R_2 + R_3) + R_2 R_3} \end{aligned}$$

**18.- Una resistencia  $R$  y un condensador  $C$  pueden colocarse en serie o en paralelo. La impedancia en el primer caso es el doble que en el segundo para una cierta pulsación  $\omega$ . ¿Cuál es el valor de esa pulsación?**

Cuando están colocados en serie la impedancia del circuito es:

$$Z_s = R - \frac{1}{C\omega} i$$

Cuando están colocados en paralelo la impedancia es:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{-\frac{1}{C\omega} i} = \frac{1}{R} + C\omega i = \frac{1 + RC\omega i}{R} \Rightarrow Z_p = \frac{R}{1 + RC\omega i} = \frac{R(1 - RC\omega i)}{1 + R^2 C^2 \omega^2}$$

Como  $Z_s = 2Z_p \Rightarrow R - \frac{1}{C\omega} i = \frac{2R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} - \frac{2R^2 C \omega i}{1 + R^2 C^2 \omega^2}$

De la igualdad anterior se deduce que las partes reales sean iguales y también las imaginarias

$$R = \frac{2R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \Rightarrow 1 + R^2 C^2 \omega^2 = 2 \Rightarrow R^2 C^2 \omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC}$$

$$-\frac{1}{C\omega} = -\frac{2R^2 C \omega}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \Rightarrow 2R^2 C^2 \omega^2 = 1 + R^2 C^2 \omega^2 \Rightarrow R^2 C^2 \omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC}$$

**19.- Se disponen de  $n$  pilas iguales, cada una con un fuerza electromotriz  $\varepsilon$  y una resistencia interna  $r$ . Con ellas se forman  $\beta$  grupos cada uno de ellos con  $\alpha$  pilas en serie. Los grupos  $\beta$  se asocian en paralelo. El conjunto de pilas se unen a una resistencia externa  $R$ . Se piden los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para que la intensidad de la corriente que atraviese la resistencia  $R$  sea la máxima posible y también el valor de dicha intensidad.**

Cada uno de los grupos  $\beta$  tiene una fuerza electromotriz  $\alpha\varepsilon$ . Al ponerlos en paralelo el conjunto tiene esa fuerza electromotriz. Veamos ahora cuál es la resistencia eléctrica del conjunto. Cada grupo  $\beta$  tiene  $\alpha$  pilas en serie por tanto la resistencia es  $\alpha r$ . Como existen  $\beta$  grupos asociados en paralelo la resistencia total  $R_e$  es:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{\alpha r} + \frac{1}{\alpha r} + \dots = \frac{\beta}{\alpha r} \Rightarrow R_e = \frac{\alpha r}{\beta}$$

En definitiva es como si tuviésemos una pila de fuerza electromotriz  $\alpha\varepsilon$  y una resistencia interna  $\frac{\alpha r}{\beta}$ , la cual se une a una resistencia externa  $R$ . Aplicamos la ley de Ohm generalizada:

$$i = \frac{\alpha\varepsilon}{R + \frac{\alpha r}{\beta}}$$

$\alpha$  y  $\beta$  están relacionadas entre sí :  $n = \alpha\beta$  ; sustituyendo en la intensidad nos queda

$$i = \frac{\alpha\varepsilon}{R + \frac{\alpha r}{\beta}} = \frac{\alpha\varepsilon}{R + \frac{\alpha^2 r}{n}} = \frac{n\alpha \varepsilon}{nR + \alpha^2 r}$$

Como la intensidad es máxima derivamos la función anterior respecto de la variable  $\alpha$  e igualamos a cero

$$\frac{di}{d\alpha} = \frac{(nR + \alpha^2 r)n\varepsilon - n\alpha \varepsilon \cdot 2\alpha r}{(nR + \alpha^2 r)^2} = 0 \Rightarrow nR + \alpha^2 r = 2\alpha^2 r \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{nR}{r}}$$

$$\beta = \frac{n}{\sqrt{\frac{nR}{r}}} = \frac{n\sqrt{r}}{\sqrt{nR}} = \sqrt{\frac{nr}{R}}$$

Para hallar el valor de la intensidad máxima sustituimos los valores de  $\alpha$  en la ecuación de la intensidad.

$$i = \frac{n\alpha \varepsilon}{nR + \alpha^2 r} = \frac{n\sqrt{\frac{nR}{r}} \cdot \varepsilon}{nR + \frac{nR}{r} \cdot r} = \frac{\varepsilon}{2R} \sqrt{\frac{nR}{r}} = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{n}{Rr}}$$

Planteamos ahora la siguiente situación. Tenemos 60 pilas de resistencia interna cada una  $r = 1 \Omega$  y las vamos a utilizar todas agrupándolas con distintos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . Los casos posibles, con sus resistencias internas de la agrupación son:

$\alpha$	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
$\beta$	60	30	20	15	12	10	6	5	4	3	2	1
$R_i/\Omega$	0,016	0,066	0,15	0,266	0,416	0,6	1,66	2,4	3,75	6,66	15	60

Los valores de la resistencia exterior  $R$  si coinciden con los de la resistencia interna  $R_i$ , darán lugar a máximos de intensidad, por ejemplo si  $R = 15 \Omega$ , entonces la disposición estaría formada por dos agrupaciones de 30 pilas cada una y ambas colocadas en paralelo. Si  $R$  está comprendida entre dos valores de  $R_i$  una de las dos proporciona la máxima intensidad o ambas la misma, por ejemplo, si elegimos  $5,5 \Omega$  entonces caben dos posibilidades: 4 agrupaciones de 15 pilas o 3 agrupaciones de 20 pilas. La decisión entre las dos depende de la intensidad que proporcionen:

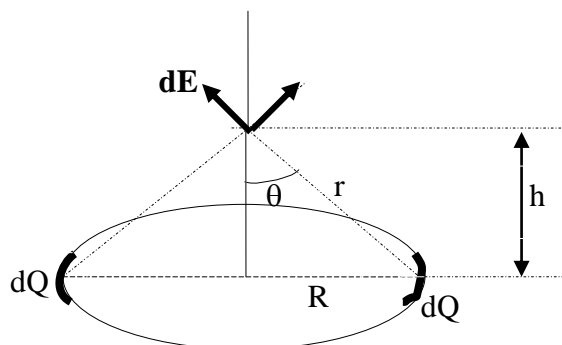
$$i = \frac{\alpha \varepsilon}{R + \frac{\alpha r}{\beta}} = \frac{15 \varepsilon}{5,5 + \frac{15}{4}} = 1,62 \varepsilon \quad ; \quad i = \frac{20 \varepsilon}{R + \frac{\alpha r}{\beta}} = \frac{20 \varepsilon}{5,5 + \frac{20}{3}} = 1,64 \varepsilon$$

Si  $R > 60 \Omega$ , entonces la máxima intensidad la dará la agrupación en que todas las pilas se dispongan en serie y si  $R < 0,016 \Omega$  la agrupación que dará mayor intensidad es colocar todas las pilas en paralelo.

20.-Un aro (asimilable a una circunferencia de radio  $R$ ) tiene distribuida de forma uniforme una carga  $Q$ . El aro esta situado en el plano  $XY$  y el eje  $Z$  es perpendicular al plano del anillo y pasa por su centro. Se pide calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$  en cualquier punto  $+h$  del eje  $Z$  positivo y determinar el valor de  $h$  para el cual el módulo de  $\vec{E}$  es el máximo. Dibujar la gráfica de  $E$  frente a  $h$  cuando  $R=10\text{ cm}$  y  $Q=10^{-9}\text{ C}$

$$\text{Dato } \frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

En la figura inferior se representan los campos que crean dos trozos infinitesimales del aro en un punto  $+h$  del eje  $Z$ . Se observa que esos campos tienen componentes iguales y opuestas en la dirección del eje  $X$  y que, por tanto, al sumar estas componentes se anulan, mientras que las del eje  $Z$  tienen la misma dirección y sentido. Luego el campo tiene la dirección positiva del eje  $Z$  y es la componente de  $d\mathbf{E}$  sobre el citado eje  $Z$ , cuyo valor en módulo es  $dE \cos \theta$ .



$$dE_z = dE \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cdot \cos\theta$$

El módulo del campo  $E_z$  se obtiene integrando la expresión anterior

$$E_z = \int_0^Q \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \cos\theta$$

Introduciendo el valor de  $h$ .

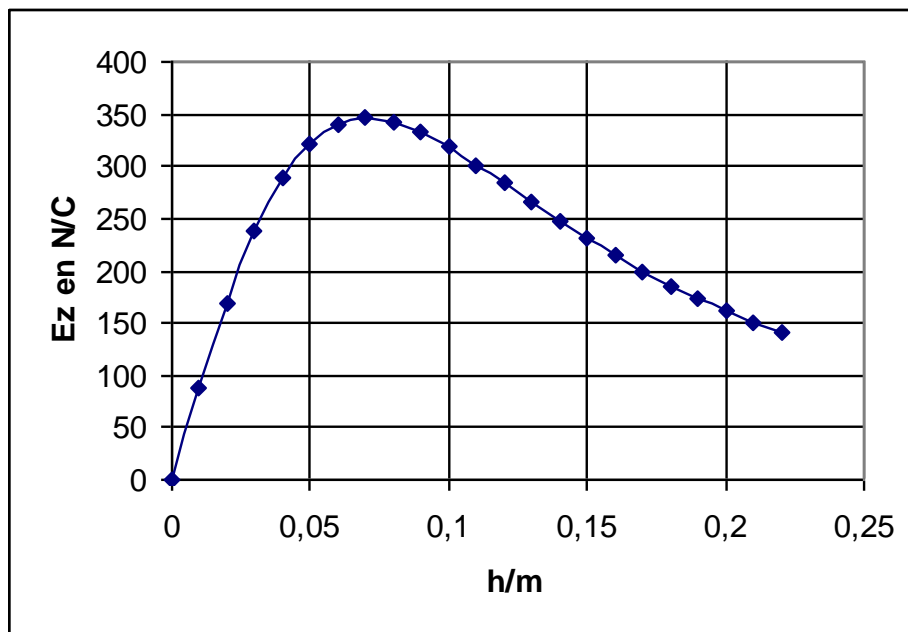
$$r^2 = R^2 + h^2 \quad ; \quad \cos\theta = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$$

Para hallar el valor de  $E_z$  máximo derivamos la anterior función respecto de  $h$  e igualamos a cero

$$\frac{dE_z}{dh} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - h \cdot \frac{3}{2}(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2h}{(R^2 + h^2)^3} = 0 \Rightarrow (R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - 3h^2(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 + h^2 = 3h^2 \Rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



21.-a) Calcular la energía que posee una esfera conductora y aislada de radio  $R$  y que posee una carga  $+Q$ .

b) Calcular la energía de dos capas esféricas de pequeño espesor si son concéntricas de radios  $R_1$  y  $R_2$ , siendo  $R_2 > R_1$ , las cuales poseen cargas eléctricas  $+Q_1$  y  $+Q_2$ , respectivamente.

a) Para calcular la energía de la esfera cargada suponemos que ella está inicialmente descargada y nosotros la vamos cargando transportando cargas  $+dq$  desde el infinito hasta la esfera.. Cada pequeña carga que llevemos supone un trabajo que hemos de aportar y la suma de todos esos trabajos, hasta cargar la esfera, nos mide la energía que puede almacenar.

Supongamos que en un determinado momento la carga de la esfera es  $+q$  y si una carga  $+dq$  se traslada desde el infinito a la esfera, el trabajo vale:

$$dW = dq(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}}) = dq(V_{\infty} - V_{\text{llegada}}) = dq\left(0 - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R}\right)$$

Observe que al ser  $dq$  positiva y  $q$  también positiva, hemos de hacer un trabajo exterior contra las fuerzas del campo, el cual da lugar a que la esfera adquiera energía.

Para calcular el trabajo total sumamos esos trabajos  $dW$ , lo que equivale a integrar la expresión anterior entre los límites cero y  $Q$ .

$$W = \int_0^Q -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R} dq = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q^2}{2} \Big|_0^Q = -\frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R}$$

La energía de la esfera llamada energía propia vale

$$E_{\text{propia}} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R}$$

b) Para este caso supongamos que ambas esferas están descargadas y procedemos a cargar la de radio  $R_1$  y cuando ésta tenga la carga  $Q_1$ , procedemos a cargar la esfera de radio  $R_2$ .

El cálculo para la esfera interior ya se ha hecho en el apartado a. Para la segunda esfera hay que tener en cuenta que se encuentra a un cierto potencial debido a la influencia de la carga interior  $Q_1$  de la esfera interior y que además adquiere otro potencial como consecuencia de la carga  $q$  que va a ir adquiriendo, hasta tomar finalmente  $Q_2$ .

$$dW_2 = dq(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}}) = dq(V_{\infty} - V_{\text{llegada}}) = \left(0 - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1}{R_2} - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R_2}\right) dq \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_2 = \int_0^{Q_2} -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1}{R_2} dq + \int_0^{Q_2} -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R_2} dq = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_2} - \frac{Q_2^2}{4\pi \epsilon_0 R_2}$$

La energía almacena por el sistema de las dos esferas, vale:

$$E = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_2} + \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q_2^2}{R_2}$$

22.- Se desea construir un circuito serie LCR de modo que para una frecuencia de 10 kHz, la impedancia del circuito sea 1,3 k $\Omega$ , su frecuencia de resonancia 5,0 kHz y la intensidad de la corriente esté retrasada 60° respecto de la tensión.

- Calcular los valores de L, R y C
- Si el voltaje eficaz de la fuente del circuito es 130 V, calcular la intensidad eficaz en el circuito y las tensiones eficaces en cada uno de los elementos
- Calcular la potencia media en el circuito y la potencia media en cada uno de sus elementos.
- Si se mantienen las mismas L, R y C obtenidas en el apartado a), así como el voltaje eficaz, se pide calcular la frecuencia de la corriente alterna para la que la potencia consumida en el circuito sea la máxima posible.
- Determine para que frecuencias la potencia consumida en el circuito es 8 W.

- a) Teniendo en cuenta que la intensidad de la corriente está retrasada respecto del voltaje, esto nos indica que es un circuito en que la reactancia inductiva es mayor que

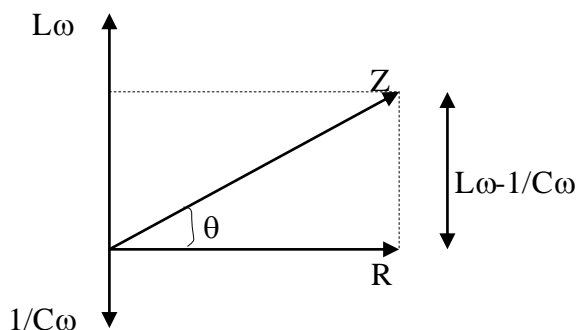


Fig.1

la reactancia capacitiva. Un esquema (fig.1), no a escala, nos indica este hecho. De la figura 1 se deduce

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2} ; \quad (1,3 \cdot 10^3)^2 = R^2 + \left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2 \quad (1)$$

$$\text{tag}\theta = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \text{tag } 60^\circ \quad (2)$$

La resonancia ocurre cuando

$$L\omega_R = \frac{1}{C\omega_R} \Rightarrow L = \frac{1}{C\omega_R^2} = \frac{1}{C4\pi^2(5,0 \cdot 10^3)^2} \Rightarrow L = \frac{1,013 \cdot 10^{-9}}{C} \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2).

$$(1,3 \cdot 10^3)^2 - R^2 = (R \cdot \operatorname{tag} 60^\circ)^2 \Rightarrow 1,69 \cdot 10^6 = R^2(1 + \operatorname{tag}^2 60^\circ) \Rightarrow R = \sqrt{\frac{1,69 \cdot 10^6}{4}} = 650 \Omega$$

Combinando (3) con (2).

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = R \cdot \operatorname{tag} 60^\circ \Rightarrow \frac{1,013 \cdot 10^{-9} \cdot \omega}{C} - \frac{1}{C\omega} = 650 \cdot \operatorname{tag} 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,013 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^2 - 1 = 650 \cdot \operatorname{tag} 60^\circ \cdot C\omega \Rightarrow C = \frac{1,013 \cdot 10^{-9} \cdot 4\pi^2 \cdot (10^4)^2 - 1}{650 \cdot \operatorname{tag} 60^\circ \cdot 2\pi \cdot 10^4} = 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ F}$$

De la ecuación (3)

$$L = \frac{1,03 \cdot 10^{-9}}{4,2 \cdot 10^{-8}} = 0,025 \text{ H}$$

b)

$$I_{\text{efz}} = \frac{V_{\text{efz}}}{Z} = \frac{130}{1,3 \cdot 10^3} = 0,10 \text{ A}$$

En la resistencia  $V_{\text{efz}}^R = I_{\text{efz}} \cdot R = 0,10 \cdot 650 = 65 \text{ V}$

En el condensador  $V_{\text{efz}}^C = I_{\text{efz}} \cdot \frac{1}{C2\pi \cdot f} = 0,10 \cdot \frac{1}{4,2 \cdot 10^{-8} \cdot 2\pi \cdot 10^4} = 37,9 \text{ V}$

En la autoinducción  $V_{\text{efz}}^L = I_{\text{efz}} \cdot L2\pi \cdot f = 0,10 \cdot 0,025 \cdot 2\pi \cdot 10^4 = 157 \text{ V}$

c) Potencia media en el circuito

$$\langle P \rangle = I_{\text{efz}} V_{\text{efz}} \cos\theta = 0,10 \cdot 130 \cdot \cos 60^\circ = 6,5 \text{ W}$$

Potencia media en la resistencia

$$\langle P \rangle_R = I_{\text{efz}}^2 R = 0,1^2 \cdot 650 = 6,5 \text{ W}$$

Las potencias medias tanto en el condensador como en la bobina son nulas.

d)

$$\langle P \rangle = I_{\text{efz}} V_{\text{efz}} \cos\theta = \frac{V_{\text{efz}}}{Z} V_{\text{efz}} \frac{R}{Z} = V_{\text{efz}}^2 \frac{R}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Para que la potencia sea máxima el denominador debe ser mínimo y eso ocurre cuando

$L\omega = \frac{1}{C\omega}$ , lo que significa que el circuito está en resonancia, la frecuencia de resonancia es un dato del problema y es 5 kHz.

La potencia media máxima vale:

$$\langle P_{\max} \rangle = I_{\text{efz}} V_{\text{efz}} = 0,1 \cdot 130 = 13 \text{ W}$$

e)

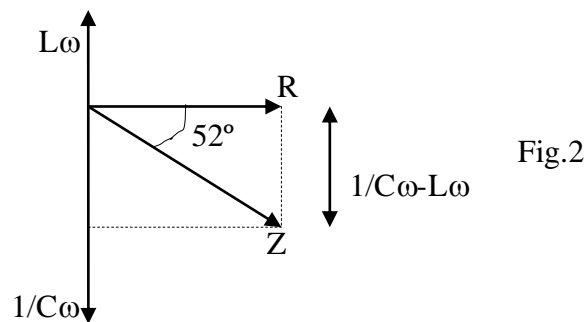
$$\langle P \rangle = 8 = I_{\text{efz}} V_{\text{efz}} \cos\theta = 0,10 \cdot 130 \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{8}{13}$$

Para el valor del coseno anterior existen dos soluciones  $\theta = 52^\circ$  y  $\theta = -52^\circ$ . Para el primer valor en el circuito predomina la reactancia inductiva (como se observa en la figura1), para el segundo valor de  $\theta$  predomina la reactancia capacitiva.

En el primer caso

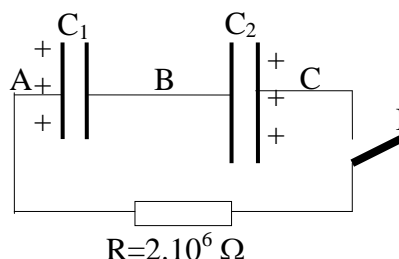
$$\begin{aligned} \cos\theta = \frac{8}{13} &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \Rightarrow \frac{64}{169} = \frac{R^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 64R^2 + 64\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 &= 169R^2 \Rightarrow 1,64 * 650^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \Rightarrow 832 = L\omega - \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \\ \Rightarrow LC\omega^2 - 832C\omega - 1 &= 0 \Rightarrow 1,05 \cdot 10^{-9} \omega^2 - 3,49 \cdot 10^{-5} \omega - 1 = 0 \Rightarrow \omega = 51670 = 2\pi f \Rightarrow \\ &\Rightarrow f = 8,2 \text{ kHz} \end{aligned}$$

En el segundo caso, cuando  $\theta = -52^\circ$ , la reactancia capacitiva es mayor que la reactancia inductiva (fig.2).



$$\begin{aligned} \cos\theta = \frac{8}{13} &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}} \Rightarrow \frac{64}{169} = \frac{R^2}{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 64R^2 + 64\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 &= 169R^2 \Rightarrow 1,64 * 650^2 = \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 \Rightarrow 832 = \frac{1}{C\omega} - L\omega \Rightarrow \\ \Rightarrow LC\omega^2 + 832C\omega - 1 &= 0 \Rightarrow 1,05 \cdot 10^{-9} \omega^2 + 3,49 \cdot 10^{-5} \omega - 1 = 0 \Rightarrow \omega = 18429 = 2\pi f \Rightarrow \\ &\Rightarrow f = 2,9 \text{ kHz} \end{aligned}$$

23.- Un condensador  $C_1$  tiene una capacidad de  $5 \cdot 10^{-12}$  F y se carga a una diferencia de potencial de 60 V. Un segundo condensador  $C_2$  tiene una capacidad de  $80 \cdot 10^{-12}$  F y se carga a una tensión de 15 V. Una vez cargados los condensadores se monta el circuito indicado en la figura inferior.



- Calcular la carga y la energía almacenada en cada condensador.
- Se cierra el interruptor I, calcular la intensidad que circula por el circuito en el instante del cierre
- Calcular la carga de cada condensador cuando no circule corriente por el circuito
- Determinar la expresión matemática que indica cómo varía la intensidad de la corriente en el circuito durante el periodo transitorio.
- Calcular la energía perdida por los condensadores durante el proceso.

$$Q_1 = C_1 V_1 = 5 \cdot 10^{-12} \cdot 60 = 3 \cdot 10^{-10} \text{ C} ; Q_2 = C_2 V_2 = 80 \cdot 10^{-12} \cdot 15 = 12 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

$$\text{a) } E_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} 5 \cdot 10^{-12} \cdot 60^2 = 9 \cdot 10^{-9} \text{ J} ; E_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = \frac{1}{2} 80 \cdot 10^{-12} \cdot 15^2 = 9 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

- En el instante de cerrar el interruptor el circuito se compone como si tuviese una fuente de 60 V y otra de 15 en sentido opuesto; aplicando la ley de Ohm generalizada
- 

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2}}{R} = \frac{60 - 15}{2 \cdot 10^6} = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ A}$$

- De acuerdo con la figura del enunciado escribimos

$$V_A - V_B = 60 \text{ V} ; V_C - V_B = 15 \text{ V} \Rightarrow V_A - V_C = 45 \text{ V}$$

Como  $V_A$  es mayor que  $V_C$  el condensador  $C_1$  comenzará a perder carga que será ganada por el condensador  $C_2$ , esto durará hasta que  $(V_A = V_C)_{\text{final}}$ , esto es,  $V_{Af} - V_{Cf} = 0$ .

Llamamos  $\theta$  a la carga perdida por  $C_1$ , que es la ganada por  $C_2$ .

$$V_{Af} - V_{Bf} = \frac{Q_1 - \theta}{C_1}; V_{Cf} - V_{Bf} = \frac{Q_2 + \theta}{C_2} \Rightarrow V_{Af} - V_{Bf} - (V_{Cf} - V_{Bf}) = \frac{Q_1 - \theta}{C_1} - \frac{Q_2 + \theta}{C_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{Af} - V_{Cf} = 0 = (3 \cdot 10^{-10} - \theta) \cdot 80 \cdot 10^{-12} = (12 \cdot 10^{-10} + \theta) \cdot 5 \cdot 10^{-12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 240 \cdot 10^{-10} - 80\theta = 60 \cdot 10^{-10} + 5\theta \Rightarrow \theta = \frac{180 \cdot 10^{-10}}{85} = 2,12 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

$$Q_{1f} = Q_1 - \theta = 3 \cdot 10^{-10} - 2,12 \cdot 10^{-10} = 0,88 \cdot 10^{-10} \text{ C};$$

$$Q_{2f} = Q_2 - \theta = 12 \cdot 10^{-10} - 2,12 \cdot 10^{-10} = 9,88 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

c) En el instante inicial la intensidad de la corriente es  $I_0$ , a medida que transcurre el tiempo la intensidad disminuye hasta anularse.

Designamos con  $i$  a la intensidad un tiempo  $t$  después de cerrar el interruptor, y con  $q$  a la carga que hasta ese momento ha pasado del condensador  $C_1$  al  $C_2$ . La intensidad  $i$  es el cociente entre los voltajes de los condensadores divididos por la resistencia  $R$  del circuito

$$i = \frac{\frac{Q_1 - q}{C_1} - \frac{Q_2 + q}{C_2}}{R} = \frac{\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} - q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}{R} = \frac{V_1 - V_2 - q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}{R}$$

Según hemos visto  $I_0 = \frac{V_1 - V_2}{R}$  y  $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_e}$ , siendo  $C_e$  la capacidad

equivalente al conjunto de los dos condensadores

$$i = \frac{I_0 - \frac{q}{C_e}}{R}$$

De la expresión anterior calculamos la variación de  $i$  con el tiempo

$$\frac{di}{dt} = d \left( \frac{I_0 - \frac{q}{C_e}}{R} \right) = - \frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{RC_e}$$

Como  $\frac{dq}{dt} = i$ , resulta:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{RC_e} \Rightarrow \int \frac{di}{i} = \int -\frac{dt}{RC_e} \Rightarrow \ln i = -\frac{1}{RC_e} t + Cte, \text{ cuando } t = 0, Cte = \ln I_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{i}{I_o} = -\frac{1}{RC_e} t \Rightarrow i = I_o e^{-\frac{1}{RC_e} t}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-12}} + \frac{1}{80 \cdot 10^{-12}} = \frac{17}{80 \cdot 10^{-12}} \Rightarrow C_e = 4,71 \cdot 10^{-12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_e R = 4,71 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^6 = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{C_e R} = 1,06 \cdot 10^5$$

$$i = 2,25 \cdot 10^{-5} e^{-1,06 \cdot 10^5 \cdot t}$$

e) La energía que almacenan los condensadores al final es:

$$E_{1f} = \frac{1}{2} C_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} C_2 V_{2f}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_{1f}^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{2f}^2}{C_2} = \frac{1}{2} \frac{(0,88 \cdot 10^{-10})^2}{5 \cdot 10^{-12}} + \frac{1}{2} \frac{(14,12 \cdot 10^{-10})^2}{80 \cdot 10^{-12}}$$

$$E_{1f} = 1,32 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

La energía contenida en los condensadores al principio era  $18 \cdot 10^{-9} \text{ J}$ .

La energía disipada es:

$$\Delta E = 18 \cdot 10^{-9} - 1,32 \cdot 10^{-8} = 4,8 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

24.- La superficie de una de las armaduras de un condensador plano vale  $S=1 \text{ cm}^2$  y la distancia entre las armaduras  $d = 0,1 \text{ mm}$ . La diferencia de potencial entre las armaduras  $\Delta V = 2,5 \text{ V}$ . Calcular:

a) El campo eléctrico entre las armaduras, la carga de una de las armaduras y la energía almacenada en el condensador.

b) Si se mantiene la carga de las armaduras y se aumenta la distancia entre ellas en  $10^{-6} \text{ m}$ , calcular la variación que experimenta la diferencia de potencial en el condensador.

c) Se une el condensador a una pila de  $2,5 \text{ V}$ , lo que permite mantener fija la diferencia de potencial entre las armaduras, y si una de ellas efectúa un movimiento vibratorio armónico de  $f = 10^5 \text{ Hz}$  y amplitud  $10^{-6} \text{ m}$ , de tal modo que la vibración acerca y aleja a la armadura vibrante de la fija, determinar:

d) La carga de cada armadura en función del tiempo y la intensidad de la corriente que circula por el circuito.

a) El campo, al ser uniforme entre las armaduras del condensador, está relacionado con la diferencia de potencial por la ecuación

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{2,5 \text{ V}}{0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2,5 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Para calcular la carga de una de las armaduras hacemos uso de la relación

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow Q = C \Delta V = \frac{\epsilon_0 S}{d} \Delta V = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-4}}{0,1 \cdot 10^{-3}} \cdot 2,5 = 2,21 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

$$E = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 S}{d} \cdot \Delta V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} \cdot 2,5^2 = 2,76 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

b) Al aumentar la distancia entre las armaduras y permanecer constante la carga de las armaduras, la nueva capacidad es:

$$C' = \frac{\epsilon_0 S}{d + 10^{-6}} \Rightarrow \Delta V' = \frac{Q}{C'} = \frac{C \Delta V}{C'} = \frac{\frac{\epsilon_0 S}{d} \cdot \Delta V}{\frac{\epsilon_0 S}{d + 10^{-6}}} \cdot \Delta V = \frac{d + 10^{-6}}{d} \cdot \Delta V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V' - \Delta V = \Delta V \left( \frac{d + 10^{-6}}{d} - 1 \right) = 2,5 \cdot \left( \frac{0,1 \cdot 10^{-3} + 10^{-6}}{0,1 \cdot 10^{-3}} - 1 \right) = 0,025 \text{ V}$$

c) Suponemos que cuando  $t=0$  la distancia entre las armaduras es  $d$ , al variar la distancia entre las armaduras varía la capacidad del condensador, aunque la batería mantiene la diferencia de potencial de 2,5 V. La distancia entre las armaduras en función del tiempo es  $d' = d + A \sin 2\pi f t$  y la capacidad del condensador y la carga de una de sus armaduras

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d + A \sin 2\pi f t} = \frac{Q}{2,5} \Rightarrow Q = \frac{2,5 \epsilon_0 S}{d + A \sin 2\pi f t}$$

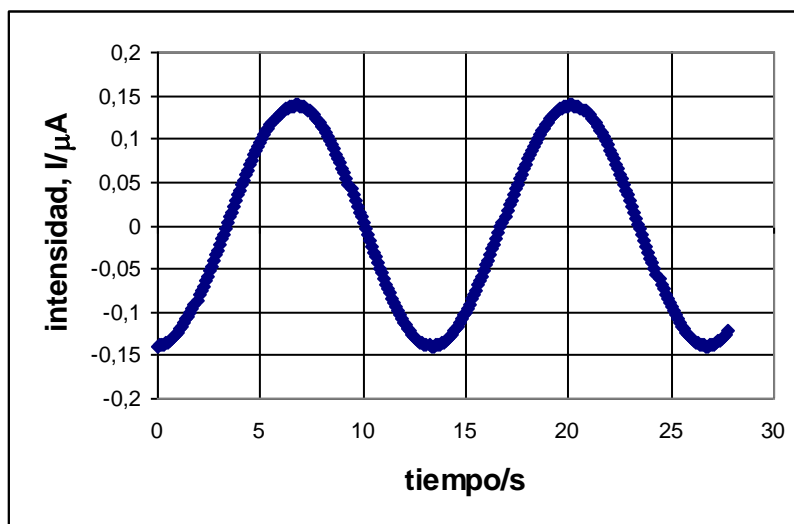
La carga es función del tiempo, por tanto, cuando la carga disminuya la batería le suministra corriente al condensador y cuando la carga aumente el condensador suministra corriente, en definitiva en el circuito eléctrico aparece una corriente variable, cuyo valor es.

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{2,5 \epsilon_0 S}{d + A \sin 2\pi f t} \right) = 2,5 \epsilon_0 S \left[ \frac{-A \cdot 2\pi f \cdot \cos 2\pi f t}{(d + A \sin 2\pi f t)^2} \right] \Rightarrow$$

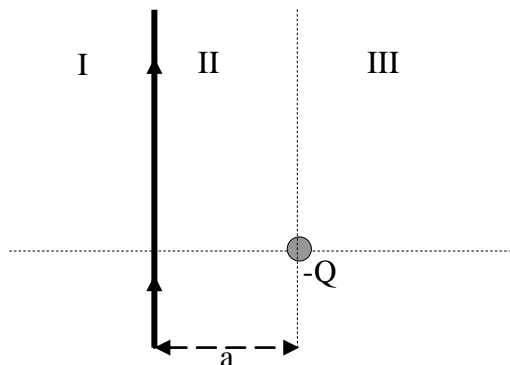
$$I(t) = \frac{2,5 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \left[ \frac{-10^{-6} \cdot 2\pi 10^5 \cdot \cos 2\pi 10^5 t}{(0,1 \cdot 10^{-3} + 10^{-6} \sin 2\pi 10^5 t)^2} \right] = -\frac{1,57 \cdot 10^{-4} \cos 2\pi 10^5 t}{36\pi \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} (0,1 + 10^{-3} \sin 2\pi 10^5 t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{1,388 \cdot 10^{-9} \cos 2\pi 10^5 t}{(0,1 + 10^{-3} \sin 2\pi 10^5 t)^2}$$

La representación gráfica de la función anterior es:



25.-Un hilo de longitud infinita posee una carga positiva por unidad de longitud  $\lambda$ , a una distancia mínima  $a$  de ese hilo existe una carga puntual  $-Q$  y ambos yacen en el plano  $XY$ . En la figura se observa su disposición y las tres regiones del plano designadas con I, II y III. Se pide determinar en qué regiones puede ser el campo eléctrico nulo y cuáles son sus posiciones.



En primer lugar determinamos cuál es el campo creado por un hilo de longitud infinita y con densidad lineal de carga  $+\lambda$

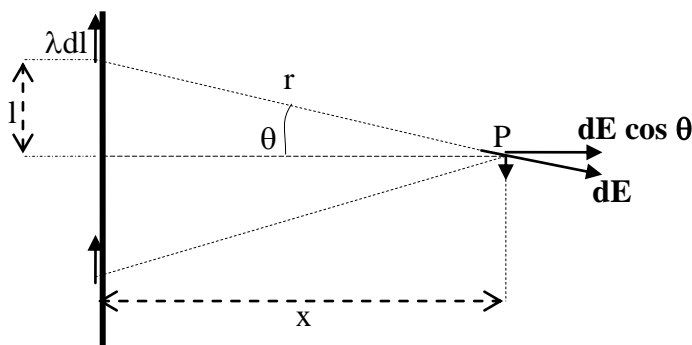


Fig.1

Consideramos un punto cualquiera del plano  $XY$  que se designa con  $P$  y que dista una distancia  $x$  del hilo. Sobre éste aparece un elemento de longitud  $dl$  que posee una carga positiva  $\lambda dl$  y que en el punto  $P$  crea un campo  $d\mathbf{E}$ . Este vector campo tiene dos componentes una horizontal  $d\mathbf{E} \cos \theta$  y otra vertical  $d\mathbf{E} \sin \theta$ . El módulo de  $d\mathbf{E}$  vale:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{\left(\frac{x}{\cos\theta}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos^2\theta dl}{x^2}$$

De la figura 1 se deduce:

$$\text{tag}\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow dl = x \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot d\theta$$

Llevando el valor de  $dl$  a la ecuación de  $d\mathbf{E}$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos^2\theta dl}{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x^2} d\theta$$

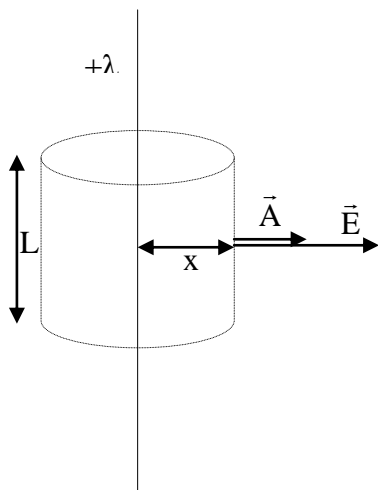
Si volvemos a la figura 1 observamos que para el elemento  $dl$  considerado existe otro situado simétricamente sobre la línea a que crea un campo en que la componente horizontal se suma y la vertical se anula, en consecuencia el campo en P tiene la dirección horizontal (por tanto perpendicular al hilo) y dirigido hacia fuera del hilo. Designamos a este campo con  $dE_p = dE \cos \theta$

$$dE_p = dE \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos\theta d\theta$$

Para calcular  $E_p$  hemos de sumar las contribuciones de todos los elementos  $dl$ .

$$E_p = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos\theta d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \left| \sin\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$

Aplicando el teorema de Gauss se resuelve con rapidez, dado que la distribución del campo tiene simetría cilíndrica.



El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que contiene cargas en su interior es igual a la suma de las cargas dividido por la constante dieléctrica del medio  $\epsilon_0$ . Debido a la simetría cilíndrica del campo tomaremos como superficie de Gauss un cilindro de eje en la línea de carga, altura  $L$  y radio, la distancia  $x$  a la línea.

$$\Phi = \Phi_{\text{Lateral}} + \Phi_{\text{base}} + \Phi_{\text{tapa}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Como el flujo es  $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A \cos \alpha$ ; en la base y en la tapa es nulo puesto que  $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$  y todo el flujo sale por la superficie lateral.

$$\Phi = \Phi_{\text{Lateral}} = E \cdot A \cos 0 = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad \Phi = E \cdot 2\pi x L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}; \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en una región es la suma vectorial de los campos existentes. En la región I es posible que el campo se anule porque  $E_p$  y  $E_\infty$  tienen la misma dirección y sentidos opuestos y además debe ser en algún lugar de la recta perpendicular al hilo y que pase por la carga  $Q$ . En la región II es imposible que el

campo sea nulo ya que ambos campos tienen la misma dirección y sentido y en la III es posible que sí lo sea, porque los campos tienen la misma dirección pero distinto sentido.

La figura 2 aclara la dirección y sentido de los campos

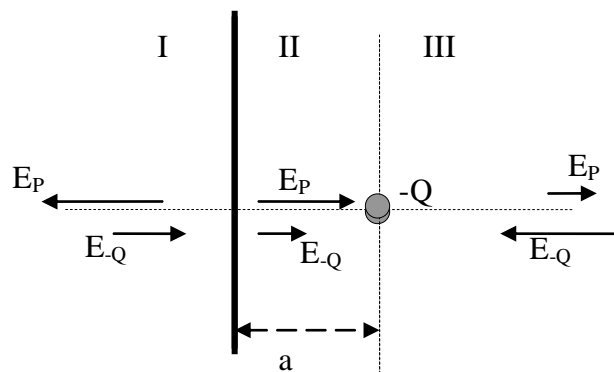


Fig. 2

### Región I

Llamamos  $x$  a la distancia que existe desde el hilo al punto donde se anulan los campos

$$E_P = E_{-Q} \Rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(a+x)^2} \Rightarrow \frac{\lambda}{x} = \frac{1}{2} \frac{Q}{a^2 + x^2 + 2ax} \Rightarrow a^2 + x^2 + 2ax = \frac{xQ}{2\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x\left(2a - \frac{Q}{2\lambda}\right) + a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\left(\frac{Q}{2\lambda} - 2a\right) \pm \sqrt{\left(2a - \frac{Q}{2\lambda}\right)^2 - 4a^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(\frac{Q}{2\lambda} - 2a\right) \pm \sqrt{4a^2 + \frac{Q^2}{4\lambda^2} - \frac{2aQ}{\lambda} - 4a^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\left(\frac{Q}{2\lambda} - 2a\right) \pm \sqrt{\frac{Q}{\lambda}\left(\frac{Q}{4\lambda} - 2a\right)}}{2}$$

Para que exista valor de  $x$ , la raíz cuadrada debe ser de un número positivo, por tanto

$$\frac{Q}{4\lambda} - 2a \geq 0 \Rightarrow \frac{Q}{4\lambda} \geq 2a \Rightarrow Q \geq 8a\lambda \quad (1)$$

Si  $Q = 8a\lambda$ , existe **un sólo valor de  $x$** , si  $Q > 8a\lambda$  existirán **dos valores de  $x$** , lo cual requiere que

$$\left(\frac{Q}{2\lambda} - 2a\right)^2 > \frac{Q^2}{4\lambda^2} - \frac{2aQ}{\lambda} \Rightarrow \frac{Q^2}{4\lambda^2} + 4a^2 - \frac{2aQ}{\lambda} > \frac{Q^2}{4\lambda^2} - \frac{2aQ}{\lambda} \Rightarrow 4a^2 > 0$$

Como  $a$  es una distancia se cumple la condición y existen dos soluciones.

La figura 3 representa el campo  $E$  (escala arbitraria) en la zona I cuando solamente hay una solución

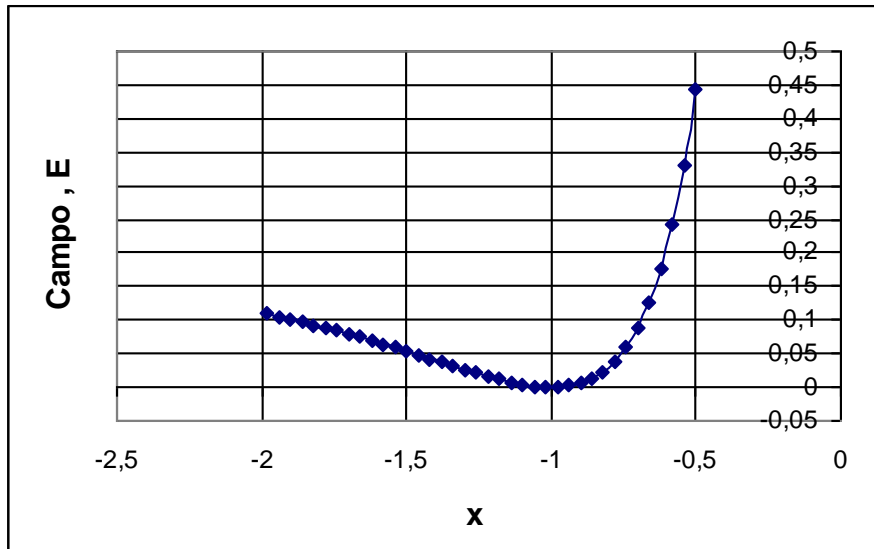


Fig.3

La figura 4 representa el campo cuando hay dos soluciones.

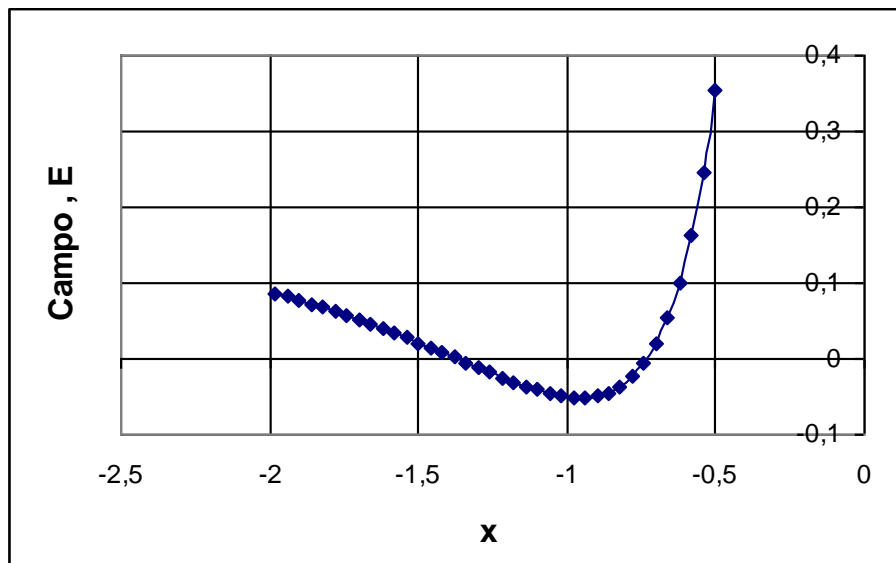


Fig.4

Zona III

$$E_p = E_{-Q} \Rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x-a)^2} \Rightarrow \frac{\lambda}{x} = \frac{1}{2} \frac{Q}{x^2 + a^2 - 2ax} \Rightarrow x^2 + a^2 - 2ax = \frac{xQ}{2\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right) + a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right) \pm \sqrt{\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right)^2 - 4a^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right) \pm \sqrt{4a^2 + \frac{Q^2}{4\lambda^2} + \frac{2aQ}{\lambda} - 4a^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right) \pm \sqrt{\frac{Q}{\lambda} \left(\frac{Q}{4\lambda} + 2a\right)}}{2}$$

Si  $Q = 8a\lambda$  entonces.  $x = \frac{6a \pm \sqrt{8a(2a + 2a)}}{2} = \frac{6a \pm a\sqrt{32}}{2} = 3a \pm 2a\sqrt{2}$ , existen dos soluciones en la zona III., 5,83 a y 0,17 a.

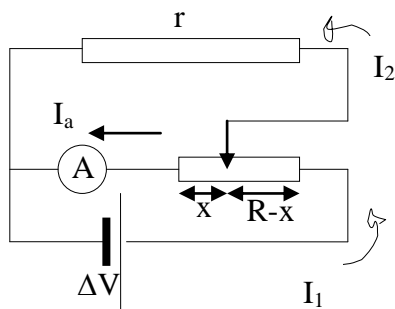
Si  $Q > 8a\lambda$  habrá dos soluciones si

$$\left(2a + \frac{Q}{2\lambda}\right)^2 > \frac{Q}{\lambda} \left(\frac{Q}{4\lambda} + 2a\right) \Rightarrow 4a^2 + \frac{Q^2}{4\lambda^2} + \frac{2aQ}{\lambda} > \frac{Q^2}{4\lambda^2} + \frac{2aQ}{\lambda} \Rightarrow 4a^2 > 0$$

Como se cumple la condición existen dos posiciones en la zona III donde se anula el campo.

26.-En el circuito de la figura inferior A es un amperímetro sin resistencia interna. La resistencia total del reóstato es  $R$  y la batería mantiene una diferencia de potencial  $\Delta V=10V$ , constante, siendo su resistencia interna despreciable.

- a) Calcular la intensidad de la corriente  $I_a$  que pasa por el amperímetro en función de la posición del cursor sobre el reóstato  
 b) Dibujar las curvas  $I_a$  frente a  $x$  cuando  $R = 10 \Omega$  y  $r = 1\Omega$  y  $0,5 \Omega$  ,  
 c) Calcular matemáticamente cuando la intensidad  $I_a$  es mínima.



- a) Aplicamos las leyes de Kirchoff a un nudo, a la malla total y a la malla superior. En la figura  $x$  representa la resistencia que existe entre un extremo del reóstato y el amperímetro.  $I_1$  la intensidad que pasa por la batería,  $I_2$  la que pasa por la resistencia  $r$  y  $I_a$  la que pasa por el amperímetro

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_a \\ I_1(R - x) + I_2 r &= \Delta V \\ I_2 r - I_a x &= 0 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación despejamos  $I_2$  y la llevamos a la primera

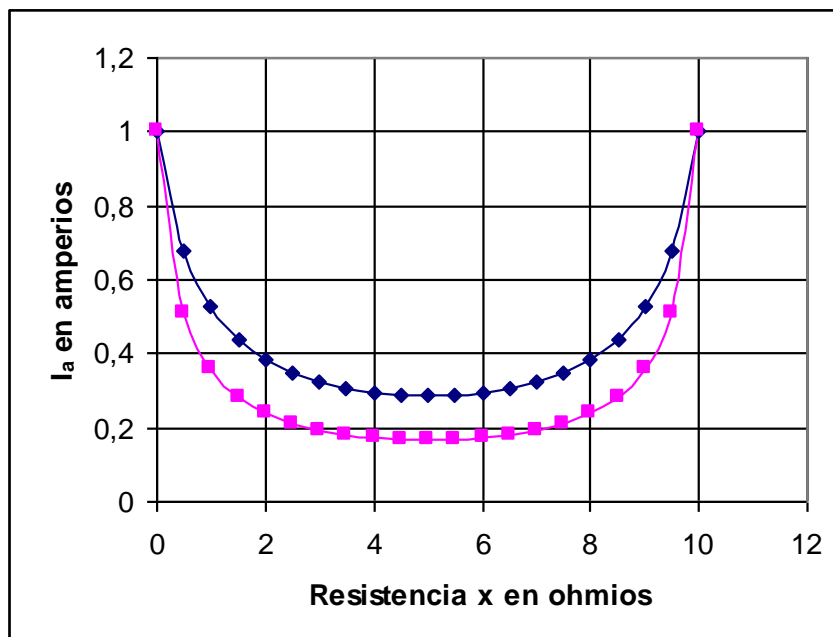
$$I_2 = \frac{I_a x}{r} ; I_1 = \frac{I_a x}{r} + I_a$$

Las dos últimas ecuaciones se combinan con la segunda

$$\begin{aligned} \left( I_a \frac{x}{r} + I_a \right) (R - x) + I_a \frac{x}{r} r &= \Delta V \Rightarrow I_a x \frac{R}{r} - I_a \frac{x^2}{r} + I_a R - I_a x + I_a x = \Delta V \Rightarrow \\ I_a R x - I_a x^2 + I_a R r &= \Delta V \cdot r \Rightarrow I_a = \frac{\Delta V \cdot r}{x(R - x) + R r} \quad (1) \end{aligned}$$

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación (1)

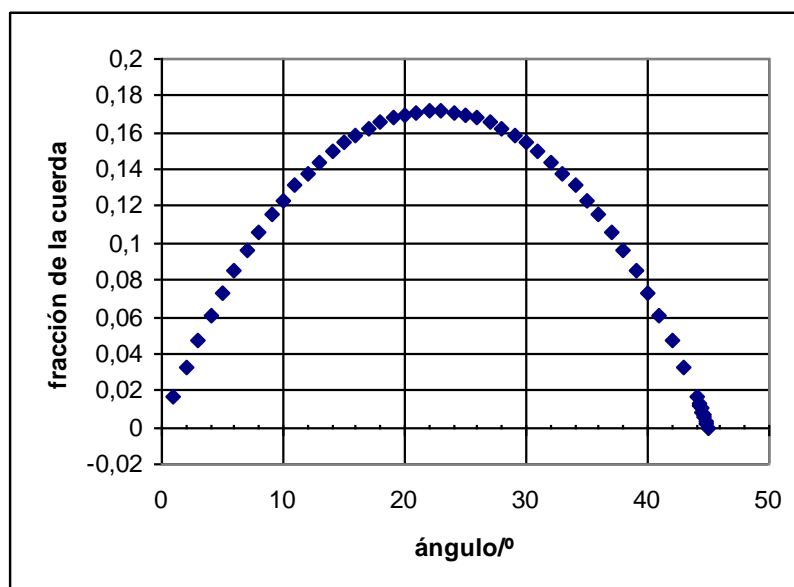
$$I_a = \frac{10}{x(10 - x) + 10} \quad \text{y} \quad I_a = \frac{5}{x(10 - x) + 5}$$



- c) Las gráficas nos indican que existe un mínimo de corriente,. Para calcular ese mínimo derivamos la ecuación (1) respecto de  $x$  e igualamos a cero.

$$\frac{dI_a}{dx} = \frac{-\Delta V \cdot r(R - 2x)}{[x(R - x) + Rr]^2} = 0 \Rightarrow R - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{2}$$

Cuando el cursor se encuentra justamente en la mitad del reóstato es cuando la intensidad que pasa por el amperímetro es mínima.



27.-En los vértices opuestos de un cuadrado de lado  $L=10^{-3}$  m, están situados dos protones y en los otros vértices dos positrones. Si el sistema se deja en libertad calcular aproximadamente las velocidades de las partículas cuando estén muy separadas entre sí.

Datos. Masa del protón  $1,7 \cdot 10^{-27}$  kg , masa del positrón  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg  
Según la ley de Coulomb la fuerza entre dos partículas cualesquiera de las citadas y situadas a una distancia  $r$  , vale:  $\frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{r^2}$  N.

En la figura 1 se han dibujado las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas cuando se encuentran en los vértices del cuadrado

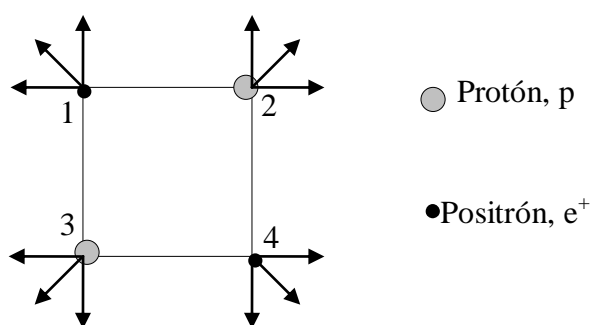


Fig.1

En cuanto el sistema se deje en libertad las partículas se alejarán entre sí, adquiriendo cada una de ellas energía cinética, la cual proviene de la energía potencial electrostática del sistema formado por las cuatro partículas cuando se encuentran en los vértices del cuadrado.

Para obtener la energía potencial eléctrica, iremos calculando el trabajo necesario para ubicar las partículas en los vértices, teniendo en cuenta que vienen desde el infinito donde la energía potencial es nula.

Recordemos que la expresión del trabajo es:

$$W = q(\text{Potencial de partida} - \text{Potencial de llegada})$$

Siendo  $q$  la carga transportada. Para llevar el positrón 1 al vértice, el potencial de partida y de llegada son nulos luego lo es el trabajo. Para llevar el protón 2 a una distancia  $L$  del positrón el trabajo vale:

$$W_I = q \left( 0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L} \right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{L}$$

Para llevar el protón 3 al vértice que dista  $L$  del positrón 1 y  $\sqrt{2}L$  del otro protón el trabajo vale:

$$W_{II} = q \left( 0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L\sqrt{2}} \right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Finalmente para llevar el positrón 4 a su vértice

$$W_{II} = q \left( 0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L\sqrt{2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L} \right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

El trabajo total es la suma de los trabajos parciales

$$W = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \left( 4 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \quad E_p = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \left( 4 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

*Una alternativa más rápida para el cálculo de la energía potencial electrostática del sistema, consiste en sumar las energías potenciales de todas las parejas que pueden formarse sin repetir ninguna, así: la carga 1 con la 2, más la carga 1 con la 3, más la carga 1 con la 4; más la carga 2 con la 3 + la carga 2 con la 4; más la carga 3 con la 4. Todo se recoge en la ecuación:*

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i \cdot q_j}{r_{ij}} \quad \text{con } i \neq j$$

En nuestro caso  $q_i = q_j = q$  el lado es  $L$  y la diagonal  $L\sqrt{2}$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2qq}{L} + \frac{qq}{L\sqrt{2}} + \frac{qq}{L} + \frac{qq}{L\sqrt{2}} + \frac{qq}{L} \right] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \left[ 4 + \sqrt{2} \right]$$

De acuerdo con la ley de Coulomb y el dato del problema

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = \frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{r^2} \Rightarrow \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,3 \cdot 10^{-28}$$

La energía potencial eléctrica es:  $E_p = \frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{L} \left( 4 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$

Cuando las partículas se dejan en libertad los dos positrones tendrán la misma energía y lo mismo le ocurrirá a los protones. Dado que cada protón tiene 1868 veces la masa de un positrón, resultará que los positrones cuando están muy alejados de la posición original los protones apenas se habrán distanciado entre sí.

Aproximadamente, de forma razonable suponemos, que cuando los positrones estén muy alejados, los protones están prácticamente en la misma posición inicial, esto es, a una distancia entre sí de  $L\sqrt{2}$ . En estas condiciones la energía potencial eléctrica de los dos protones es:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L\sqrt{2}} = \frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{L\sqrt{2}}$$

La energía que se han llevado los positrones es: la inicial del sistema menos la que tienen los protones

$$E_p = \frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{L} \left( 4 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) - \frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{L\sqrt{2}} = \frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{L} \left( 4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Esta energía se la reparten por igual entre los dos positrones y se ha convertido en energía cinética

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{L} \left( 4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} m_{e^+} v_{e^+}^2 \Rightarrow v_{e^+} = \sqrt{\frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{10^{-3} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \left( 4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} = 1,1 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para los dos protones

$$\frac{1}{2} \frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2,3 \cdot 10^{-28}}{10^{-3} \sqrt{2} \cdot 1,7 \cdot 10^{-27}}} \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{\Delta m} \left[ \frac{1}{\frac{M}{M - \Delta m t}} \cdot \left( \frac{-M(-\Delta m)}{(M - \Delta m t)^2} \right) \right] = F \left( \frac{1}{M - \Delta m t} \right)$$

**28.-Calcular la energía almacenada en el campo eléctrico creado por una esfera de radio  $R$  y carga  $Q$ . La carga está distribuida de forma homogénea por toda la esfera.**

La energía almacenada en un campo eléctrico está dada por la ecuación:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

La integral debe calcularse en todo el espacio en el que exista campo eléctrico..

Para el caso de la esfera dividimos el campo creado por ella en dos partes, una la que corresponde al espacio exterior a la esfera, y otra al interior de ella.

Para calcular el campo exterior aplicamos el teorema de Gauss

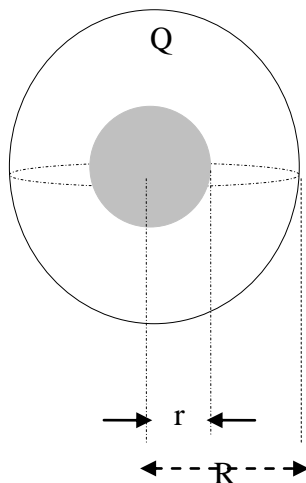
Consideramos una esfera de radio  $r > R$  concéntrica con la esfera que contiene la carga  $Q$ . El teorema de Gauss expresado en forma matemática es:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

En nuestro caso  $\sum q = Q$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_e \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_e = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Para calcular el campo en el interior de la esfera de radio  $R$  hacemos uso del teorema de Gauss



Consideramos una esfera concéntrica con la que tiene la carga  $Q$  de radio  $r < R$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_i \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

$Q'$  es la carga contenida en la esfera de radio  $r$ . Teniendo presente que la distribución de carga es homogénea, la densidad volumétrica de carga es la misma en la esfera de radio  $R$  que en la de radio  $r$ .

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow Q' = Q \frac{r^3}{R^3}$$

$$E_i = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q \frac{r^3}{R^3}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$$

Calculamos la energía almacenada en el campo exterior a la esfera.

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

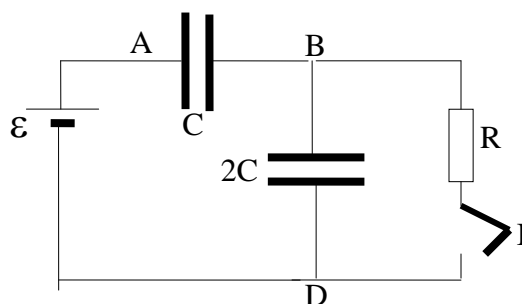
Calculamos la energía almacenada en el campo interior a la esfera.

$$U_i = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R \left( \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6} \left[ \frac{R^5}{5} - \frac{0}{5} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

$$U_{\text{total}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \right) = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

**29.-Calcular la energía calorífica que se desprende en la resistencia R al cerrar el interruptor I.**



**La fuerza electromotriz de la batería es  $\varepsilon$  y su resistencia interna es despreciable.**

Cuando el interruptor I está abierto los dos condensadores están acoplados en serie con la batería y almacenan la siguiente energía:

$$E = \frac{1}{2} C_E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} \varepsilon^2 = \frac{C\varepsilon^2}{3}$$

Designamos con  $q$  a la carga de cada condensador y las diferencias de potencial entre sus bornes son:

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} ; 2C = \frac{q}{V_B - V_D} \Rightarrow (V_A - V_B) + (V_B - V_D) = \varepsilon = \frac{q}{C} + \frac{q}{2C} \Rightarrow q = \frac{2C\varepsilon}{3}$$

$$V_A - V_B = \frac{q}{C} = \frac{\frac{2C\varepsilon}{3}}{C} = \frac{2}{3}\varepsilon ; V_B - V_D = \frac{q}{2C} = \frac{\frac{2C\varepsilon}{3}}{2C} = \frac{1}{3}\varepsilon$$

Al cerrar el interruptor I comienza a circular corriente por la resistencia R y este fenómeno dura hasta que la diferencia de potencial  $V_B - V_D$  se anule, y cuando ocurra esta anulación, el condensador 2C estará descargado, ya que no existe diferencia de potencial entre sus bornes. Ahora la caída de tensión  $\varepsilon$  está entre los bornes del condensador C, con lo que su nueva carga es  $q_1 = C\varepsilon$ .

Durante este proceso la batería ha aportado un trabajo:

$$W = (q_1 - q)\varepsilon = \left( C\varepsilon - \frac{2C\varepsilon}{3} \right) \varepsilon = \frac{C\varepsilon^2}{3}$$

La energía almacena en los condensadores es la que posee el condensador C

$$E_1 = \frac{1}{2} C\varepsilon^2$$

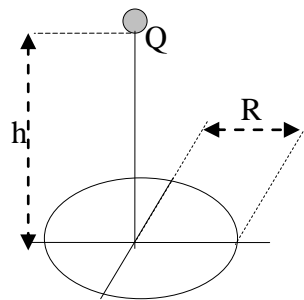
La diferencia de energía entre la situación inicial (I abierto) a la final (I cerrado) es:

$$\frac{1}{2}C\varepsilon^2 - \frac{1}{3}C\varepsilon^2 = \frac{C\varepsilon^2}{6}$$

Dado que la batería ha aportado una energía, el exceso de energía que no está en los condensadores se ha disipado en la resistencia R

$$Q = \frac{C\varepsilon^2}{3} - \frac{C\varepsilon^2}{6} = \frac{C\varepsilon^2}{6}$$

30.- Una carga puntual  $Q$  dista del centro de un círculo de radio  $R$  una distancia  $h$ . Calcular el flujo eléctrico que atraviesa la superficie circular.



Por definición el flujo eléctrico que atraviesa una superficie es:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow d\Phi = E dS \cos\theta$$

El módulo del campo eléctrico creado por una carga puntual

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Sobre el círculo escogemos una superficie  $dS$  tal que toda ella diste  $r$  de la carga  $Q$  y esa superficie debe ser una corona circular de radio  $\rho$ , tal como se indica en la figura 1.

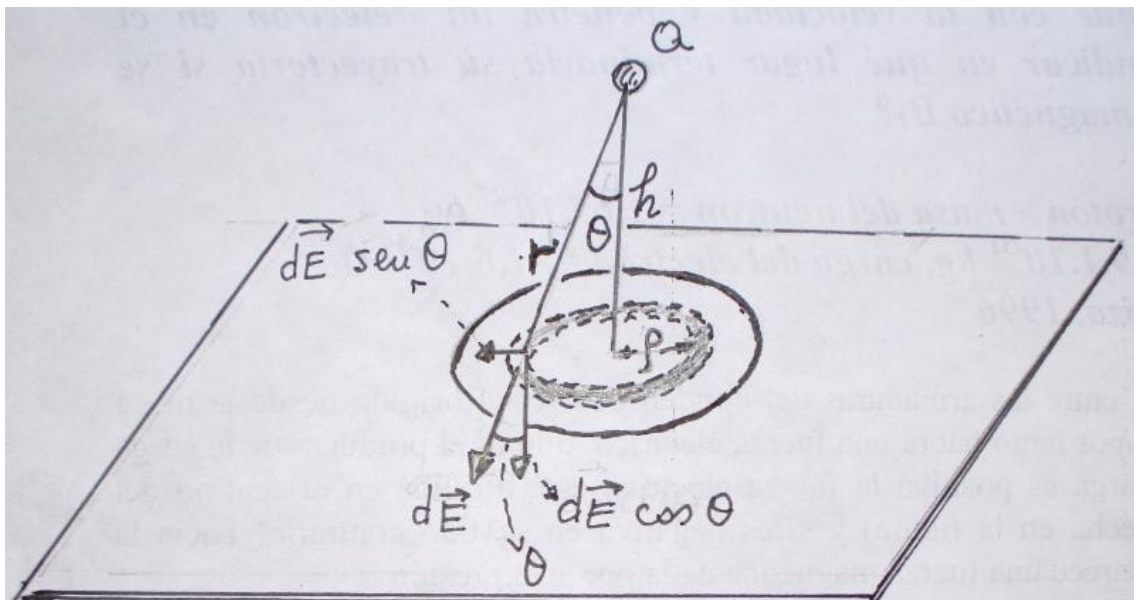


Fig.1

Toda la corona circular dista  $r$  de la carga formando un ángulo  $\theta$  con la vertical. El vector campo es  $d\vec{E}$  y tiene dos componentes, una de ellas, perpendicular al círculo y la otra en el plano del círculo. La componente perpendicular es la que contribuye al flujo ya que el ángulo con la superficie de la corona es  $0^\circ$ .

El flujo que atraviesa la corona de radio  $\rho$  es:

$$d\Phi = E \cdot \cos\theta \cdot \text{superficie de la corona} = E \cdot \cos\theta \cdot 2\pi\rho d\rho$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h^2 + \rho^2} ; \quad \cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \rho^2}}$$

Sustituyendo los dos valores en la ecuación del flujo

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h^2 + \rho^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} \cdot 2\pi\rho d\rho = \frac{Qh}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\rho d\rho}{(h^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para calcular el flujo total a través de todo el círculo se integra la expresión anterior

$$\Phi = \frac{Qh}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(h^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Para calcular la integral hacemos el cambio de variable siguiente:

$$h^2 + \rho^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad 2\rho d\rho = 2u du$$

Con este cambio de variable resolvemos la integral siguiente:

$$\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(h^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^R \frac{u du}{u^3} = \left[ -\frac{1}{u} \right]_0^R = -\frac{1}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} \Big|_0^R = -\frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} + \frac{1}{h}$$

La ecuación (1) queda

$$\Phi = \frac{Qh}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right) = \frac{Q}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right)$$

31.-a) Calcular el campo eléctrico de un segmento esférico, cargado uniformemente, en el centro de la esfera de radio  $R$  a la que pertenece. El área del círculo que cierra el segmento es  $r < R$  y la densidad superficial de carga  $\sigma \text{ C/m}^2$ .

b) Calcular el campo eléctrico que crea un hemisferio, de radio  $R$  con densidad de carga superficial  $\sigma$ , en su centro

En la figura 1 se ha representado el segmento esférico cuya área del círculo que lo cierra es  $r$ . El radio de la esfera es  $R$ . Sobre el segmento esférico se ha considerado una superficie de altura  $dh$ .

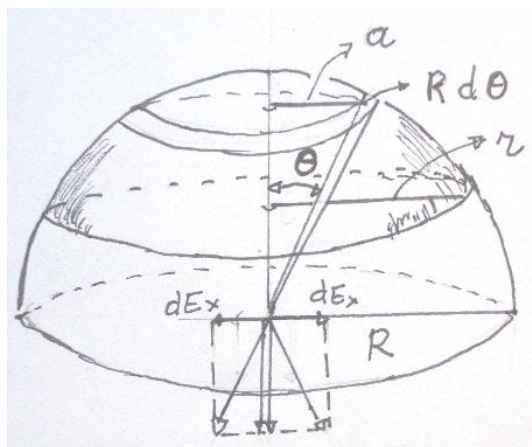


Fig.1

El área de dicha superficie es:

$$dA = R d\theta 2\pi a$$

y su carga eléctrica

$$dQ = R d\theta 2\pi a \sigma$$

Cualquier lugar que se elija de esta superficie dista  $R$  del centro de la esfera, por ello, el campo eléctrico creado son vectores que forman un ángulo  $\theta$ , pero dada la simetría del proceso las componentes horizontales se anulan y solo quedan las verticales (ver la figura 1). El módulo de esa componente es:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{R^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R\sigma d\theta 2\pi a}{R^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a\sigma}{R} \cos\theta d\theta$$

En la ecuación anterior existen dos variables, una es  $\theta$  y la otra  $a$ . Ambas están ligadas entre sí

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{R} \Rightarrow \cos\theta d\theta = \frac{1}{R} da$$

Llevando esta relación a la ecuación  $dE_y$ .

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a\sigma}{R} \cdot \frac{1}{R} da = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{2a\sigma}{R^2} \cdot da$$

Para hallar el campo debido a todo el segmento circular integramos:

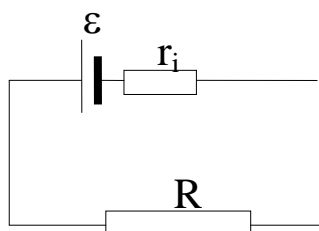
$$E_y = \int_0^r \frac{\sigma}{2 \epsilon_0 R^2} a da = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0 R^2} \left[ \frac{a^2}{2} \right]_0^r = \frac{\sigma r^2}{4 \epsilon_0 R^2}$$

b) Para resolver este caso basta integrar como anteriormente pero cambiando el límite r por R.

$$E_y = \int_0^R \frac{\sigma}{2 \epsilon_0 R^2} a da = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0 R^2} \left[ \frac{a^2}{2} \right]_0^R = \frac{\sigma R^2}{4 \epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{4 \epsilon_0}$$

32.- Se dispone de cuatro resistencias de alambre en espiral, de valores 10, 20, 30 y 40 ohmios, respectivamente. La potencia máxima que puede disipar cada resistencia es 2 W. Utilizando esas cuatro resistencias se fabrica un calentador que se conecta a una fuente de 20 V y resistencia interna 25  $\Omega$ . Indicar cómo se han de unir las cuatro resistencias para que la potencia sea máxima en el calentador.

En el circuito de la figura la máxima transferencia de potencia de la fuente a la resistencia se produce cuando  $R = r_i =$  resistencia interna de la fuente. Veamos por qué.



La intensidad de la corriente que atraviesa R y la potencia desarrollada es:

$$I = \frac{\epsilon}{R + r_i} ; P = I^2 R = \left( \frac{\epsilon}{R + r_i} \right)^2 R$$

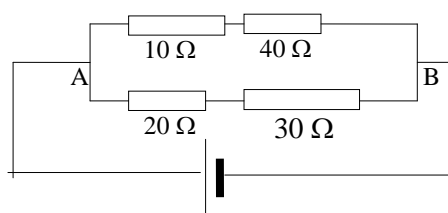
Para hallar la máxima potencia derivamos la expresión anterior respecto de R e igualamos a cero

$$\frac{dP}{dR} = \epsilon^2 \frac{(R + r_i)^2 - R \cdot 2(R + r_i)}{(R + r_i)^4} = 0 \Rightarrow (R + r_i)^2 - R \cdot 2(R + r_i) = 0 \Rightarrow R + r_i - 2R = 0 \Rightarrow$$

$$R = r_i$$

A la vista del anterior resultado, las cuatro resistencias deben agruparse de modo que su resistencia total sea igual a 25  $\Omega$  o al valor más próximo a él.

De inmediato se observa que no es posible asociarlas en serie. Tampoco en paralelo. Por tanto, es preciso asociarlas de forma mixta.

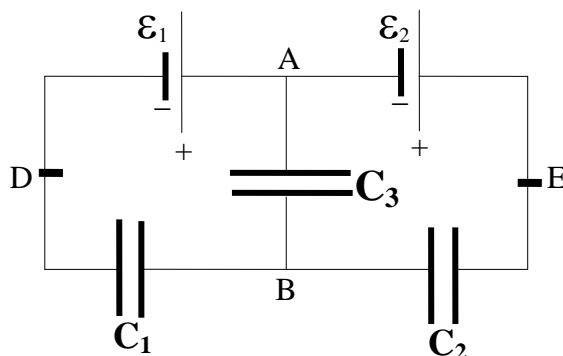


$$20 \text{ V} , 25 \Omega$$

La resistencia de la agrupación anterior es 25  $\Omega$  y la caída de tensión entre A y B vale 10 V. Veamos si el circuito cumple la condición de que cada resistencia soporte una potencia igual o inferior a 2 vatios

Entre A y B por la rama superior la intensidad es  $I = \frac{10}{50} = 0,20 \text{ A}$ , la potencia en la resistencia mayor es;  $P = I^2 R = 0,20^2 \cdot 40 = 1,6 \text{ W}$ . En las demás resistencias la potencia es menor, luego se cumplen las condiciones del problema.

33.- En el circuito de la figura inferior en el que se han dispuesto tres condensadores y dos pilas sin resistencia interna, hay que calcular las diferencias de potencial entre A y B ; entre B y D ; entre E y B.



En la figura 1 se han asignado cargas a cada condensador en el 1 y el 2 no hay duda de sus cargas tal como están unidos a las pilas, en el 3 se supone implícitamente que  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ . Asignamos un sentido positivo al recorrido por cada malla y un sentido a las fuerzas electromotrices de las pilas de menos a más

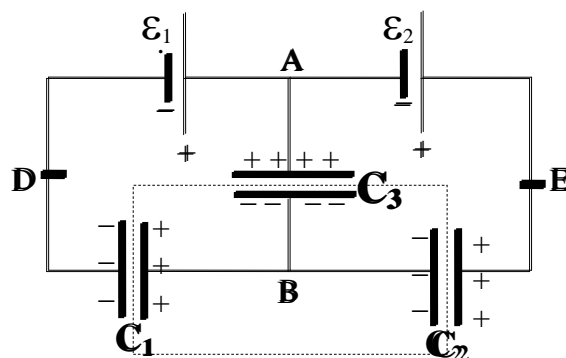


Fig.1

En el rectángulo (en línea de trazos) que se ha dibujado en la figura 1 abarcando a las armaduras de los tres condensadores se cumple que

$$q_1 - q_3 - q_2 = 0 ; C_1 V_{BD} - C_3 V_{AB} - C_2 V_{EB} = 0 \quad (1)$$

Siendo  $q_1$  ,  $q_2$  y  $q_3$  las cargas de cada armadura.

Recorremos cada malla en el sentido de las agujas del reloj y asignamos a cada fuerza electromotriz un sentido de negativo a positivo.

$$V_{AB} + V_{BD} = \epsilon_1 \quad (2); \quad V_{EB} + V_{BA} = \epsilon_2 \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3) con la (1) y considerando que  $V_{BA} = - V_{AB}$ , resulta:

$$C_1(\varepsilon_1 - V_{AB}) - C_3 V_{AB} - C_2(\varepsilon_2 - V_{BA}) = 0 \Rightarrow C_1 \varepsilon_1 - C_2 \varepsilon_2 = V_{AB}(C_1 + C_2 + C_3) \Rightarrow$$

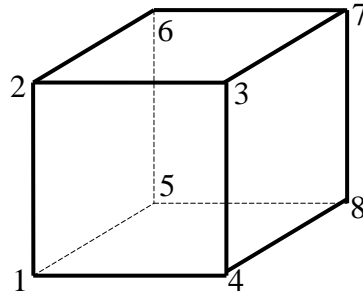
$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{C_1 \varepsilon_1 - C_2 \varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} \quad (4)$$

Llevando (4) a (2) y (4) a (3) resulta:

$$V_{BD} = \varepsilon_1 - \frac{C_1 \varepsilon_1 - C_2 \varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{C_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - C_3 \varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$V_{EB} = \varepsilon_2 + \frac{C_1 \varepsilon_1 - C_2 \varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{C_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - C_3 \varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

34.- En el cubo de la figura cada lado tiene una resistencia  $R$ . Hallar la resistencia equivalente cuando el cubo se conecta entre a) 1 y 7 b) entre 1 y 2 c) entre 1 y 3.



a) Supongamos que la corriente de intensidad  $I$ , llega por 1 y sale por 7. Al llegar a 1 se reparte por tres ramas ( 1-2; 1-4; 1-5). Para llegar a 7 tenemos los siguientes caminos. 1267 ; 1487 y 1567, por los tres caminos se recorren las mismas resistencias. Por tanto, cuando  $I$  se divide en 1, las intensidades por 1-2; 1-4 y 1-5 son las mismas y las designamos con  $i$ .

$$I = 3i$$

Por 7 debe salir la misma corriente que entra por 1, luego las corrientes que llegan a 7 tienen que ser  $i$  por cada ramal 6-7, 3-7 y 8-7.

Por simetría, al dividirse las corrientes en 4, 5 y 2 por cada rama la intensidad es  $i/2$ . La figura 1 indica las corrientes en cada rama.

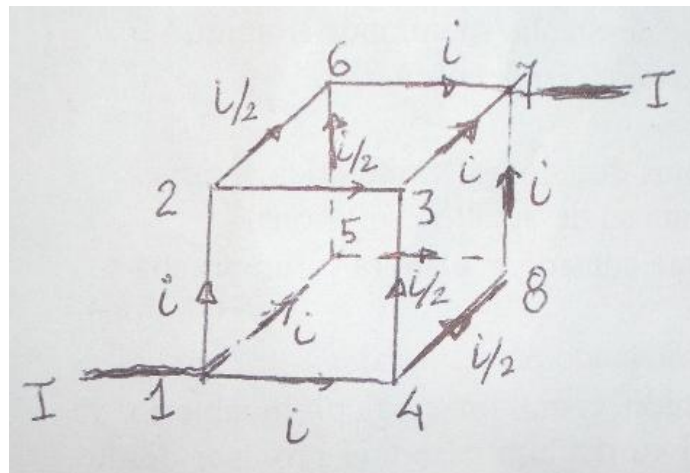


Fig.1

De la figura 1 se deduce



$$I \cdot R_E = V_{12} \Rightarrow (2i + j) \cdot R_E = j \cdot R \Rightarrow R_E = \frac{j}{2i + j} R = \frac{14k}{24k} R = \frac{7}{12} R$$

c) La corriente  $I$  entra por 1 y en ese nudo se divide en dos corrientes de valor  $i$  cada una  $i$ , y una tercera de valor  $j$ .

$$I = 2i + j$$

Al salir la corriente por el vértice 7 llegan a él las corrientes  $i$  y  $j$  para que se cumpla la ecuación anterior. Esto trae como consecuencia que la intensidad por 4-8 sea nula y también la 2-6.

$$\text{Cara 4378} \quad iR - jR - I_{87}R = 0 \Rightarrow I_{87} = i - j$$

$$\text{Nudo 7} \quad (i - j) - I_{67} = j \Rightarrow I_{67} = 2j - i$$

$$(2i + j)R_E = iR + 0 \cdot R + (i - j)R + jR = 2iR \Rightarrow R_E = \frac{2i}{2i + j}$$

$$\text{Cara 1584} \quad jR + (j - v)R - iR = 0 \Rightarrow v = 2j - i$$

$$\text{Cara 5678} \quad vR + (2j - i)R - (i - j)R - (j - v)R = 0 \Rightarrow v = i - j$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce:

$$2j - i = i - j \Rightarrow j = \frac{2}{3}i$$

$$R_E = \frac{2i}{2i + 2j} R = \frac{2i}{2i + 2 \cdot \frac{2}{3}i} R = \frac{3R}{4}$$

En la figura 3 se indican las corrientes.

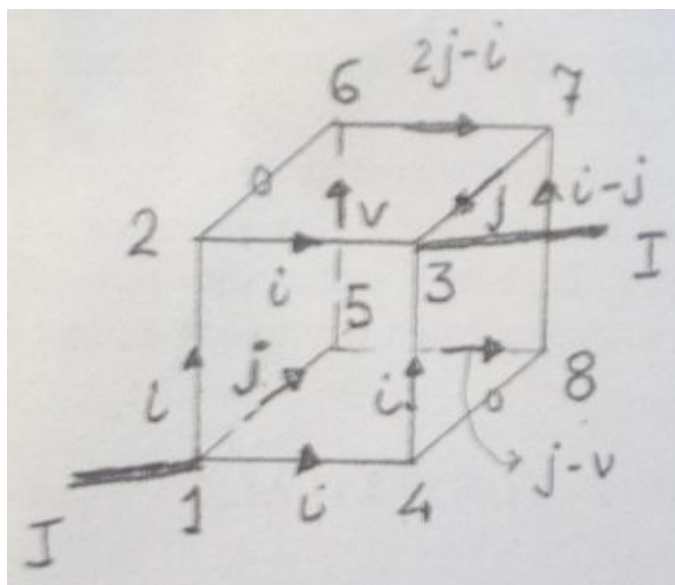
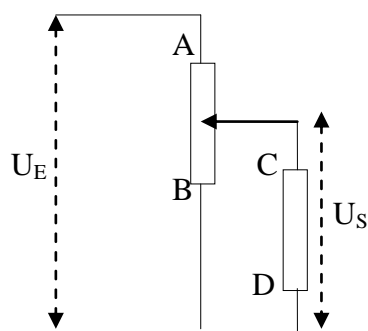
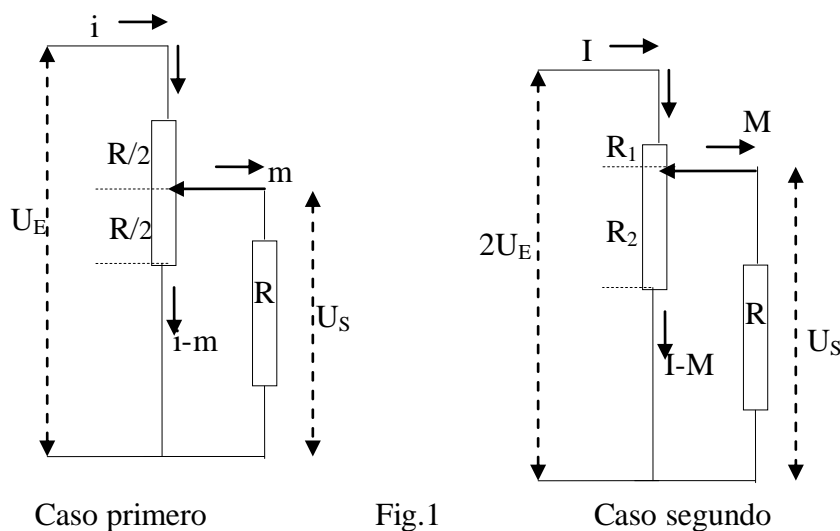


Fig.3

35.- En el circuito de la figura inferior AB es un potenciómetro de resistencia total  $R$  y CD es una resistencia de carga de valor  $R$ . Si el cursor del potenciómetro se coloca en la mitad de éste y se aplica una tensión  $U_E$  a la entrada, la tensión de salida en la resistencia de carga es  $U_S$ . Ahora se duplica la tensión de entrada pero se quiere mantener la de salida y se pregunta cómo se ha de desplazar el cursor para lograrlo.



Cuando la tensión de entrada es  $2U_E$ , designamos con  $R_1$  y  $R_2$  a las resistencias del potenciómetro por encima y por debajo del cursor, como indica a figura 1. En la misma figura se indican las intensidades de corriente, en el caso primero y en el segundo.



Caso primero

Fig.1

Caso segundo

De la figura 1 se deduce que  $R_2$  y  $R$  se encuentran en paralelo, siendo, por tanto, su resistencia equivalente igual a  $\frac{R_2 R}{R_2 + R}$ . Esta resistencia equivalente está en serie con  $R_1$ , luego la resistencia total es

$$R_{T2} = R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R}$$

En el caso primero:  $R_1 = R_2 = \frac{R}{2} \Rightarrow R_{T1} = \frac{R}{2} + \frac{\frac{R}{2} \cdot R}{\frac{R}{2} + R} = \frac{5R}{6}$

$$U_E = i \cdot R_{T1} = \frac{5}{6} iR \quad (1)$$

En la malla inferior  $mR - (i - m)\frac{R}{2} = 0 \Rightarrow i = 3m \Rightarrow U_S = mR = \frac{i}{3}R \quad (2)$

Para el caso segundo:  $IR_1 + MR = 2U_E$

En la malla inferior:  $IR - (I - M)R_2 = 0 \Rightarrow M = \frac{IR_2}{R + R_2}; U_S = MR = \frac{IR_2 R}{R + R_2} \quad (3)$

En todo el circuito:  $2U_E = I \cdot R_{T2} = I \left( R_1 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \right) \quad (4)$

Combinado las ecuaciones (1) y (4)

$$2 \cdot \frac{5}{6} iR = I \left( R_1 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \right) \Rightarrow \frac{5iR}{3} = I \left( R - R_2 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \right) \quad (5)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3)

$$\frac{iR}{3} = I \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \quad (6)$$

De (5) y (6)

$$5I \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} = I \left( R - R_2 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \right) \Rightarrow 4 \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} = R - R_2$$

Establecemos que  $R_2$  es una fracción de  $R$ , esto es,  $R_2 = \alpha R$

$$4 \frac{\alpha R^2}{\alpha R + R} = R - \alpha R \Rightarrow 4 \frac{\alpha R}{1 + \alpha} = R(1 - \alpha) \Rightarrow 4\alpha = 1 - \alpha^2$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

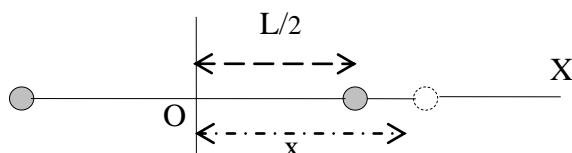
$$\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

La solución válida del problema es:  $R_2 = \alpha \cdot R = (\sqrt{5} - 2)R$

**36.- Dos cargas eléctricas puntuales, e iguales y del mismo signo, se encuentran en reposo a una distancia  $L$ . Se dejan en libertad con velocidad inicial nula y se determina que al cabo de un tiempo  $t_1$  se encuentran a una distancia  $2L$ . Si las mismas cargas estuviesen en reposo a una distancia inicial  $3L$  y se dejasen en libertad con velocidad inicial cero, al cabo de un tiempo  $t_2$  se encontrarían a una distancia  $6L$ . Calcular la relación entre ambos tiempos.**

En ambos caso las cargas se mueven debido a que cada una sufre la acción de una fuerza de repulsión, cuya característica es la de ser variable, pues varía con el inverso del cuadrado de la distancia, y a medida que se alejan las cargas entre sí la fuerza disminuye.

Analicemos el primer caso



Inicialmente cada carga dista  $L/2$  de un origen de coordenadas OX, dicho origen se ha situado en el medio de las cargas. Al dejar dichas cargas en libertad, una se desplaza hacia la derecha y otra a la izquierda. Por simetría siempre tendrán el mismo módulo de velocidad y estarán a la misma distancia de O.

Cuando la distancia  $x$  a O sea  $x = L/2 + L/2 = L$ , la distancia entre las cargas es  $2L$ .

Supongamos que la carga de la derecha se encuentra en un momento determinado a la distancia  $x$  de O. En ese instante actuará sobre ella una fuerza de repulsión de valor

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2x)^2}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x^2} &= m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} \Rightarrow \int \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x^2} dx = \int mv dv \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{x} \right) = m \frac{v^2}{2} + \text{Cte} \quad (1) \end{aligned}$$

Según el enunciado del problema cuando  $x=L/2$  su velocidad es cero, por tanto

$$\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left( -\frac{2}{L} \right) = \text{Cte} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{L} - \frac{1}{x} \right)} \quad (2)$$

Nota.- Esto se podría hacer por la ecuación de la energía.  $W = \Delta E_C$ , calculando el trabajo realizado por la fuerza electrostática desde la posición inicial en la que  $v_o = 0$ ; hasta la posición  $x$ , en la que la velocidad es  $v$ .

$$\int_{\frac{L}{2}}^x \frac{q}{16\pi\epsilon_o} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

Si analizamos el segundo caso, llegamos a la misma ecuación (1), aunque ahora varía la constante, ya que cuando  $x = 3L/2$  la velocidad es cero

$$\frac{q^2}{16\pi\epsilon_o} \left( -\frac{2}{3L} \right) = \text{Cte} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_o} \left( \frac{2}{3L} - \frac{1}{x} \right)} \quad (3)$$

Cuando  $x=(3L/2)+(3L/2) = 3L$ , la distancia entre las cargas es  $6L$ .

Por claridad, a partir de ahora, designamos a la velocidad en el primer caso por  $v_1$  y por  $v_2$  en el segundo caso y a la variable  $x$  por  $x_1$  y en el primer caso y  $x_2$  en el segundo caso.

Supongamos que para el caso 1 un cuerpo se desplazase con velocidad media constante y recorriese la distancia  $L/2$  en el tiempo  $t_1$ .

$$\frac{L}{2} = v_{m(1)} \cdot t_1$$

Hagamos lo mismo para el caso 2.

$$\frac{3L}{2} = v_{m(2)} t_2$$

Dividiendo ambas ecuaciones

$$\frac{\frac{L}{2}}{\frac{3L}{2}} = \frac{1}{3} = \frac{v_{m(1)} t_1}{v_{m(2)} t_2} \Rightarrow t_2 = 3 \frac{v_{m(1)}}{v_{m(2)}} t_1 \quad (4)$$

La ecuación (2) la aplicamos cuando  $x=x_1=L$ , esto es, cuando la distancia entre las cargas es  $2L$ .

$$v_1(t_1) = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_o} \left( \frac{2}{L} - \frac{1}{L} \right)} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{1}{L}}$$

La ecuación (3) la aplicamos cuando  $x=x_2=3L$ , esto es, cuando la distancia entre las cargas es  $6L$ .

$$v_2(t_2) = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_o} \left( \frac{2}{3L} - \frac{1}{3L} \right)} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{1}{3L}}$$

El cociente de estas velocidades instantáneas es:

$$\frac{v_1(t_1)}{v_2(t_2)} = \frac{\sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{L}}}{\sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{3L}}} = \sqrt{3}$$

Si escogiésemos para el primer caso cuando la carga ha recorrido la mitad del camino, esto es, cuando  $x_1=L/2+L/4=3L/4$ , la velocidad instantánea en ese lugar es:

$$v_1(3L/4) = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{L} - \frac{4}{3L} \right)} = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3L}}$$

Si escogiésemos para el segundo caso cuando la carga ha recorrido la mitad del camino, esto es, cuando  $x_2=3L/2+3L/4=9L/4$ , la velocidad instantánea en ese lugar es:

$$v_2(9L/4) = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{3L} - \frac{4}{9L} \right)} = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{9L}}$$

El cociente entre esas velocidades instantáneas:

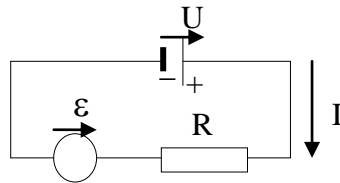
$$\frac{v_1(3L/4)}{v_2(9L/4)} = \sqrt{3}$$

Escogiendo cuando en cada caso la carga ha recorrido  $1/4$  o  $1/8$  o  $1/16$  de su camino el cociente entre las velocidad instantáneas es  $\sqrt{3}$ , en consecuencia, también tienen que guardar la misma proporción las velocidades medias que aparecen en la ecuación (4).

$$t_2 = 3 \frac{v_{m(1)}}{v_{m(2)}} t_1 = 3\sqrt{3} t_1$$

37.-Se conecta un motor eléctrico de corriente continua a una batería de fuerza electromotriz  $U$  y resistencia interna prácticamente nula. La resistencia del arrollamiento del inducido es  $R$ . ¿Para qué valor de la intensidad de la corriente que atraviesa el devanado la potencia útil del motor será máxima? ¿Cuál es esa potencia y cuál el rendimiento del motor?

En el esquema de la figura se representa el motor con fuerza contraelectromotriz  $\varepsilon$ , la resistencia del arrollamiento y la fuente de tensión continua



La intensidad de la corriente que atraviesa el motor es:

$$I = \frac{U - \varepsilon}{R} \Rightarrow \varepsilon = U - IR$$

La potencia útil del motor es:

$$P_{\text{útil}} = \varepsilon I = (U - IR)I = UI - I^2 R$$

Como nos piden la potencia máxima, derivamos la potencia respecto de la intensidad e igualamos a cero.

$$\frac{dP_{\text{útil}}}{dI} = U - 2IR = 0 \Rightarrow I = \frac{U}{2R}$$

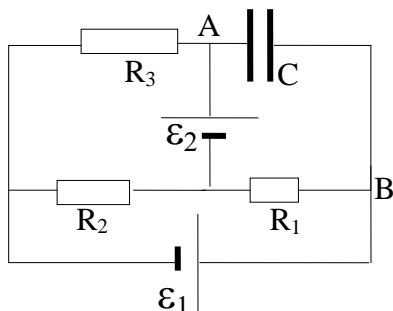
Sustituyendo en la ecuación de la potencia útil:

$$(P_{\text{útil}})_{\text{máxima}} = U \frac{U}{2R} - \frac{U^2}{4R^2} R = \frac{U^2}{4R}$$

El rendimiento

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{suministrada}}} = \frac{\frac{U^2}{4R}}{UI} = \frac{U}{4IR} = \frac{U}{4 \cdot \frac{U}{2}} = \frac{1}{2}$$

38.- Calcular la diferencia de potencial entre los extremos del condensador  $C$  de la figura inferior



Una vez que el condensador esté cargado, el circuito se reduce a dos mallas como indica la figura 1.

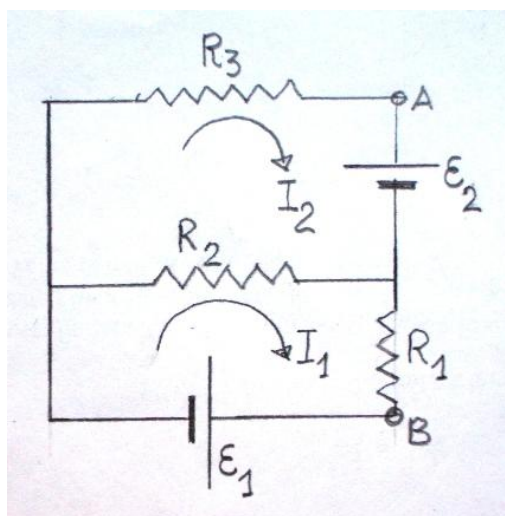


Fig.1

Para las dos mallas tenemos las siguientes ecuaciones

$$(I_1 - I_2)R_2 + I_1R_1 + \varepsilon_1 = 0 \Rightarrow I_1(R_1 + R_2) - I_2R_2 = -\varepsilon_1 \quad (1)$$

$$I_2R_3 + \varepsilon_2 + (I_2 - I_1)R_2 = 0 \Rightarrow I_2(R_2 + R_3) - I_1R_2 = -\varepsilon_2 \Rightarrow I_2 = \frac{I_1R_2 - \varepsilon_2}{R_2 + R_3}$$

Sustituyendo  $I_2$  en la ecuación (1).

$$I_1(R_1 + R_2) - \frac{I_1R_2 - \varepsilon_2}{R_2 + R_3} \cdot R_2 = -\varepsilon_1 \Rightarrow I_1 \left( R_1 + R_2 - \frac{R_2^2}{R_2 + R_3} \right) + \frac{\varepsilon_2 R_2}{R_2 + R_3} = -\varepsilon_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 \left( \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2 + R_3} \right) = -\frac{\varepsilon_2 R_2}{R_2 + R_3} - \varepsilon_1 \Rightarrow I_1 = \frac{-\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2 R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

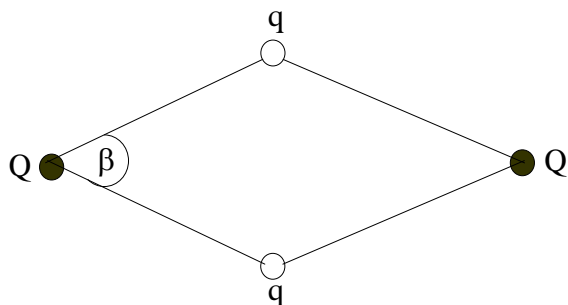
La diferencia de potencial entre A y B es la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador.

$$V_A - V_B = \varepsilon_2 + I_1 R = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 (R_2 + R_3) R_1 + \varepsilon_2 R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$V_A - V_B = \frac{\varepsilon_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) - \varepsilon_1 R_1 R_2 - \varepsilon_1 R_1 R_3 - \varepsilon_2 R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$V_A - V_B = \frac{\varepsilon_2 R_3 (R_1 + R_2) - \varepsilon_1 R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

39.-Cuatro cargas  $Q$ ,  $q$ ,  $Q$ , y  $q$  se unen mediante hilos de igual longitud  $L$ , tal como se indica en la figura inferior



Calcular el valor del ángulo beta que forman los hilos.

En la figura 1 se indican las fuerzas sobre dos cargas y las tensiones en tres cuerdas.

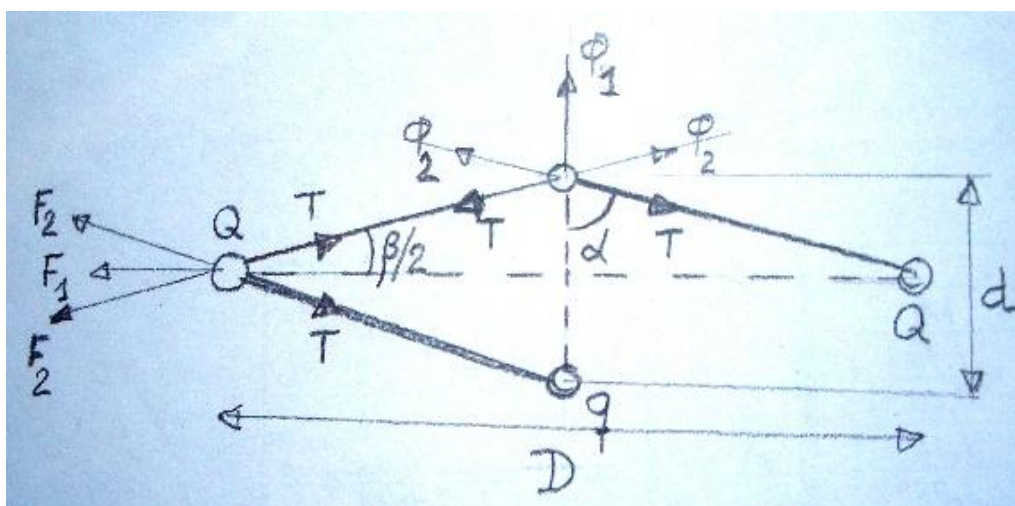


Fig.1

Sobre la carga  $Q$  de la izquierda de la figura 1 actúan las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_2$ ,  $T$  y  $T$

$$F_1 = K \frac{Q^2}{D^2} = K \frac{Q^2}{4L^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} ; \quad F_2 = K \frac{Qq}{L^2}$$

Como  $Q$  está en equilibrio se cumple:

$$F_1 + 2F_2 \cos \frac{\beta}{2} = 2T \cos \frac{\beta}{2} \Rightarrow K \frac{Q^2}{4L^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} + 2K \frac{Qq}{L^2} \cos \frac{\beta}{2} = 2T \cos \frac{\beta}{2} \quad (1)$$

Sobre la carga  $q$  superior de la figura 1 actúan las fuerzas  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_2$ ,  $T$  y  $T$  y de la figura 1 se deduce que los ángulos  $\alpha$  y  $\beta/2$  son complementarios

$$\varphi_1 = K \frac{q^2}{d^2} = K \frac{q^2}{4L^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} ; \quad \varphi_2 = K \frac{Qq}{L^2}$$

Como q está en equilibrio se cumple:

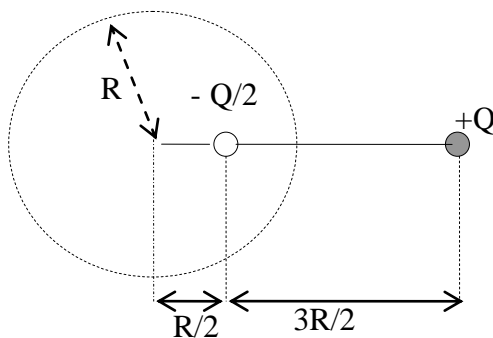
$$\varphi_1 + 2\varphi_2 \sin \frac{\beta}{2} = 2T \sin \frac{\beta}{2} \Rightarrow K \frac{q^2}{4L^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} + 2K \frac{Qq}{L^2} \sin \frac{\beta}{2} = 2T \sin \frac{\beta}{2} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce:

$$K \frac{Q^2}{4L^2 \cos^3 \frac{\beta}{2}} + 2K \frac{Qq}{L^2} = K \frac{q^2}{4L^2 \sin^3 \frac{\beta}{2}} + 2K \frac{Qq}{L^2} \Rightarrow \frac{Q^2}{\cos^3 \frac{\beta}{2}} = \frac{q^2}{\sin^3 \frac{\beta}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tag^3 \frac{\beta}{2} = \left( \frac{q}{Q} \right)^2 \Rightarrow \tag \frac{\beta}{2} = \left( \frac{q}{Q} \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{\beta}{2} = \arccot \tag \left( \frac{q}{Q} \right)^{\frac{2}{3}}$$

40.- Observe la figura inferior



***R es el radio de una esfera cuyo centro está alineado con las cargas. Probar que el potencial eléctrico en dicha esfera es nulo. Se toma como referencia de potenciales el infinito con valor del potencial nulo.***

En la figura 1 se escoge un punto de la esfera que designamos con X

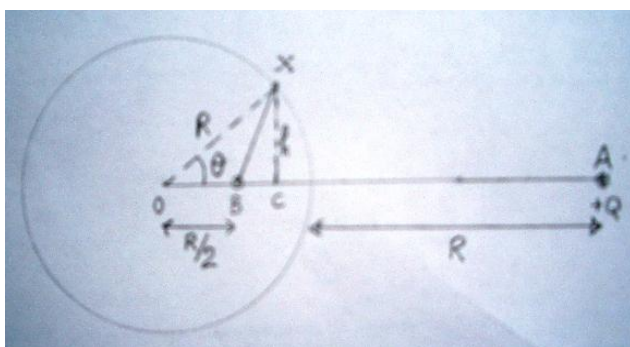


Fig.1

De la figura 1 se deduce:

$$\text{sen } \theta = \frac{h}{R} \Rightarrow h = R \text{sen } \theta ; \text{OC} = R \text{cos } \theta ; \text{BC} = \text{OC} - \text{OB} = R \text{cos } \theta - \frac{R}{2} = R \left( \text{cos } \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{AC} = \text{AB} - \text{BC} = \frac{3R}{2} - R \left( \text{cos } \theta - \frac{1}{2} \right) = R(2 - \text{cos } \theta)$$

$$\text{AX} = \sqrt{h^2 + \text{AC}^2} = \sqrt{R^2 \text{sen}^2 \theta + R^2 (2 - \text{cos } \theta)^2} = R \sqrt{5 - 4 \text{cos } \theta}$$

$$\text{BX} = \sqrt{h^2 + \text{BC}^2} = \sqrt{R^2 \text{sen}^2 \theta + R^2 \left( \text{cos } \theta - \frac{1}{2} \right)^2} = R \sqrt{\frac{5}{4} - \text{cos } \theta} = \frac{R}{2} \sqrt{5 - 4 \text{cos } \theta}$$

El potencial en el punto X es la suma algebraica de los potenciales creados por las dos cargas

$$V_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{Q}{2}}{\frac{R}{2} \sqrt{5 - 4 \text{cos } \theta}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R \sqrt{5 - 4 \text{cos } \theta}} = 0$$

**41.- Un tranvía se desplaza con velocidad constante  $v$  por una vía horizontal y su motor consume una intensidad de  $I_1=100$  A, siendo su rendimiento  $\eta=0,9$ . Si el mismo tranvía y con la misma velocidad  $v$ , se desplaza hacia abajo por una pendiente el motor no consume corriente. Si el tranvía se desplaza por la misma pendiente hacia arriba consume una intensidad  $I_2$ . Determinar el valor de esta intensidad. El rendimiento del motor depende de la intensidad eléctrica que consume.**

Para resolver el problema hacemos las siguientes suposiciones:  $F$  representa una fuerza que es necesario vencer para que el tranvía se desplace a velocidad  $v$  constante. Esto supone que  $F$  es la misma tanto si sube una pendiente como si baja por ella o se desplaza en horizontal. Admitimos que el motor tiene una resistencia global  $R$  y por tanto la potencia que no se utiliza para mover el tranvía da lugar a unas pérdidas de energía calorífica en la citada resistencia.

Designamos con  $V$  la tensión de la red eléctrica de donde el motor toma la corriente.

$\eta VI_1$ , es la potencia empleada para mover el tranvía con velocidad  $v$  por la vía horizontal

$$\eta VI_1 = Fv \quad (1)$$

$(1-\eta)VI_1$ , es la potencia disipada en la resistencia  $R$ .

$$(1-\eta)VI_1 = I_1^2 R \Rightarrow (1-\eta)V = I_1 R \quad (2)$$

Cuando baja por una pendiente de ángulo  $\alpha$ , el tranvía no consume energía eléctrica debido a que la pérdida de energía potencial compensa el trabajo de la fuerza  $F$ , o lo que es lo mismo la fuerza  $F$  es proporcionada por la componente del peso del tranvía

$$F = Mg \operatorname{sen} \alpha \quad (3)$$

Cuando sube la pendiente  $\alpha$ , la intensidad de la corriente la designamos con  $I_2$  y el rendimiento del motor con  $\eta'$ .

$\eta' VI_2$  es la potencia eléctrica empleada para mover el tranvía a velocidad constante  $v$  y para aumentar su energía potencial.

$$\eta' VI_2 = Fv + Mg \operatorname{sen} \alpha v \quad (4)$$

$(1-\eta')VI_2$  es la potencia disipada en la resistencia  $R$

$$(1-\eta')VI_2 = I_2^2 R \Rightarrow (1-\eta')V = I_2 R \quad (5)$$

De las ecuaciones (2) y (5)

$$\frac{(1-\eta)V}{I_1} = \frac{(1-\eta')V}{I_2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1}(1-\eta) = 1-\eta' \Rightarrow \eta' = 1 - \frac{I_2}{I_1}(1-\eta)$$

De las ecuaciones (1) , (3) , (4)

$$\eta'VI_2 = \mu VI_1 + Fv = 2\mu VI_1$$

Sustituyendo en esta última ecuación el valor de  $\eta'$

$$\left[1 - \frac{I_2}{I_1}(1-\eta)\right]VI_2 = 2\eta VI_1 \Rightarrow I_2 - \frac{I_2^2}{I_1}(1-\eta) = 2\eta I_1 \Rightarrow I_2^2 - I_2 \frac{I_1}{1-\eta} + 2\eta \frac{I_1^2}{1-\eta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2^2 - I_2 \frac{100}{0,1} + 2 \cdot 0,9 \cdot \frac{100^2}{0,1} = 0 \Rightarrow I_2^2 - 1000I_2 + 180000 = 0$$

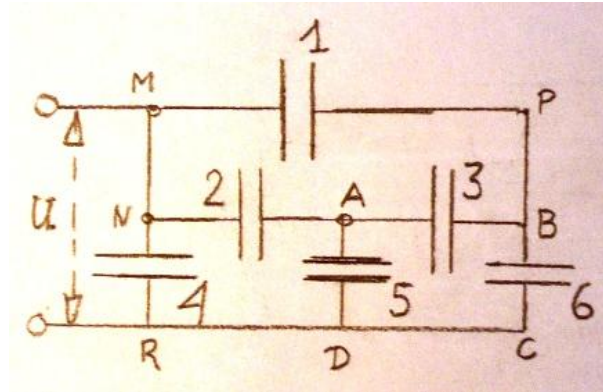
La resolución de la ecuación de segundo grado conduce a dos soluciones 765 A y 236 A.

Los rendimientos para ambas intensidades son:

$$\eta' = 1 - \frac{765}{100}(1-0,9) = 0,235 ; \quad \eta' = 1 - \frac{236}{100}(1-0,9) = 0,764$$

Según el planteamiento del problema la solución razonable es escoger la intensidad que dé mayor rendimiento.

42.- En el circuito de la figura inferior cada uno de los seis condensadores tiene una capacidad  $C$ , y el conjunto está unido a una fuente de corriente de tensión  $U$ . Se pide la carga de cada condensador y la capacidad equivalente del conjunto.



Asignamos un signo de carga a cada una de las armaduras de los condensadores., 1, 2, 4, 5 y 6 se asigna sin dificultad en función de la armadura que está unida a la fuente. El condensador 3 ofrece dudas y arbitrariamente se le asigna unos signos, aunque pueden ser no correctos. Las cargas de cada uno de los condensadores se designan por  $q_1, q_2, \dots, q_6$ .

En la figura 1 se indican los signos. Además hay dos líneas de trazos, una abarca las armaduras de los condensadores 1, 3 y 6 y la otra los condensadores 2, 3 y 5.

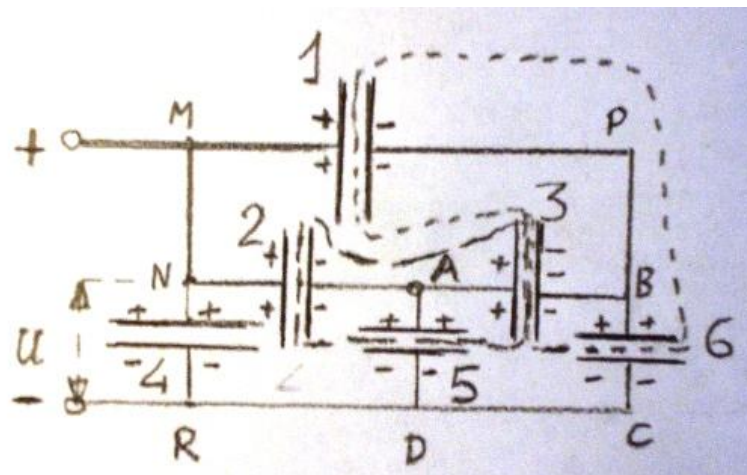


Fig.1

Como esas partes están aisladas podemos escribir las siguientes ecuaciones.

$$-q_1 - q_3 + q_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 = -q_1 + q_6 \quad (1)$$

$$-q_2 + q_3 + q_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 = q_2 - q_5 \quad (2)$$

Para la malla ABCD tenemos:

$$V_{AB} = \frac{q_3}{C} ; V_{BC} = \frac{q_6}{C} ; V_{AD} = \frac{q_5}{C}$$

$$V_{AB} + V_{BC} - V_{AD} = 0 \Rightarrow \frac{q_3}{C} + \frac{q_6}{C} - \frac{q_5}{C} = 0 \Rightarrow q_3 = q_5 - q_6 \quad (3)$$

Para la malla MPBN tenemos:

$$V_{MP} = \frac{q_1}{C} ; V_{AB} = \frac{q_3}{C} ; V_{NA} = \frac{q_2}{C}$$

$$V_{MP} - V_{AB} - V_{NA} = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{C} - \frac{q_3}{C} - \frac{q_2}{C} = 0 \Rightarrow q_3 = q_1 - q_2 \quad (4)$$

De las ecuaciones (1) y (3) y de (2) y (4) resulta:

$$-q_1 + q_6 = q_5 - q_6 \Rightarrow q_1 + q_5 = 2q_6$$

$$\Rightarrow q_2 = q_6$$

$$q_2 - q_5 = q_1 - q_2 \Rightarrow q_1 + q_5 = 2q_2$$

De (3) y (4) resulta:

$$q_3 = q_5 - q_6 = q_5 - q_2$$

$$q_3 = q_1 - q_2$$

restando  $0 = q_5 - q_2 - q_1 + q_2 \Rightarrow q_1 = q_5$

Sumando (1) y (4)

$$q_3 = -q_1 + q_6 = -q_1 + q_2$$

$$q_3 = q_1 - q_2$$

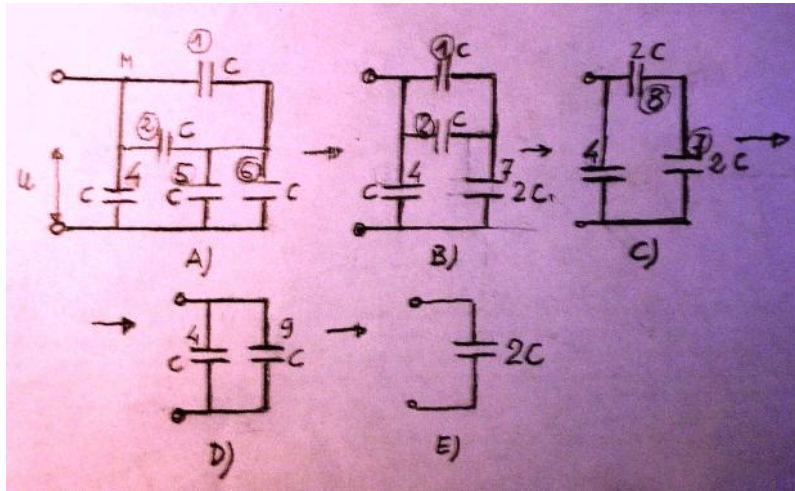
sumando  $2q_3 = 0 \Rightarrow q_3 = 0$

Si  $q_3=0$ , entonces  $q_1=q_6$  y  $q_2=q_5$ , se deduce que los condensadores 1,2 5 y 6 tienen la misma carga y la designamos con  $q$ .

De la figura 1 se deduce que

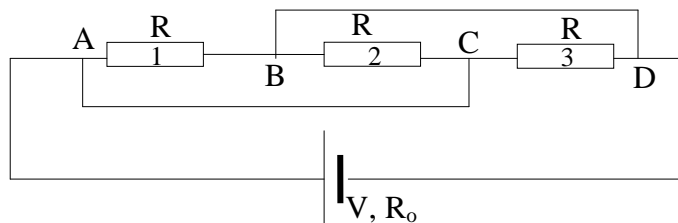
$$U = \frac{q_4}{C} \text{ y } V_{NA} + V_{AD} = \frac{q_2}{C} + \frac{q_5}{C} = U \Rightarrow q_4 = q_2 + q_5 = 2q$$

Dado que  $q_3=0$ , el circuito del problema es como si no existiese el condensador 3 y por tanto PAB es un único punto. En la figura 2 A se indica cómo queda el circuito. Los condensadores 5 y 6 están en paralelo y se pueden sustituir por el 7 de capacidad  $2C$  (fig.2B)El 1 y el 2 se sustituyen por el 8 de capacidad  $2C$  ( fig 2C) El 7 y el 8 por el 9 con capacidad  $C$  ( fig 2D). Finalmente 4 y 9 están en paralelo y se pueden sustituir por un condensador de capacidad  $2C$  ( fig 2E).



El circuito del enunciado tiene su equivalente en un único condensador de capacidad  $2C$ .

43.- A una fuente de corriente continua de resistencia interna  $R_o$  se unen tres resistencias iguales  $R$ , las cuales forman el esquema de la figura. Determinar para qué valor de  $R$  la potencia disipada en el conjunto de las tres resistencias es la máxima.



El conjunto de las tres resistencias puede ser reemplazado por una sola resistencia. Para ello tenemos en cuenta que los puntos A y C están al mismo potencial y que los puntos B y D tienen el mismo potencial. Por tanto es posible reemplazar el circuito de la figura superior por el de la figura 1

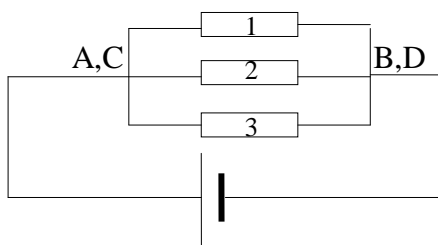


Fig.1

La resistencia equivalente al conjunto de las tres es  $R/3$ .

Aplicamos la ley de Ohm al circuito,

$$I = \frac{V}{R + R_o} \Rightarrow P = I^2 \cdot \frac{R}{3} = \left( \frac{V}{R + R_o} \right)^2 \cdot \frac{R}{3}$$

Para obtener la condición de potencia máxima derivamos  $P$  respecto de  $R$  e igualamos a cero

$$\frac{dP}{dR} = V^2 \frac{\left( \frac{R}{3} + R_o \right)^2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{R}{3} \cdot 2 \left( \frac{R}{3} + R_o \right) \cdot \frac{1}{3}}{\left( \frac{R}{3} + R_o \right)^4} = 0 \Rightarrow \left( \frac{R}{3} + R_o \right)^2 - \frac{2}{3} R \left( \frac{R}{3} + R_o \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{R}{3} + R_o \right) - \frac{2}{3} R = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} R = R_o \Rightarrow R = 3R_o$$

**44.-El modelo de Thomson para el átomo de hidrógeno es una esfera de radio  $R$  con carga positiva uniformemente distribuida sobre dicha esfera, en el centro de ella se encuentra un electrón. En conjunto el átomo es neutro. Calcular el valor de  $R$  si la energía mínima que hay que comunicar al electrón para arrancarlo del átomo y llevarlo al infinito vale  $W$ .**

**Datos: carga del electrón  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $W = 13,6$  eV**

En principio suponemos que el electrón se encuentra en el infinito y que existe una esfera de radio  $R$  uniformemente cargada positivamente. Acercamos el electrón hasta la superficie de la esfera de radio  $R$ , lo cual nos supondrá un trabajo que designamos por  $W_1$ . Posteriormente introducimos el electrón en la esfera hasta dejarlo en el centro de ella, lo cual supondrá un trabajo  $W_2$ .

Debemos tener en cuenta que el potencial eléctrico en el infinito es nulo y que el trabajo eléctrico es igual a

$$W = q(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}})$$

Calculamos el campo en la superficie de la esfera de radio  $R$ , para ello utilizamos el teorema de Gauss

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\epsilon_0} \Rightarrow E_s = \frac{e}{S} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

A partir del valor del campo calculamos el potencial en la superficie

$$E_s = -\frac{dV_s}{dR} \Rightarrow -V_s = \int \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} + \text{Cte}$$

Cuando  $R$  es infinito el potencial es cero, por lo que resulta:

$$V_s = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R}$$

El trabajo para llevar el electrón desde el infinito hasta la superficie de la esfera de radio  $R$  vale:

$$W_1 = e \left( 0 - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

El signo negativo indica que es un trabajo que se hace desde el exterior contra las fuerzas del campo.

Vamos a calcular el campo en el interior de la esfera de radio  $R$ . Para ello aplicamos el teorema de Gauss a una esfera concéntrica de radio  $r < R$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$q$  es la carga que existe en el interior de la esfera de radio  $r$ .

Teniendo en cuenta que la esfera de radio  $R$  tiene la carga  $e$  uniformemente distribuida, la densidad volumétrica de carga es:  $\frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$  y la carga de la esfera de radio  $r$

$$q = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = e \frac{r^3}{R^3}$$

El campo en el interior de la esfera de radio  $r$  es:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \frac{r^3}{R^3}}{r^2} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

Ahora calculamos el potencial en el interior de la esfera de radio  $R$ .

$$E_i = -\frac{dV_1}{dr} \Rightarrow -V_1 = \int \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r dr = \frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + Cte$$

Para determinar la constante tenemos en cuenta que cuando  $r=R$  el potencial es:

$$V_s = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$-\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{eR^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$-V_1 = \frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} - \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow V_1 = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

El potencial en el centro de la esfera se obtiene haciendo  $r=0$  en la ecuación anterior:

$$V_{\text{centro}} = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R}$$

El trabajo  $W_2$ , para llevar el electrón desde la superficie al centro de la esfera de radio  $R$  es:

$$W_2 = e(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}}) = e \left[ \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} - \left( \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R} \right) \right] = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Trabajo total.

$$W_T = W_1 + W_2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -\frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

El signo negativo indica que es un trabajo que se debe realizar desde el exterior:

$$W = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow R = \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 W} = \frac{3 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

**45.-Dos anillos finos de alambre tienen el mismo radio  $R$ , están uno frente al otro, de modo que tienen el mismo eje. La carga de uno es  $+q$  y la del otro  $-q$ . a) Calcular la diferencia de potencial que existen entre los centros de los anillos. b) Calcular el campo en el eje del anillo cuando  $a = R = 1 \text{ m}$**

a) Designamos a los anillos con A y B. El potencial en el centro del anillo A se debe al potencial que crea en ese punto su carga  $+q$  y que llamamos  $V_{AA}$ , más el potencial que crea la carga del otro anillo  $-q$  y que denominamos  $V_{BA}$ .

Recordemos que el potencial creado por una carga puntual  $Q$  a una distancia  $d$ , está dado por la expresión

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d}$$

En el anillo A la carga está distribuida de forma uniforme por todo el anillo siendo su densidad lineal

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

Si consideremos un trocito del anillo de longitud  $dl$  tendrá una carga

$$dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi R} dl$$

Y creará en el centro del anillo, un potencial  $dV_{AA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{q}{2\pi R} dl}{R}$ . El potencial creado por todo el anillo se obtiene integrando la anterior ecuación:

$$V_{AA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{q}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

El potencial creado por el anillo B en el centro de A

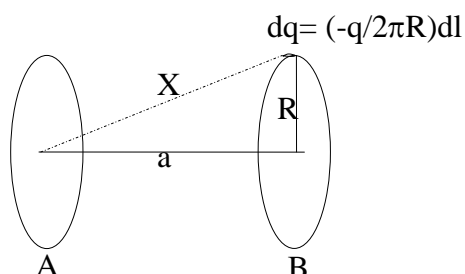


Fig.1

$$V_{BA} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-q dl}{2\pi R} \cdot \frac{1}{Y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} \int_0^{2\pi R} dl = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

El potencial en A es la suma de los dos potenciales

$$V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$$

El potencial en B es:

$$V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$$

La diferencia de potencial

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} + \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$$

b) En la figura 2 se ha representado el campo creado por un trocito del anillo A de carga  $dq$ , situado en 1, y otro trocito del anillo B con carga  $-dq$ .

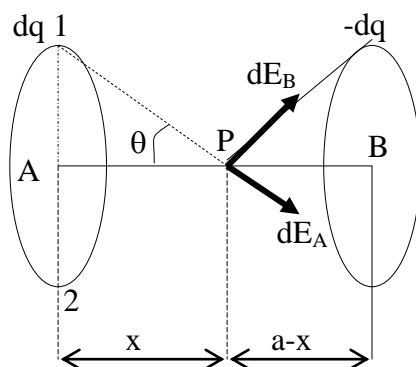


Fig.2

Si escogemos otro elemento del anillo A situado en 2 crearía un campo que sumado con el de 1 nos daría que la componente vertical se anula y la horizontal se suma. El razonamiento es válido para el anillo B.

$$dE_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{X^2} \Rightarrow (dE_A)_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{X^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{X^3} \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E_A)_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qR}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dE_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{Y^2} \Rightarrow (dE_B)_X = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{Y^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{Y^3} \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E_B)_X = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{q}{2\pi R} dl}{\left[ (a-x)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qR}{\left[ (a-x)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

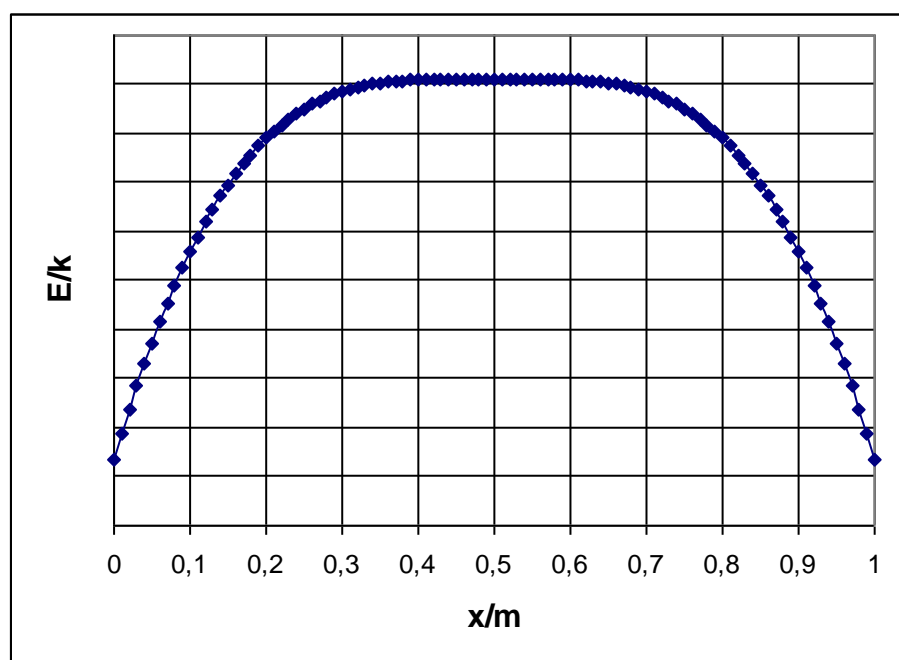
El campo en P es la suma de los dos anteriores

$$E = (E_A)_X + (E_B)_X = \frac{qR}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[ (a-x)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

La ecuación anterior para  $a=R=1$  m es:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[ (1-x)^2 + 1 \right]^{\frac{3}{2}}} \right] = k \left[ \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[ (1-x)^2 + 1 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Si en la ecuación damos valores a  $x$  y representamos  $E/k$  obtenemos una visión de cómo es el campo.



Alrededor de la posición  $x=0,5$  m el campo es prácticamente constante desde  $x=0,3$  m a  $x=0,7$  m.

**46.-Dos masas iguales  $m=10^{-3}$  kg con la misma carga  $Q =1 \mu\text{C}$  están apoyadas sobre un suelo horizontal a una distancia  $D =1$  m. Ambas masas se mantienen en reposo. Posteriormente se dejan en libertad; sabiendo que el coeficiente de rozamiento de las mencionadas masas con el suelo es  $\mu=0,1$ , se pide a) La distancia que recorrerá cada una de las masas hasta que se paran b) La ecuación de la velocidad de las masas c) El valor numérico de la velocidad máxima durante el movimiento. d) La gráfica de la velocidad frente a la distancia recorrida**  
**Datos  $g=10$  m/s<sup>2</sup> ;  $\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12}$  N<sup>-1</sup> m<sup>-2</sup> C<sup>2</sup>**

a) Cuando las masas se dejan en libertad se desplazan alejándose entre sí. Inicialmente las dos masas, debido a sus cargas, poseen energía potencial eléctrica, la cual disminuye a medida que se alejan, pero durante el movimiento existe una fuerza de rozamiento que realiza un trabajo disipativo. Un balance de energía nos dice que las masas se pararán cuando la pérdida de energía potencial eléctrica sea igual al trabajo de las fuerzas de rozamiento.

Designamos con  $z$  a la distancia que recorre cada una de las masas hasta que se paran. El balance de energía es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{D} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{D+2z} &= \mu mg \cdot 2z \Rightarrow \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D+2z} \right) = \mu mg \cdot 2z \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \mu mg} \left[ \frac{2z}{D(D+2z)} \right] &= 2z \Rightarrow \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \mu mg D} = D+2z \Rightarrow \\ \Rightarrow z &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 \mu mg D} - \frac{D}{2} \Rightarrow z = \frac{10^{-12}}{8\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 1} - \frac{1}{2} = 4,0\text{m} \end{aligned}$$

b) Designamos con  $x < z$  la distancia recorrida por cada una de las masas. La distancia entre ambas masas es  $D+2x$  y las fuerzas que actúan sobre una de las masas es la fuerza de repulsión eléctrica y la fuerza de rozamiento, ambas con la misma dirección y sentido contrario. Aplicamos la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(D+2x)^2} - \mu mg &= ma = m \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{dx}{dt} = m v \frac{dv}{dx} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(D+2x)^2} dx - \int \mu g dx &= \int v dv \end{aligned}$$

Para resolver la primera integral hacemos el siguiente cambio de variable:  $D+2x=a$   
Y por tanto  $2 dx = da$

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \int \frac{da}{2a^2} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{2a} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{2(D+2x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{2(D+2x)} - \mu g x = \frac{v^2}{2} + Cte \Rightarrow$$

Cuando  $x=0$ , la velocidad es cero

$$-\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{2D} = 0 + Cte \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{2D} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{2(D+2x)} - \mu g x \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D+2x} \right) - 2\mu g x} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10^{-12}}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3}} \left( 1 - \frac{1}{1+2x} \right) - 2 \cdot 0,1 \cdot 10x}$$

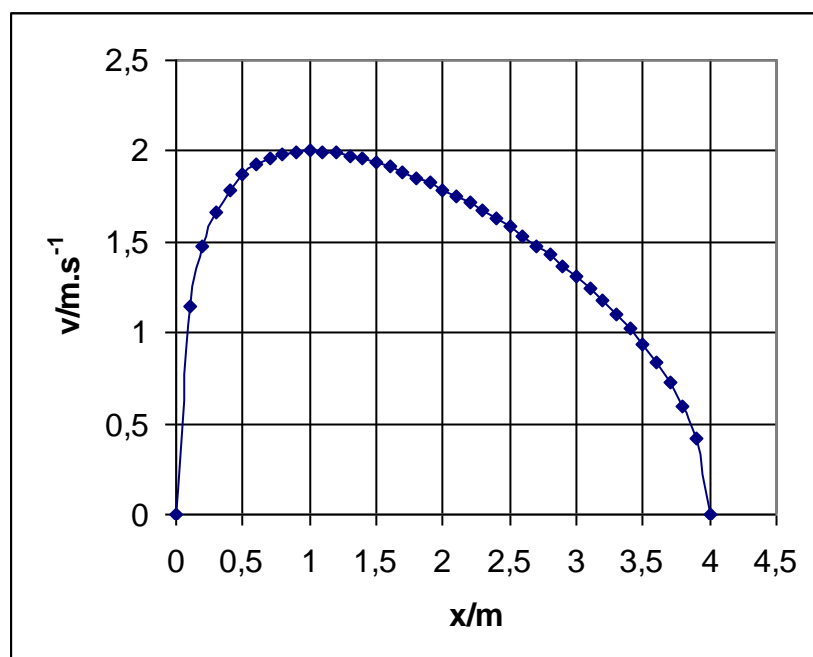
$$v = \sqrt{9 \left( \frac{1+2x-1}{1+2x} \right) - 2x} = \sqrt{\frac{16x-4x^2}{1+2x}}$$

c) Para hallar la velocidad máxima derivamos  $v$  con respecto  $x$  e igualamos a cero

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(1+2x) \cdot (16-8x) - (16x-4x^2) \cdot 2}{2\sqrt{16x-4x^2} \cdot (1+2x)^2} = 0 \Rightarrow 16-8x+32x-16x^2-32x+8x^2=0 \Rightarrow$$

$$16-8x-8x^2=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1 \text{ m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{16 \cdot 1 - 4 \cdot 1^2}{1+2 \cdot 1}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d)



**47.-Un motor eléctrico de corriente continua se conectó a una tensión  $U$ . La resistencia del inducido del anillo es  $R$ . Si la potencia del motor es la máxima posible, indicar a) cuál es la intensidad que atraviesa el devanado b) el valor de la potencia máxima y c) el rendimiento del motor.**

a) Designamos en general por  $i$  la intensidad que atraviesa el devanado del motor para una potencia cualquiera del motor.

$U_i$  es la potencia suministrada al circuito por la tensión,  $\varepsilon i$  la potencia desarrollada en el motor,  $i^2 R$  la potencia que se desarrolla en el devanado debido al efecto Joule.

Según el principio de conservación de la energía

$$U_i = \varepsilon i + i^2 R \Rightarrow \varepsilon i = U_i - i^2 R$$

Como la potencia  $\varepsilon i$  ha de ser la máxima posible, derivamos  $\varepsilon i$  con respecto a  $i$  e igualamos a cero

$$\frac{d \varepsilon i}{d i} = U - 2i R = 0 \Rightarrow i = \frac{U}{2R}$$

b) Potencia máxima

$$P_{\max} = \varepsilon i = U_i - i^2 R = \frac{U^2}{2R} - \frac{U^2}{4R^2} R = \frac{U^2}{4R}$$

c) Rendimiento

$$\eta = \frac{\varepsilon i}{U_i} = \frac{\frac{U^2}{4R}}{U \frac{U}{2R}} = \frac{1}{2}$$

48.- Una partícula alfa ( $Z=2, A = 4$ ) (posee una energía de 0,40 MeV y se dirige frontalmente contra un núcleo pesado de plomo ( $Z=82$ ) que se encuentra en reposo. a) Determinar la distancia mínima a la que se acerca la partícula alfa a dicho núcleo. b) Realizar el mismo calculo si la partícula se acerca frontalmente a un núcleo ligero de Litio ( $Z = 3$ ,

$$A=7). \text{ Dato: } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

a) Una suposición razonable es considerar que el núcleo pesado de plomo, aunque se le acerca la partícula alfa, permanece en reposo. Con este supuesto, la partícula alfa al irse acercando al núcleo de plomo pierde energía cinética que aparece en forma de energía potencial eléctrica.

$$E_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{Pb}}{r} \Rightarrow 0,40 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 82 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{r} \Rightarrow$$

$$r = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 82}{0,40 \cdot 10^6} = 5,9 \cdot 10^{-13} \text{ m} = 0,59 \text{ pm}$$

b) Cuando la partícula alfa se encuentra muy lejos del núcleo de litio posee una velocidad que designamos con  $v_o$ . Al irse acercando al núcleo de litio pierde velocidad y el núcleo de litio la gana, así que llegará un momento en que ambas velocidades se igualen, llamamos  $v$  a esta velocidad, cuando esto ocurre la distancia entre la partícula alfa y el núcleo de litio es la mínima.

Aplicamos los principios de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_o^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{Li}}{r} + \frac{1}{2} (m_\alpha + m_{Li}) v^2 \quad ; \quad m_\alpha v_o = (m_\alpha + m_{Li}) v \Rightarrow v = \frac{m_\alpha v_o}{m_\alpha + m_{Li}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_\alpha v_o^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{Li}}{r} + \frac{1}{2} (m_\alpha + m_{Li}) \left( \frac{m_\alpha v_o}{m_\alpha + m_{Li}} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_\alpha v_o^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{Li}}{r} + \frac{1}{2} \frac{(m_\alpha v_o)^2}{m_\alpha + m_{Li}} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{Li}}{r} = \frac{1}{2} m_\alpha v_o^2 - \frac{1}{2} \frac{(m_\alpha v_o)^2}{m_\alpha + m_{Li}} \quad (1)$$

Si  $E_c$  designa la energía cinética inicial de la partícula alfa tenemos que:

$$E_c = \frac{1}{2} m_\alpha v_o^2 \Rightarrow m_\alpha v_o^2 = 2E_c$$

Llevando las ecuaciones anteriores a (1) resulta:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{Li}}{r} = E_c - \frac{1}{2} \frac{m_\alpha \cdot 2E_c}{m_\alpha + m_{Li}} = E_c \left( 1 - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_{Li}} \right) = E_c \left( \frac{m_{Li}}{m_\alpha + m_{Li}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{q_\alpha q_{Li}}{4\pi\epsilon_0 \cdot E_c \left( \frac{m_{Li}}{m_\alpha + m_{Li}} \right)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{0,40 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \left( \frac{7}{4+7} \right)} = 3,4 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 0,034 \text{ pm}$$

49.-Dos cargas puntuales  $+q$  y  $-q$  están situadas sobre el eje  $X$ , la positiva con  $x=-L$  y la negativa con  $x=+L$ . Un círculo de radio  $R$  tiene su centro en el origen de coordenadas y está situado en el plano  $YZ$ . Se pide el flujo eléctrico que atraviesa el mencionado círculo.

Por definición el flujo eléctrico que atraviesa una superficie es:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

En la figura 1 está representado el círculo de radio  $R$ . El campo eléctrico varía de unos puntos a otros del círculo, por ello se ha tomado, a una distancia  $x$ , un anillo circular de espesor  $dx$ . Todos los puntos de ese anillo están a la misma distancia de las cargas y por tanto en todos ellos existe el mismo campo eléctrico.

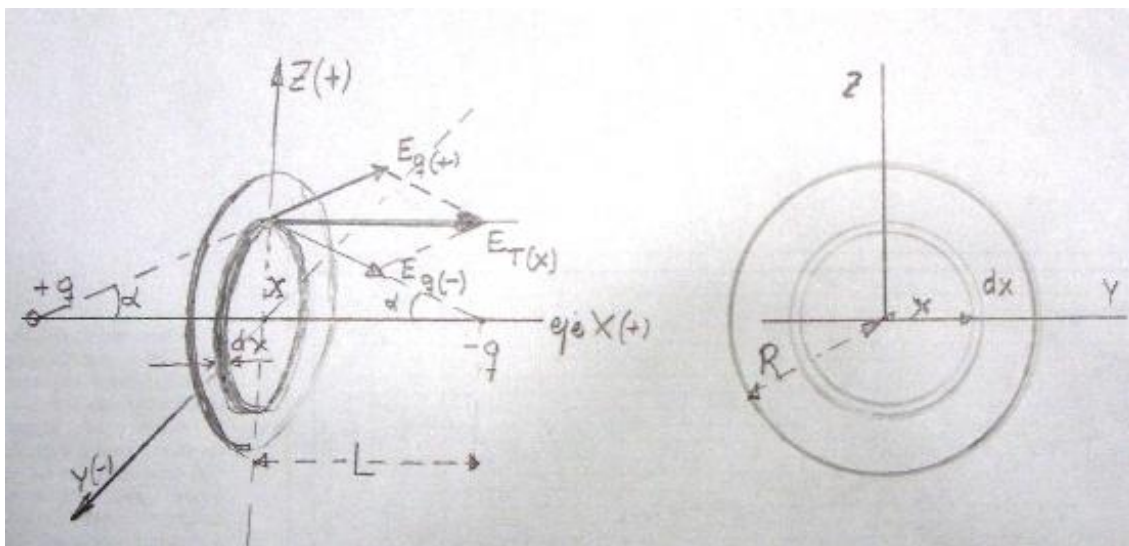


Fig.1

En la figura 1 se observan los campos que crean las dos cargas y se deduce que las componentes sobre el eje  $X$  se suman mientras que las que están sobre el eje  $Y$  se anulan.

$$E_x(+q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(L^2 + x^2)} \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(L^2 + x^2)} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + x^2}} ;$$

$$E_x(-q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(L^2 + x^2)} \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(L^2 + x^2)} \cdot \frac{L}{L+x}$$

$$E_{T(x)} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q L}{(L^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$E_{T(x)}$  es perpendicular al anillo. La integral del flujo resulta ser:

$$\Phi_E = \int_0^R E_{T(x)} \cdot 2\pi x dx = \int_0^R \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qL}{(L^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi x dx = \frac{qL}{\epsilon_0} \int_0^R \frac{x dx}{(L^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

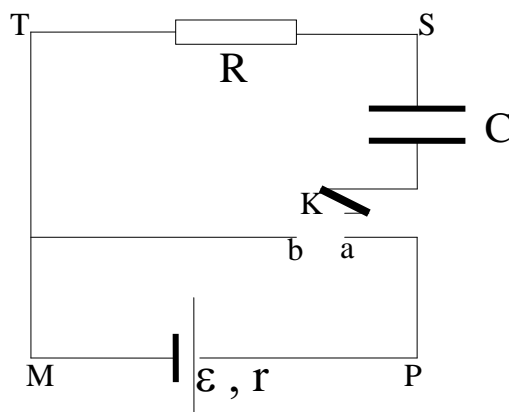
Para resolver la integral hacemos el cambio de variable

$$L^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow x dx = a da$$

$$\int_0^R \frac{a da}{a^3} = -\frac{1}{a} \Big|_0^R = -\frac{1}{\sqrt{L^2 + x^2}} \Big|_0^R = \frac{1}{L} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right)$$

50.-En el circuito de la figura el conmutador electrónico  $K$  realiza  $N$  ciclos por segundo entre  $a$  y  $b$ . Cuando dicho conmutador está en la posición  $a$ , el condensador se encuentra completamente cargado y cuando está en  $b$  se descarga totalmente. Calcular la relación entre la potencia disipada en la resistencia  $R$  y la potencia suministrada por la pila.



Veamos en primer lugar cómo funciona el circuito. Cuando  $K$  hace contacto con  $a$ , la pila carga el condensador, de modo que éste en el instante inicial tiene carga cero y al cabo de un tiempo  $\Delta t$  se carga completamente siendo  $Q$  la carga de una de sus armaduras. Mientras se carga el condensador la intensidad que recorre la resistencia  $R$  la designamos con  $I$ , siendo  $I$  variable. Esta misma intensidad pasa por la pila. Cuando a continuación el conmutador pasa a la posición  $b$ , la pila queda desconectada del condensador, y entonces el condensador se descarga a través de la resistencia  $R$ .

En el instante en que circula la intensidad  $I$  resulta que:

$$V_C + IR = V_{MP} = \epsilon - Ir$$

Siendo  $V_C$  la caída de tensión entre las armaduras del condensador. En el instante inicial  $V_C$  es cero, pero a medida que transcurre el tiempo  $V_C$  aumenta y llegará un momento en que  $V_C = \epsilon$ , entonces el condensador se ha cargado completamente con una carga  $Q$ , y la intensidad de la corriente es nula.

La carga  $Q$  ha pasado por la pila por lo que ésta ha dado al circuito una energía  $W = Q\epsilon$  en cada ciclo. El condensador almacena en cada ciclo una energía  $W_C = \frac{1}{2} C\epsilon^2$ . Teniendo en cuenta que  $C = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow W = Q\epsilon = C\epsilon^2$ , por tanto, la mitad de

la energía suministrada por la pila se la lleva el condensador y la otra mitad es energía térmica que se disipa en la resistencia  $R$  y en la interna  $r$  de la pila. Como por la pila y por  $R$  pasa la misma intensidad de corriente y durante el mismo tiempo, las energías guardan la relación

$$\frac{W_R}{W_r} = \frac{R}{r} \Rightarrow W_r = W_R \frac{r}{R}$$

$$W_R + W_r = W_R \left( 1 + \frac{r}{R} \right) = \frac{1}{2} C\epsilon^2 \Rightarrow W_R = \frac{C\epsilon^2 R}{2(R+r)}$$

Cuando el conmutador K pasa a b, la energía almacenada en el condensador pasa a la resistencia R, la energía en R y en un ciclo es:

$$W_R + \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = \frac{C\varepsilon^2 R}{2(R+r)} + \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = \frac{C\varepsilon^2}{2} \left( \frac{R}{R+r} + 1 \right) = \frac{C\varepsilon^2}{2} \left( \frac{2R+r}{R+r} \right)$$

Si se verifican N ciclos por segundo la potencia suministrada por la pila es  $P_P = N Q \varepsilon$  y la potencia consumida en la resistencia R es:  $P_R$

$$\frac{P_R}{P_P} = \frac{N \frac{C\varepsilon^2}{2} \left( \frac{2R+r}{R+r} \right)}{NQ\varepsilon} = \frac{\frac{C\varepsilon^2}{2} \left( \frac{2R+r}{R+r} \right)}{C\varepsilon^2} = \frac{2R+r}{2(R+r)}$$

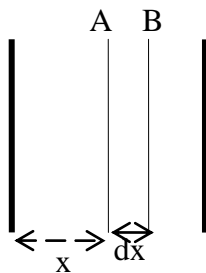
**51.-Entre las armaduras de un condensador plano se coloca un dieléctrico que tiene la propiedad de que su constante dieléctrica varía linealmente entre los valores  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  siendo  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ . Determinar la capacidad de este condensador.**

Designamos con  $q$  a la carga y con  $S$  la superficie de una armadura del condensador. El desplazamiento eléctrico es igual a:

$$D = \frac{q}{S} = \sigma$$

$D$  está ligado a las cargas libres.

En la figura consideramos una sección del dieléctrico  $AB$ , que dista  $x$  de la armadura izquierda y que tiene un espesor  $dx$ ;  $d$  es la distancia entre las armaduras del condensador,  $\epsilon_x$  es la constante dieléctrica de  $AB$ .



Teniendo en cuenta que  $D$  está ligado a las cargas libres, escribimos

$$D = \epsilon_x \epsilon_0 E_x = \frac{q}{S} \Rightarrow E_x = \frac{q}{S \epsilon_x \epsilon_0}$$

La diferencia de potencia entre A y B es:

$$dV_{AB} = E_x dx = \frac{q}{S \epsilon_x \epsilon_0} dx$$

Dado que la constante dieléctrica varía linealmente con la distancia podemos escribir:

$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} = \frac{\epsilon_x - \epsilon_1}{x} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)x}{d} + \epsilon_1$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$dV_{AB} = E_x dx = \frac{q}{S\epsilon_0 \left[ \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)x}{d} + \epsilon_1 \right]} dx \Rightarrow V_{AB} = \frac{q}{S\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \cdot \ln \left( \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)x}{d} + \epsilon_1 \right) \Bigg|_0^d$$

$$V_{AB} = \frac{q}{S\epsilon_0} \cdot \frac{d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \left[ \ln(\epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_1) - \ln \epsilon_1 \right] = \frac{qd}{S\epsilon_0} \cdot \frac{\ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{\epsilon_2 - \epsilon_1}$$

La capacidad del condensador es:

$$C = \frac{q}{V_{AB}} = \frac{qd}{\frac{q}{S\epsilon_0} \frac{\ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{\epsilon_2 - \epsilon_1}} = \frac{S\epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \left( \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)}$$

52.- Una delgada barra recta de longitud  $2a$  posee una carga distribuida uniformemente de valor  $q$ . Se pide el campo eléctrico creado por dicha barra en los puntos  $P$  y  $P'$  que distan del centro de la barra la distancia  $r$ .  $P$  se encuentra en la recta perpendicular al centro de la barra y  $P'$  en el eje de la barra, siendo  $r > a$ .

En la figura 1 se indica la posición de  $P$ .

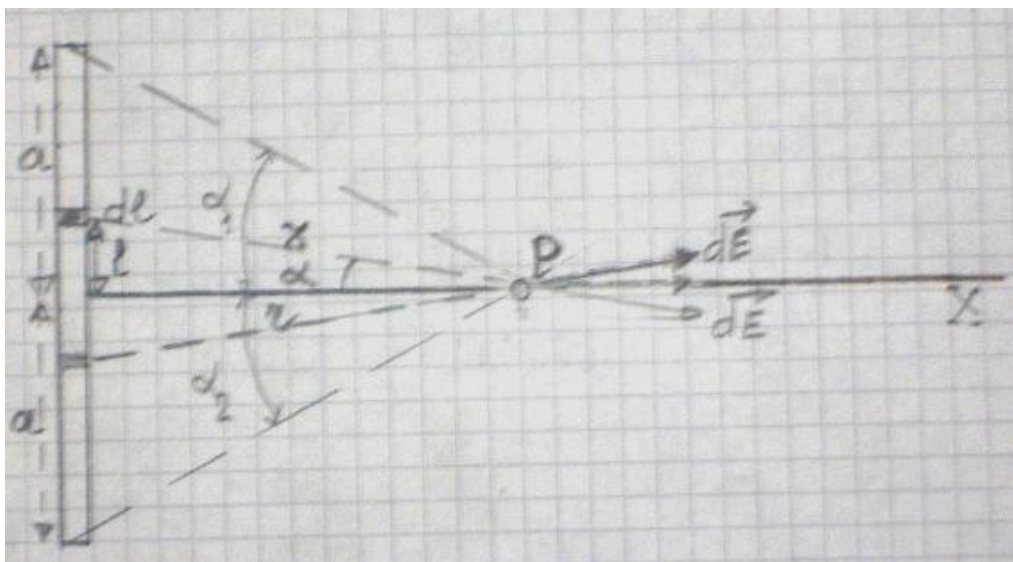


Fig.1

Sobre la barra se elige un elemento de longitud  $dl$  situado a una distancia  $l$  del centro de la barra que posee una carga  $\frac{q}{2a} dl$ . Este elemento crea en  $P$  un campo

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{q}{2a} dl}{x^2} \vec{i}$$

cuyas componentes son  $d\vec{E}\cos\alpha$  ;  $-d\vec{E}\sin\alpha$ . Como sobre la barra se puede escoger otro elemento  $dl$  simétrico del anterior que origina un campo cuyas componentes son  $d\vec{E}\cos\alpha$  ;  $d\vec{E}\sin\alpha$ , se deduce que solamente hemos de considerar la componente sobre el eje  $X$ , esto es, la componente horizontal. Empleando módulos llegamos a

$$dE_x = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \frac{\cos\alpha}{x^2} dl$$

En la ecuación anterior existen tres variables, a saber,  $l$ ,  $x$  y  $\alpha$ , las cuales están relacionadas entre sí, por lo que la ecuación anterior la transformamos para que sólo quede en función de  $\alpha$ .

De la figura 1 se deduce:

$$l = r \operatorname{tag} \alpha \Rightarrow dl = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha ; \quad x = \frac{r}{\cos \alpha}$$

Llevamos estas relaciones a la ecuación del campo

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2ar} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cos \alpha d\alpha \Rightarrow$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2ar} (\operatorname{sen} \alpha_1 - \operatorname{sen} \alpha_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2ar} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} - \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right) \right]$$

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{a^2 + r^2}}$$

En la figura 2 se representa la posición de P', en el eje de la barra y el campo creado por el elemento de corriente de longitud dx

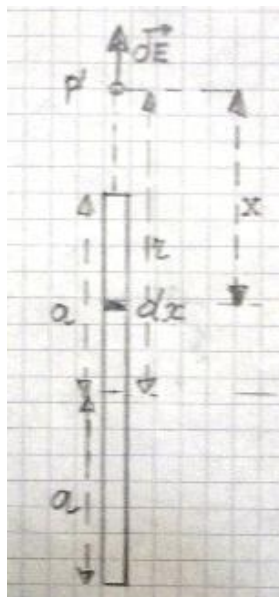


Fig.2

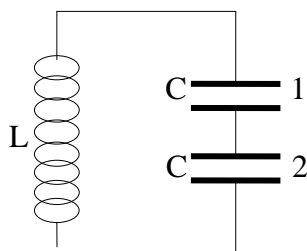
El campo creado por ese elemento de carga es:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \frac{dx}{x^2} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \int_{r-a}^{r+a} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \left( -\frac{1}{r+a} + \frac{1}{r-a} \right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \left( \frac{-r+a+r+a}{(r-a)^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r-a)^2}$$

53.-En el circuito de la figura inferior los dos condensadores tienen la misma capacidad  $C$  y la bobina tiene un coeficiente de autoinducción  $L$ . No hay resistencia óhmica en el circuito. El condensador 1 se carga con una diferencia de potencial  $\varepsilon$ , el 2 está descargado.

Determinar. a) La intensidad que circula por el circuito en régimen estacionario. b) Las ecuaciones de las cargas de los condensadores frente al tiempo. c) Si  $C = 1 \mu F$ ,  $L=0,1 H$ ,  $\varepsilon=100V$  dibujar la gráfica intensidad frente al tiempo y la gráfica de la carga de los condensadores frente al tiempo. Calcular el tiempo que transcurre desde que el condensador 1 está completamente cargado hasta que su carga se reduce a la mitad.



a) El circuito es oscilante y su periodo es igual a  $T = 2\pi\sqrt{LC_E} = 2\pi\sqrt{L\frac{C}{2}}$ . La intensidad en régimen estacionario es armónica

$$I = I_m \sin \omega t = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t$$

La carga inicial del condensador 1 es igual a  $q_i = C\varepsilon$ .

En un determinado instante la carga del condensador 2 es  $q_2$ , la del condensador 1  $q_i - q_2$  y la intensidad instantánea  $I$ .

Al no haber resistencia óhmica no hay pérdidas de energía calorífica y podemos escribir que la energía reinicial del condensador 1 está ahora repartida en la autoinducción y en los dos condensadores.

$$\frac{q_i^2}{2C} = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{(q_i - q_2)^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{q_i^2 - (q_i - q_2)^2 - q_2^2}{LC}} = \sqrt{\frac{2q_i q_2 - 2q_2^2}{LC}} \quad (1)$$

Para calcular la intensidad máxima derivamos  $I$  con respecto a  $q_2$  e igualamos a cero.

$$\frac{dI}{dq_2} = \frac{2q_i - 4q_2}{2\sqrt{\frac{2q_i q_2 - 2q_2^2}{LC}}} = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{q_i}{2}$$

Llevamos esta condición a la ecuación de la intensidad

$$I_m = \sqrt{\frac{2q_i \frac{q_i}{2} - 2\frac{q_i^2}{4}}{LC}} = \sqrt{\frac{q_i^2}{2LC}} = \sqrt{\frac{C^2 \varepsilon^2}{2LC}}$$

La ecuación de la intensidad en el circuito es:

$$I = \sqrt{\frac{C^2 \varepsilon^2}{2LC}} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T} t = \sqrt{\frac{C^2 \varepsilon^2}{2LC}} \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{2\pi \sqrt{\frac{LC}{2}}} t = \sqrt{\frac{C^2 \varepsilon^2}{2LC}} \cdot \text{sen} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t \quad (2)$$

b) Igualamos la ecuación (1) y (2)

$$\sqrt{\frac{C^2 \varepsilon^2}{2LC}} \cdot \text{sen} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t = \sqrt{\frac{2q_i q_2 - 2q_2^2}{LC}} \Rightarrow \frac{C^2 \varepsilon^2}{2LC} \cdot \text{sen}^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t = \frac{2q_i q_2 - 2q_2^2}{LC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_2^2 - q_i q_2 + \frac{C^2 \varepsilon^2}{4} \cdot \text{sen}^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{q_i \pm \sqrt{q_i^2 - 4 \cdot \frac{C^2 \varepsilon^2}{4} \cdot \text{sen}^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t}}{2} \Rightarrow$$

$$q_2 = \frac{q_i \pm \sqrt{q_i^2 - 4 \cdot \frac{q_i^2}{4} \cdot \text{sen}^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t}}{2} = \frac{q_i \pm \sqrt{q_i^2 \cdot \left(1 - \text{sen}^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t\right)}}{2} = \frac{q_i \left(1 \pm \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t\right)}{2}$$

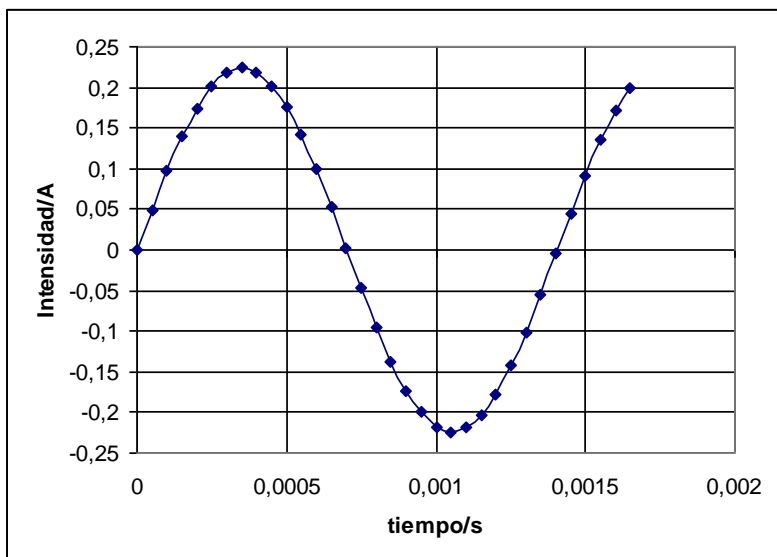
Para  $t=0$  la carga del condensador 2 es nula, por tanto, en la ecuación anterior escogemos el signo negativo

$$q_2 = \frac{q_i}{2} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t\right) \Rightarrow q_1 = q_i - q_2 = q_i - \frac{q_i}{2} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t\right) = \frac{q_i}{2} \left(1 + \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t\right)$$

c) Sustituimos en (2) los valores numéricos

$$I = \sqrt{\frac{(10^{-6})^2 \cdot (10^2)^2}{2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}}} \text{sen} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{0,1 \cdot 10^{-6}}} = 0,22 \text{sen} 4472 t \text{ A}$$

Dando valores a  $t$  se obtiene la siguiente gráfica.

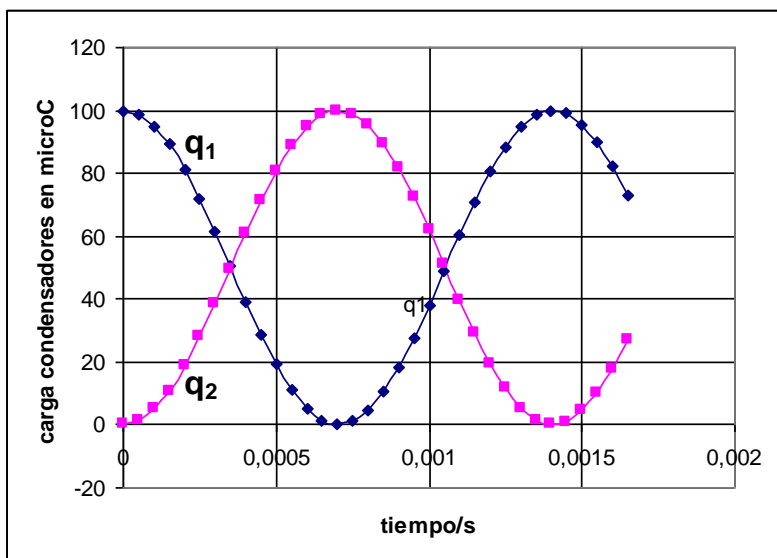


Sustituimos los valores numéricos en  $q_1$  y  $q_2$ .

$$q_i = 10^{-6} \cdot 10^2 = 10^{-4} = 100 \mu\text{C} \Rightarrow q_1 = 50 \left( 1 + \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t \right) = 50(1 + \cos 4472 t) \mu\text{C}$$

$$q_2 = 50 \left( 1 - \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t \right) = 50(1 - \cos 4472 t) \mu\text{C}$$

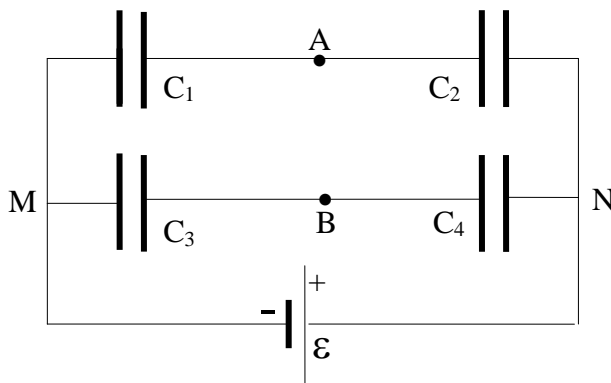
Dando valores a  $t$  se obtiene la siguiente gráfica



Cuando los dos condensadores tienen la misma carga es que el 1 la ha reducido a la mitad

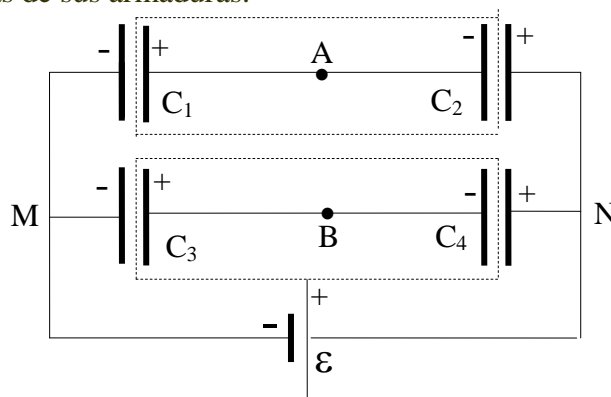
$$1 + \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t = 1 - \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t \Rightarrow 2 \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$
$$t = \frac{\pi \sqrt{LC}}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi \sqrt{0,1 \cdot 10^{-6}}}{2\sqrt{2}} = 0,00035 \text{ s}$$

54.-Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B del circuito de la figura inferior.



Establecer la condición para que la diferencia de potencial  $V_A - V_B$  sea nula.

Teniendo en cuenta los signos de la batería podemos asignar a cada condensador el signo de las cargas de sus armaduras.



Designamos con  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$  la carga de cada condensador. La línea de puntos entre los condensadores 1 y 2 nos indica que la suma de las cargas es nula, esto es,  $q_1 = q_2$ . Análogamente para los condensadores 3 y 4,  $q_3 = q_4$ .

$$V_A - V_M = \frac{q_1}{C_1} \quad (1) ; \quad V_N - V_A = \frac{q_2}{C_2} \quad (2) ; \quad V_B - V_M = \frac{q_3}{C_3} \quad (3) ; \quad V_N - V_B = \frac{q_4}{C_4} \quad (4)$$

$$\text{De (1) y (3) resulta: } V_A - V_B = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} ; \quad \text{De (2) y (4) resulta: } V_A - V_B = \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_2}{C_2}$$

De (1) y (2)

$$V_N - V_M = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = \varepsilon \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1}{C_2} = \varepsilon \Rightarrow \frac{q_1(C_1 + C_2)}{C_1 C_2} = \varepsilon \Rightarrow q_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon = q_2$$

De (3) y (4)

$$V_N - V_M = \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4} = \varepsilon \Rightarrow \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_3}{C_4} = \varepsilon \Rightarrow \frac{q_3(C_3 + C_4)}{C_3 C_4} = \varepsilon \Rightarrow q_3 = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \varepsilon = q_4$$

$$V_A - V_B = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon - \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \varepsilon = \varepsilon \left( \frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{C_4}{C_3 + C_4} \right) = \varepsilon \frac{C_2 C_3 - C_1 C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}$$

Para que  $V_A - V_B$  sea cero debe serlo el numerador de la ecuación anterior

$$C_2 C_3 = C_1 C_4 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$$