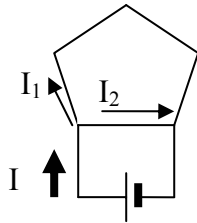


**1.- Se construye un pentágono regular con hilo uniforme de igual grosor. Dos vértices contiguos del pentágono se unen por medio de hilos conductores a una batería. Calcular la intensidad del campo magnético en el centro geométrico del pentágono.**

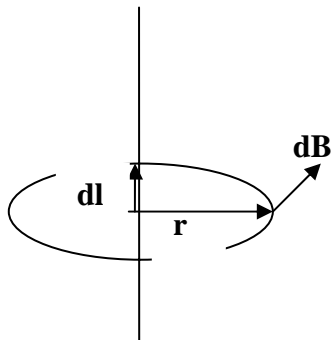
El esquema eléctrico del circuito es la figura inferior.



La corriente  $I$  procedente de la batería se bifurca en  $I_1$  e  $I_2$ . La intensidad  $I_1$  es cuatro veces inferior a  $I_2$ , puesto que el ramal superior del pentágono tiene cuatro lados y el inferior uno.

Para decidir la dirección del campo magnético creado por cada uno de los lados debemos recordar la ley de Biot-Savart.

Si consideramos un elemento de conductor  $d\vec{l}$  recorrido por una corriente  $I$ , la intensidad del campo magnético está dado por la expresión



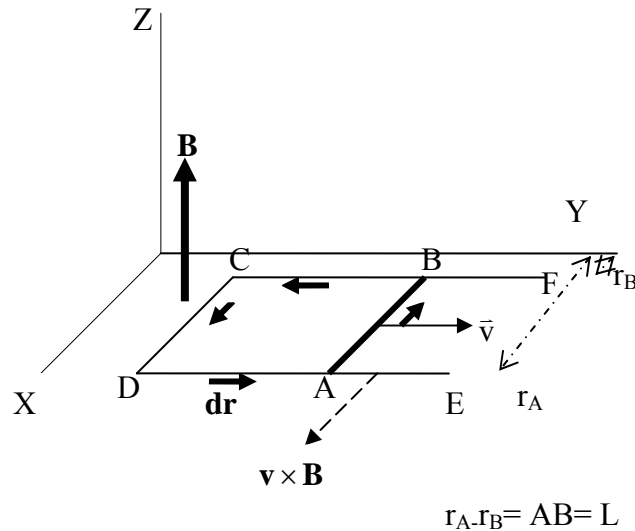
$$\vec{dB} = K \frac{I \vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

El producto vectorial  $\vec{dl} \times \vec{r}$ , nos indica la dirección de  $\vec{dB}$ . Si  $\vec{dl}$  y  $\vec{r}$  se encuentran en el plano del papel el campo magnético es perpendicular al plano del papel y dirigido hacia adentro

Si aplicamos lo dicho anteriormente al caso del polígono, deducimos que los cuatro lados por los que circula  $I_1$  crean un campo magnético perpendicular al plano que contiene el pentágono y dirigido hacia dentro. El campo de esos cuatro lados es la suma de cada uno de ellos.

En cambio el lado por el que circula  $I_2 = 4I_1$  es perpendicular al plano del pentágono pero dirigido hacia fuera. Dado que el campo depende de  $I$  y de la distancia y en los dos casos la distancia es la misma, se deduce que el campo magnético de los cuatro lados es igual al del único lado por circular por este último una intensidad cuatro veces mayor. En consecuencia el campo total es nulo.

2.- En el dispositivo de la figura inferior  $AB$  es una varilla conductora que se apoya sobre un conductor fijo  $FCDE$ . La varilla conductora puede deslizarse sin rozamiento sobre el conductor fijo. Un campo magnético uniforme  $B=2.10^{-2} T$  tiene la dirección positiva del eje  $z$  y se extiende sobre el plano  $XY$ . Si la varilla  $AB$  se desliza con velocidad  $\vec{v} = v\vec{j}$ , siendo  $v= 3 m/s$ . Calcular la fuerza electromotriz inducida. La resistencia eléctrica del circuito es  $3 \Omega$ . Determinar la potencia que se debe aplicar para mantener el sistema en movimiento.



La ecuación  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  nos permite decir dónde se acumulan los electrones. En la figura está representado el vector  $\vec{v} \times \vec{B}$  que al multiplicar por la carga negativa del electrón indica una fuerza sobre los mismos dirigida desde A a B, en otras palabras el extremo A es el positivo y el B el negativo. Esto nos indica que la corriente en el circuito es en el sentido ADCBA. Para calcular la fuerza electromotriz inducida, calculamos la circulación a lo largo de la línea cerrada ABCD.

$$\oint \vec{E}_m \cdot d\vec{r} = \oint \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{r} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \oint |\vec{v} \times \vec{B}| dr \cos \alpha$$

En la integral anterior la circulación por BC, CD y DA es nula por ser el producto  $\vec{v} \times \vec{B}$ , ya que  $v=0$ , además  $\alpha$  es  $180^\circ$ , por lo que la integral anterior queda reducida a

$$\int_A^B -vB dr = -vB \int_{r_A}^{r_B} dr = -vB(r_A - r_B) = -vB AB = -vBL$$

El movimiento de la varilla no es espontáneo, ya que al aparecer una corriente desde B hacia A, sobre la varilla aparece una fuerza dada por la ecuación

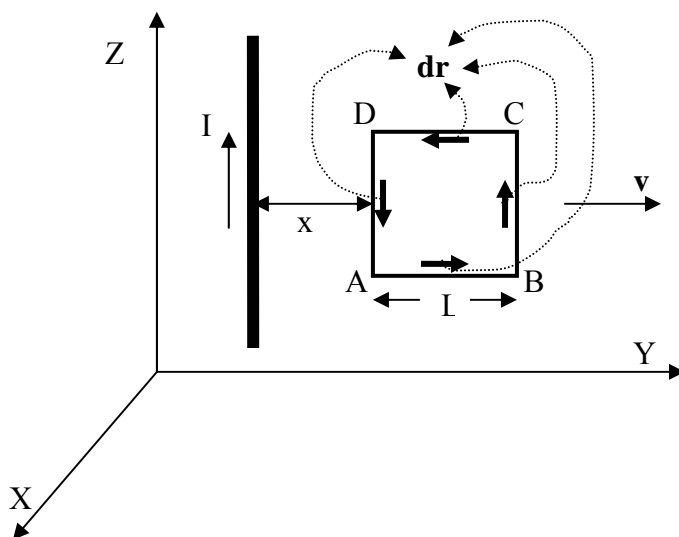
$$\vec{F}_{AB} = I \vec{AB} \times \vec{B} \Rightarrow F_{AB} = I LB$$

Siendo  $I$  la intensidad de la corriente inducida que atraviesa la varilla  $AB$  y cuyo valor es  $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{vB L}{R}$ , siendo  $R$  la resistencia del circuito.  $\vec{AB}$  es un vector dirigido desde  $A$  hacia  $B$ , el producto vectorial por  $\vec{B}$  da lugar a que el vector  $\vec{F}_{AB}$  tenga la dirección negativa del eje  $Y$ , esto es, contrario a la velocidad. En consecuencia si queremos que la varilla se desplace con velocidad  $v$  constante hacia la derecha hemos de aplicar un fuerza igual en modulo a  $F_{AB}$  y dirigida hacia el eje  $Y$  positivo. La potencia que hemos de aplicar es el trabajo efectuado en un tiempo dividido por ese tiempo. En el tiempo  $\Delta t$  la varilla se desplaza hacia la derecha una distancia  $v\Delta t$  el trabajo es  $F_{AB} v\Delta t$  y la potencia

$$P = \frac{F_{AB} v \Delta t}{\Delta t} = I L B v$$

En definitiva lo que ocurre es que hay que aplicar un trabajo para desplazar la varilla y ese trabajo aparece en forma de energía eléctrica, si no fuese así resultaría que tendríamos una corriente eléctrica sin consumir trabajo y eso es imposible.

3.- El hilo conductor, de longitud infinita, lleva una corriente de  $I$  amperios. El cuadro conductor, de lado  $L$ , se desplaza con una velocidad  $v$



ambos se encuentran en el mismo plano  $YZ$ . Determinar la fuerza electromotriz inducida en el cuadro en función de la distancia  $x$ .

Para calcular la fuerza electromotriz inducida, calculamos la circulación a lo largo de la línea cerrada ABCD.

Antes veamos la dirección y sentido del vector  $\vec{v} \times \vec{B}$ , en cada uno de los lados y el ángulo que forma dicho vector con los  $d\vec{r}$  de cada uno de los lados.

El campo magnético creado por el hilo conductor tiene de módulo  $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  y el vector  $\vec{B}$  tiene la dirección del eje X negativo.

$\vec{v} \times \vec{B}$  sobre el lado BC forma un ángulo de cero grados con  $d\vec{r}$

$\vec{v} \times \vec{B}$  sobre el lado DA forma un ángulo de ciento ochenta grados  $d\vec{r}$

$\vec{v} \times \vec{B}$  sobre cualquier punto del lado AB forma un ángulo de 90 grados con  $d\vec{r}$

$\vec{v} \times \vec{B}$  sobre cualquier punto del lado CD forma un ángulo de 90 grados con  $d\vec{r}$

Según lo anterior

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{r} = \oint \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{r} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \int_B^C vB \, dr + \int_D^A -vB \, dr = vB_{BC}a - vB_{DA}a \Rightarrow$$

$$\varepsilon = v \frac{\mu_0 I}{2\pi (x+a)} a - v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a = \frac{v\mu_0 I a}{2\pi} \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right) = \frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left[ \frac{-a}{x(x+a)} \right] = -\frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x(x+a)}$$

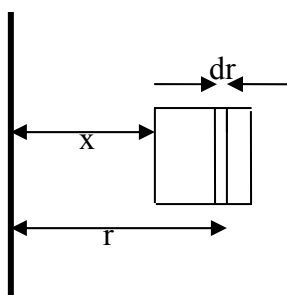
La interpretación del signo menos es la siguiente: De acuerdo con la ley de Lenz la fuerza electromotriz inducida se opone a la causa introducida en el circuito. Al moverse el circuito hacia la izquierda el flujo que lo atraviesa disminuye y la fuerza electromotriz inducida trata de mantenerlo „ para ello , existen dos opciones posibles que la corriente vaya en el sentido ABCDA o en el sentido ADCBA. Si ocurriese el sentido ABCDA el flujo debido a esa corriente no se opone a la disminución de flujo que ocurre por moverse la espira hacia la izquierda, en cambio si ocurre en el sentido ADCBA entonces trata de que no disminuya el flujo debido al movimiento de la espira ya que el campo magnético inducido tiene el sentido del campo B creado por la corriente. Ese sentido de giro es negativo ya que se dirige del eje Z al Y.

Este problema se puede también resolver a partir de la ecuación  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$

Llamamos  $x_0$  a la distancia desde el hilo al lado DA de la espira en el tiempo  $t=0$  y designamos con  $x$  la distancia del hilo al lado DA en el tiempo  $t$

$$x=x_0+vt$$

Consideremos una franja de espesor  $dr$  en la espira , como indica la figura



El flujo magnético que atraviesa la franja vale  $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot adr \cdot \cos 180^\circ$ .

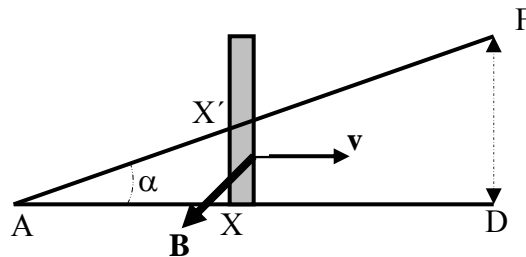
El flujo a través de la espira

$$\Phi = \int_x^{x+a} -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{x_0 + vt + a}{x_0 + vt}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} * \frac{x_0 + vt}{x_0 + vt + a} * \frac{(x_0 + vt)v - (x_0 + vt + a)v}{(x_0 + vt)^2} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} * \frac{x}{x+a} * \frac{xv - xv - av}{x^2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi} * \frac{1}{x(x+a)}$$

4.- Una barra cuya resistencia eléctrica por unidad de longitud es  $\rho$ , desliza, con velocidad constante  $v$ , sobre dos conductores sin resistencia. Estos conductores forman entre sí un ángulo  $\alpha$ . Perpendicular al plano que forman la barra y los conductores se encuentra un campo magnético uniforme  $B$  (ver la figura inferior). La longitud del conductor  $AD$  es  $L$  y la de la barra es iguala la distancia  $DF$ . Se pide calcular el calor despendido cuando la barra se desplaza desde  $A$  hasta  $D$ .



Al desplazarse la barra hacia la derecha aumenta la superficie  $AXX'$  y como consecuencia de ello se produce una fuerza electromotriz inducida cuyo modulo vale la derivada del flujo que atraviesa ese aumento de superficie con relación al tiempo. Esto se traduce en que aparece una corriente en el circuito  $AXX'$  cuya intensidad se dirige desde  $X'$  a  $X$  en la barra, por lo que finalmente sobre la barra debe aparecer una fuerza de sentido contrario al vector velocidad. Esta fuerza supone un trabajo que se debe hacer desde el exterior para mantener la barra en movimiento.

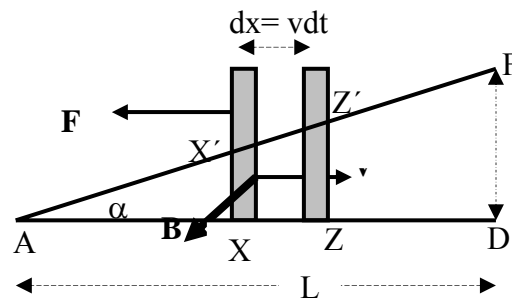


Fig.1

En la figura 1 la barra se ha desplazado hacia la derecha una longitud  $dx$  en un tiempo  $dt$  de modo que  $dx = vdt$ . En el instante inicial la superficie cerrada es  $AXX'$  y luego es  $AZZ'$ .

Designamos con  $m$  a la longitud en la barra  $XX'$ , con  $n$  a la longitud en la barra  $ZZ'$ . Y con  $x$  a la distancia  $AX$ . El aumento de superficie es:

$$dS = \frac{n(x + vdt)}{2} - \frac{mx}{2} \quad (1)$$

La relación ente  $m$  y  $n$  la hacemos por medio del ángulo  $\alpha$ .

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{m}{x} = \frac{n}{x + v \, dt} \Rightarrow n = \frac{m(x + v \, dt)}{x}$$

Sustituyendo en (1)

$$dS = \frac{m(x + v \, dt)^2}{2x} - \frac{mx}{2} = \frac{mx^2 + 2mxv \, dt - mx^2}{2x} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = mv$$

En el cálculo anterior se desprecia el término que contiene un infinitésimo de segundo orden.

El valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida vale:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{BdS}{dt} = Bmv$$

La intensidad de corriente que pasa por la barra es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bmv}{\rho \, m} = \frac{Bv}{\rho}$$

La fuerza que se debe aplicar para mantener la barra con movimiento uniforme es:

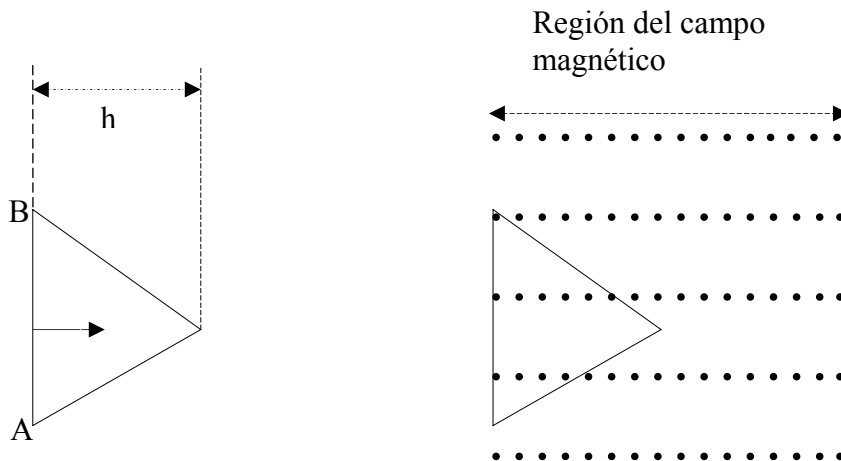
$$F = I \ell B = \frac{Bv}{\rho} \cdot m \cdot B = \frac{B^2 v}{\rho} m$$

El trabajo necesario que se debe aplicar desde el exterior para que la barra se desplace una longitud  $L$  vale:

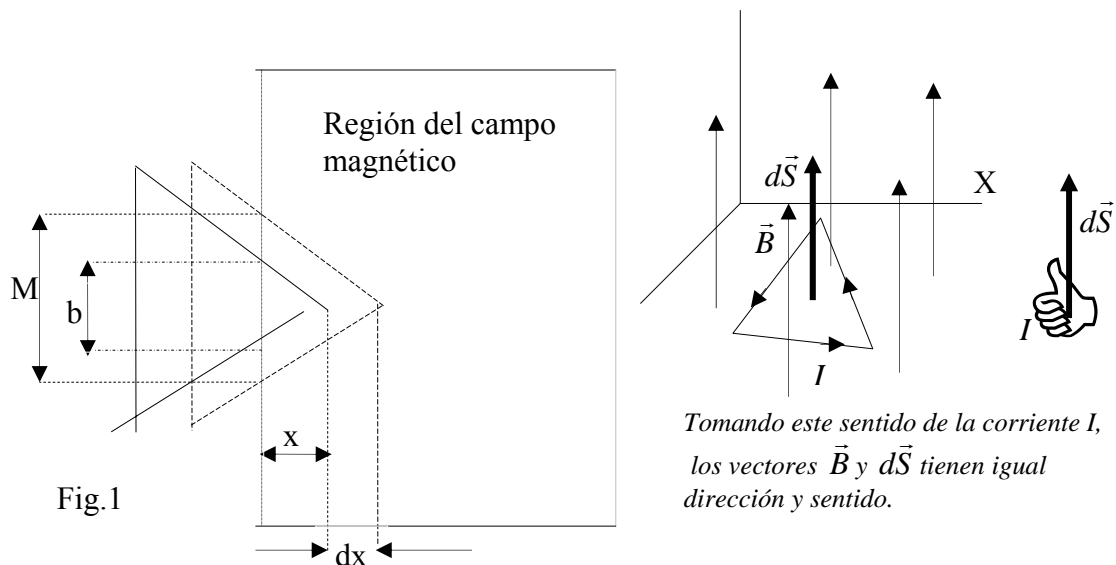
$$W = \int_0^L \frac{B^2 v}{\rho} m \, dx = \frac{B^2 v}{\rho} \int_0^L x \operatorname{tag}\alpha \, dx = \frac{B^2 v \operatorname{tag}\alpha}{\rho} \frac{L^2}{2}$$

Este trabajo se convierte en calor en el circuito.

5.-Una espira conductora en forma de triángulo equilátero de altura  $h$  se desplaza, sin rozamiento, con velocidad constante  $v$ . Luego penetra en un campo magnético uniforme perpendicular a la espira y de valor constante  $B$ . El campo magnético es perpendicular al plano de la espira y dirigido hacia el lector. La espira se detiene cuando el lado  $AB$  está justamente en el borde del campo, tal como se indica en la figura. Calcular el campo magnético.



Supongamos que en el instante  $t=0$  una parte de la espira está dentro del campo con una cierta velocidad  $w < v$ , tal como se indica en la figura 1.



La parte que está dentro del campo magnético en el instante  $t=0$  es un triángulo de base  $b$  y altura  $x$ . Un tiempo después  $dt$ , la espira avanza una distancia  $dx = w dt$  y dentro del campo magnético existe un triángulo que tiene por base  $M$  y altura  $x + dx = x + wdt$ . En el tiempo  $dt$  el aumento de superficie dentro del campo es:

$$dS = \frac{M(x + dx)}{2} - \frac{bx}{2}$$

La variación del flujo magnético vale:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS \cos \theta = B \cdot dS = B \frac{M(x+dx)}{2} - \frac{B \cdot bx}{2} \quad (1)$$

Comparando triángulos semejantes, recuerde que la altura de la espira es  $h$  y llamamos a la longitud de cada lado

$$\frac{a}{h} = \frac{b}{x} \quad ; \quad \frac{a}{h} = \frac{M}{x+dx} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{b(x+dx)}{x} \quad (2)$$

Combinado (1) y (2) resulta:

$$d\Phi = \frac{BM(x+dx)}{2} - \frac{B \cdot bx}{2} = \frac{Bb(x+dx)^2}{2x} - \frac{Bbx}{2} = \frac{Bbx^2 + 2Bbx \, dx - Bbx^2}{2x} = Bb \, dx$$

Una variación del flujo magnético conlleva que en la espira aparezca una fuerza electromotriz

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Bb \, dx}{dt} = -Bbw$$

Esta fuerza electromotriz crea una corriente en la espira

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{Bbw}{R}$$

El signo menos de la corriente indica que el sentido real es el contrario al tomado. Esta corriente por sus efectos electromagnéticos tiende a oponerse a la causa externa introducida. Dado que la causa ha sido un aumento del flujo entrante en la espira hacia el lector la corriente en la espira tendrá el sentido indicado en la figura 2

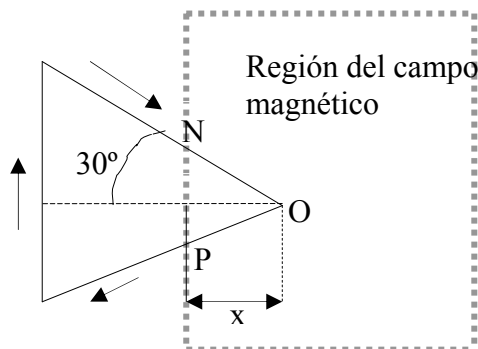
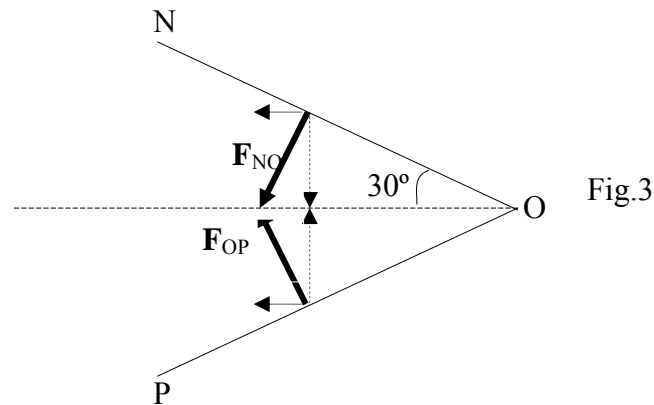


Fig.2

Sobre el trozo de espira NO actúa una fuerza dada por la ecuación  $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$ ,  $\vec{l}$  es un vector que tiene de módulo la longitud NO y el sentido de la corriente, como  $\vec{B}$  es perpendicular al plano de la espira y dirigido hacia el lector, la fuerza magnética es perpendicular a NO y el sentido indicado en la figura 3. Sobre OP actúa la misma fuerza en módulo pero dirigida como indica la figura 3. Se ha ampliado el tamaño de la espira en la figura 3 para observar con mayor facilidad las fuerzas.



En la figura 3 se han dibujado las fuerzas (en trazo algo grueso) y las componentes verticales y horizontales. Se observa que las componentes verticales se anulan y las horizontales se suman

En consecuencia la fuerza horizontal dirigida hacia la izquierda vale:

$$F_H = 2 (I \cdot NO \cdot B) \text{ sen}30^\circ$$

De la figura 2 se deduce que:  $NO = \frac{x}{\cos 30^\circ}$

$$F_H = 2 \left( I \cdot \frac{x}{\cos 30^\circ} \cdot B \right) \text{ sen}30^\circ = 2 I x B \text{ tag} 30^\circ$$

Como  $I = -\frac{Bbw}{R}$

$$F_H = 2 I x B \text{ tag} 30^\circ = -\frac{2B^2bxw}{R} \text{ tag} 30^\circ = -\frac{2B^2bx}{R} \text{ tag} 30^\circ \frac{dx}{dt}$$

Esta fuerza provoca una aceleración negativa dirigida hacia la izquierda, de sentido contrario a la velocidad y por tanto frenando a la espira. Como  $F = ma = m \frac{dv}{dt}$

$$-\frac{2B^2bx}{R} \text{ tag} 30^\circ \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dt}$$

En la expresión anterior son constantes  $B, R$  y  $m$  y son variables  $x$  y  $b$ , pero ambas están relacionadas entre sí

$$\text{tag} 30^\circ = \frac{b}{x} \Rightarrow b = 2x \text{ tag} 30^\circ$$

Observe que cuando la espira llega al campo magnético  $x=0$  y cuando se para  $x=h$ , y la velocidad es  $v$  al entrar en el campo magnético y nula cuando se para.

$$\int_0^h -\frac{4B^2 x^2 \operatorname{tag}^2 30}{R} dx = \int_v^0 m dw \Rightarrow \frac{4B^2 \operatorname{tag}^2 30}{R} \cdot \frac{h^3}{3} = mv \Rightarrow \frac{4B^2}{R} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{3} = mv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{\frac{9mvR}{4h^3}} = \frac{3}{2h} \sqrt{\frac{mvR}{h}}$$

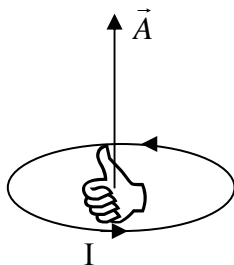
### Regla del flujo

*Comentario previo.* Cuando se trata de una superficie abierta, el vector superficie se puede definir perpendicular a la misma, pero su sentido puede ser hacia uno o hacia otro lado.

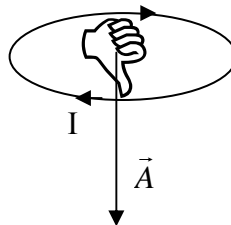


En el caso del flujo del campo magnético a través de una espira, como en general va a ser variable y engendrará entonces una corriente inducida, aceptamos el siguiente convenio.

Asignamos de modo arbitrario un sentido a la corriente inducida y aplicamos para definir el vector superficie la “regla de la mano derecha”. Se sitúa la mano con los dedos curvados de modo que indiquen el sentido de giro de la corriente, estando el pulgar extendido como en la figura. El vector superficie  $\vec{A}$ , se tomará en la dirección y el sentido que señala el pulgar.



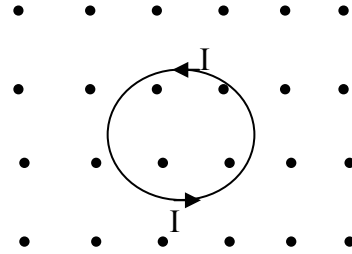
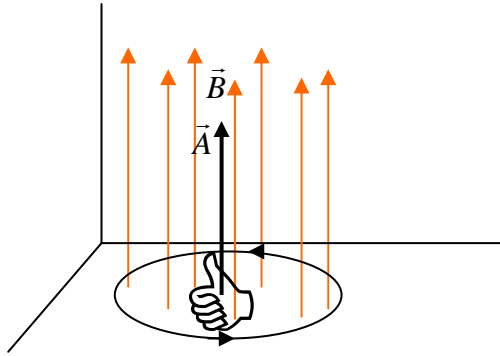
Opción a.



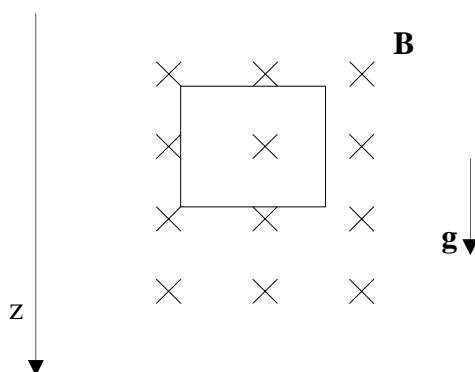
Opción b.

Como tenemos dos casos posibles, en general elegiremos aquel que coincida con la dirección y el sentido del campo magnético externo que atraviesa el plano de la espira. Así, suponiendo un campo magnético vertical y con sentido hacia arriba tomaremos la opción a y ahora el flujo es positivo. En la representación plana de la derecha el campo

$\vec{B}$  sale hacia el lector, tomaremos la corriente en sentido contrario a las agujas del reloj, para que  $\vec{A}$  lleve la misma dirección y sentido de  $\vec{B}$ , de acuerdo con la regla de la mano derecha.



6.-A un cuadrado de alambre de masa  $m$ , lado  $a$  y resistencia eléctrica  $R$  se le comunica una cierta velocidad horizontal. El cuadro se mueve en el campo gravitatorio terrestre y a la vez en una región donde existe un campo magnético  $B$ , siendo el vector  $B$  perpendicular al vector  $g$ , del modo que indica la figura inferior



El módulo del vector  $B$  varía con la altura según la ecuación

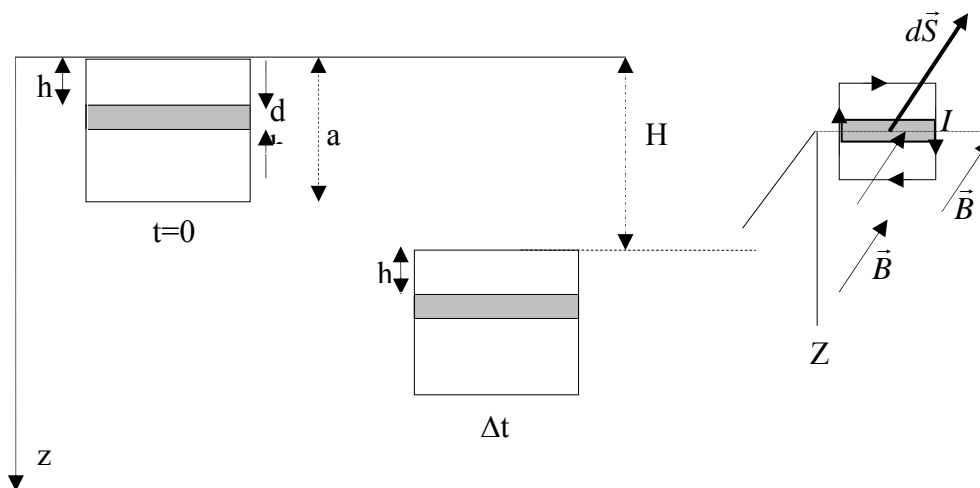
$$B = B_0 + kz$$

En la que  $k$  es una constante y  $z$  es la altura contada en dirección vertical hacia abajo. El cuadro se desplaza con velocidad  $v$  constante. Determinar la velocidad inicial  $v_0$  que se imprimió al cuadro.

En el caso de no existir el campo magnético, el movimiento del centro de masas del cuadro estaría compuesto por un movimiento uniforme horizontal con velocidad  $v_0$  y uno uniformemente acelerado debido al campo gravitatorio y la trayectoria del citado centro de masas sería una parábola.

Al existir un campo magnético que varía según  $z$ , resulta que en el cuadro se induce una fuerza electromotriz y por consiguiente una corriente eléctrica que lo recorre.

Vamos a calcular la fuerza electromotriz inducida en el cuadrado debido a su desplazamiento vertical, para ello asignamos de modo convencional a la corriente el sentido indicado en el dibujo.



Cuando el cuadrado está en la posición  $t=0$ , el flujo magnético que atraviesa la superficie sombreada es:

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (B_0 + kh) \cdot a \, dh = B_0 a \, dh + kah \, dh$$

El flujo que atraviesa todo el cuadrado se obtiene integrando la expresión anterior desde  $h=0$  a  $h=a$

$$\int d\Phi = \Phi_{t=0} = \int_0^a B_0 a \, dh + \int_0^a kah \, dh = B_0 a^2 + \frac{ka^3}{2}$$

Cuando el cuadrado ocupa la posición  $\Delta t$ , esto es, que entre la primera y la segunda posición ha transcurrido ese tiempo, el flujo que atraviesa la superficie sombreada vale:

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = [B_0 + k(H + h)] \cdot a \, dh = B_0 a \, dh + kaH \, dh + kah \, dh$$

El flujo que atraviesa todo el cuadrado se obtiene integrando la expresión anterior desde  $h=H$  a  $h=H+a$

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta t} &= \int_H^{H+a} B_0 a \, dh + \int_H^{H+a} kaH \, dh + \int_H^{H+a} kah \, dh \\ \Phi_{\Delta t} &= B_0 a(H + a - H) + kaH(H + a - H) + ka \left[ \frac{(H + a)^2 - H^2}{2} \right] \end{aligned}$$

La fuerza electromotriz inducida en el cuadrado es:

$$\varepsilon = - \frac{\Phi_{\Delta t} - \Phi_{t=0}}{\Delta t} = - \frac{B_0 a^2 + \frac{ka^3}{2} - B_0 a^2 - ka^2 H - ka \left( \frac{H^2 + a^2 + 2aH - H^2}{2} \right)}{\Delta t}$$

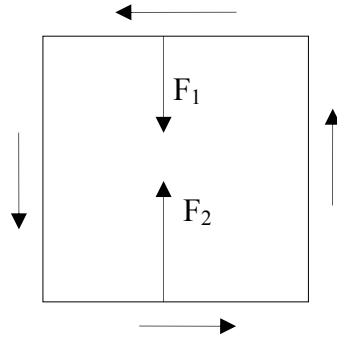
Si admitimos que  $\Delta t$  es muy pequeño, entonces  $H = v_y \Delta t$ , siendo  $v_y$  la velocidad del cuadro en dirección vertical

$$\varepsilon = - \frac{ka^2 v_y \Delta t + ka^2 v_y \Delta t}{\Delta t} = -2ka^2 v_y$$

La intensidad de la corriente que recorre el cuadrado es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = - \frac{2ka^2 v_y}{R}$$

Sobre el lado superior del cuadrado y el inferior aparecen fuerzas por interacción de esta corriente con el propio campo magnético. Sobre los lados verticales aparecen fuerzas que al tener el mismo módulo y sentido contrario se anulan.



La fuerza magnética en el lado superior es:

$$F_1 = I \cdot a \cdot (B_0 + kH)$$

Y en el lado inferior:

$$F_2 = I \cdot a \cdot [B_0 + k(H + a)]$$

La resultante de estas dos fuerzas es vertical y dirigida hacia arriba

$$F_R = F_2 - F_1 = Ia^2k = \frac{2ka^2v_y}{R} a^2k = \frac{2k^2a^4v_y}{R}$$

Si la velocidad es constante esta fuerza debe equilibrar al peso del cuadrado, para que la suma de ambas sea nula.

$$\frac{2k^2a^4v_y}{R} = mg \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{mgR}{2k^2a^4}$$

La velocidad inicial horizontal  $v_o$  y la vertical  $v_y$  forman un ángulo de  $90^\circ$  y dan como resultante una velocidad constante  $v$ , por tanto,

$$v^2 = v_o^2 + v_y^2 \quad \Rightarrow \quad v_o = \sqrt{v^2 - v_y^2} = \sqrt{v^2 - \left(\frac{mgR}{2k^2a^4}\right)^2}$$

7.-En un dispositivo para determinar la composición isotópica de los iones potasio  $^{39}\text{K}^+$  y  $^{41}\text{K}^+$ , éstos primero se aceleran en un campo eléctrico y luego van a parar a un campo magnético  $B$  perpendicular a la dirección de su movimiento. La tensión que crea el campo eléctrico es  $U_0$  aun cuando este valor puede oscilar en  $\pm \Delta U$ . Determinar el cociente  $\frac{\Delta U}{U_0}$  para que los haces de los iones potasio no se superpongan.

Dado que la tensión toma los valores extremos  $U_0 + \Delta U$  y  $U_0 - \Delta U$  los radios de los iones potasio están comprendidos entre los siguientes valores

$$U_0 + \Delta U = \frac{1}{2} m_{39} v_{M39}^2 \Rightarrow v_{M39} = \sqrt{\frac{2(U_0 + \Delta U)}{m_{39}}} ; \quad qBv_{M39} = \frac{mv_{M39}^2}{R_{M39}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{M39} = \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{39}}}{Bq} ; \quad R_{m39} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{39}}}{Bq}$$

M significa el radio mayor y m el menor .Para el ión de potasio 41

$$\Rightarrow R_{M41} = \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{41}}}{Bq} ; \quad R_{m41} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{41}}}{Bq}$$

Para que no se superpongan los haces de los iones, el límite lo indica que coincidan el radio mayor del ión 39 con el radio menor del ión 41.

$$\Rightarrow R_{M39} = \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{39}}}{Bq} ; \quad R_{m41} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{41}}}{Bq} \Rightarrow$$

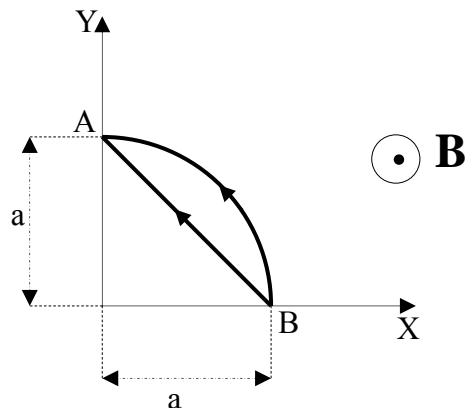
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{39}}}{Bq} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{41}}}{Bq} \Rightarrow (U_0 + \Delta U)m_{39} = (U_0 - \Delta U)m_{41} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(U_0 + \Delta U)}{(U_0 - \Delta U)} = \frac{m_{41}}{m_{39}} = \frac{41}{39} \Rightarrow 39U_0 + 39\Delta U = 41U_0 - 41\Delta U \Rightarrow 80\Delta U = 2U_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta U}{U_0} = \frac{1}{40}$$

Dado el valor del límite, la relación para lo que no hay superposición es  $\frac{\Delta U}{U_0} < \frac{1}{40}$

8.- En el plano  $XY$  existen dos conductores  $A$  y  $B$ , uno es rectilíneo y el otro un arco de circunferencia. En la dirección del eje  $Z$  positivo existe un campo magnético uniforme, o lo que es lo mismo el campo magnético es perpendicular al plano del papel y saliendo de él.



La corriente que circula por los conductores es  $I$  y dirigida desde  $B$  hacia  $A$ .

a) Calcular la fuerza magnética que sufren ambos conductores y comprobar que el módulo de la fuerza es el mismo para ambos.

b) Ahora, el campo magnético es decreciente, de modo que cuando  $y=0$  vale  $B_0$  y cuando  $y=a$  es nulo. Calcular, para ambos conductores, el valor de la fuerza que sufren por acción de este campo variable.

En primer lugar debemos considerar despreciable la interacción magnética entre ambos conductores, puesto que al estar recorridos por corrientes, también éstas crean un campo magnético que actuaría sobre el otro conductor. Es decir, que la única interacción magnética a considerar es la que tiene lugar entre los conductores y el campo magnético  $B$  dirigido según el eje  $Z$ .

a) La fuerza que sufre un elemento de corriente al estar situado en el interior de un campo magnético es:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \Rightarrow dF = I dl B \sin\alpha$$

Tanto para el conductor rectilíneo como para el arco  $\alpha = 90^\circ$ .

En la figura 1 se ha dibujado  $d\vec{F}$ , en dos lugares diferentes de los conductores

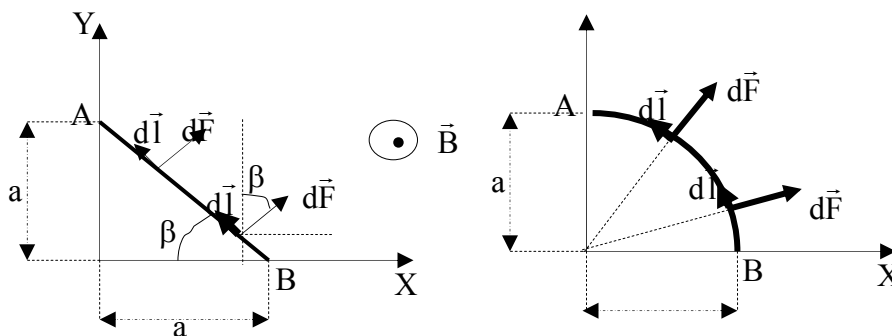


Fig.1

a1) Cuando el conductor es rectilíneo todos los vectores  $d\vec{F}$  son paralelos, si el conductor es un arco de circunferencia, las rectas que contienen a los diferentes vectores  $d\vec{F}$  todas pasan por el origen de coordenadas.

Para el conductor rectilíneo cada  $d\vec{F}$  tiene dos componentes sobre los ejes X e Y, cuyos módulos son respectivamente

$$dF_x = dF \cdot \text{sen}\beta = IB dl \text{sen}\beta \Rightarrow dF_x = IB dl \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$dF_y = dF \cdot \text{cos}\beta = IB dl \text{cos}\beta \Rightarrow dF_y = IB dl \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para hallar las componentes  $F_x$  e  $F_y$  debemos integrar las anteriores ecuaciones

$$F_x = IB \frac{\sqrt{2}}{2} \int dl = IB \frac{\sqrt{2}}{2} L = IB \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2a^2} = IB a$$

$$F_y = IB \frac{\sqrt{2}}{2} \int dl = IB \frac{\sqrt{2}}{2} L = IB \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2a^2} = IB a$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = IB a \vec{i} + IB a \vec{j}$$

Si se utilizan componentes cartesianas, resulta en este caso más sencillo y claro expresar  $d\vec{l}$  como:  $d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$

$$\text{Al ser } d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I(dx \vec{i} + dy \vec{j}) \wedge B \vec{k} = IB dx (-\vec{j}) + IB dy \vec{i}$$

$$\text{Integrando, } \vec{F} = -\vec{j} \int_a^0 IB dx + \vec{i} \int_0^a IB dy = -\vec{j} IB [x]_a^0 + \vec{i} IB [y]_0^a = aIB \vec{j} + aIB \vec{i}$$

a2) Cuando el conductor es un arco de circunferencia, nos fijamos en la figura 2.

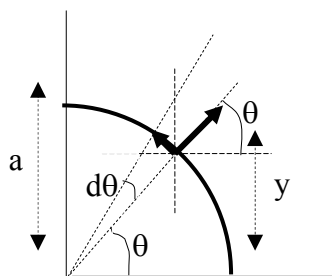


Fig.2

Hemos escogido al azar un elemento  $d\vec{l}$  sobre el arco cuyo módulo se calcula teniendo en cuenta que el valor del arco es igual al del radio por el ángulo expresado en radianes.

$$dl = a d\theta$$

Las proyecciones del módulo de la fuerza elemental,  $dF = I dl B \sin 90 = I dl B$  sobre los ejes valen:

$$dF_x = dF \cdot \cos\theta = I B dl \cos\theta = I B a \cos\theta d\theta$$

$$dF_y = dF \cdot \sin\theta = I B dl \sin\theta = I B a \sin\theta d\theta$$

Para hallar las componentes  $F_x$  e  $F_y$  debemos integrar las anteriores ecuaciones.

$$F_x = I B a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = I B a \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0^\circ \right) = I B a$$

$$F_y = I B a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = I B a \left( -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0^\circ \right) = I B a$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = I B a \vec{i} + I B a \vec{j}$$

b) Al ser el campo decreciente podemos escribir

$$B = B_0 - ky$$

Cuando  $y = a$   $B = 0$ ,

$$0 = B_0 - ka \Rightarrow k = \frac{B_0}{a} \Rightarrow B = B_0 - \frac{B_0}{a} y \Rightarrow B = B_0 \left( 1 - \frac{y}{a} \right)$$

b1) Para el conductor recto ahora el módulo de  $dF$  no es constante y se hace cero en el extremo A del conductor

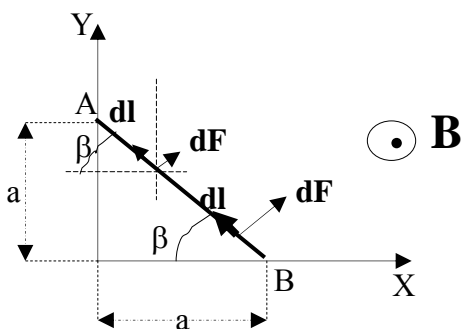


Fig.3

La componente del vector  $d\mathbf{l}$  sobre el eje Y es  $d\mathbf{y}$ , cuyo módulo es  $dy = dl \operatorname{sen}\beta$   
 La fuerza que sufre ese elemento de corriente vale:

$$dF = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) dl = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dy}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow dF_x = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dy}{\operatorname{sen}\beta} \cdot \operatorname{sen}\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = IB_o \left( \int_0^a dy - \frac{1}{a} \int_0^a y dy \right) = IB_o \left( a - \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \right) = IB_o \frac{a}{2}$$

Para la componente  $F_y$

$$dF = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) dl = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dy}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow dF_y = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dy}{\operatorname{sen}\beta} \cdot \cos\beta =$$

$$= IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dy}{\operatorname{tag}\beta} \Rightarrow F_y = IB_o \left( \int_0^a dy - \frac{1}{a} \int_0^a y dy \right) = IB_o \left( a - \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \right) = IB_o \frac{a}{2}$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = IB_o \frac{a}{2} \vec{i} + IB_o \frac{a}{2} \vec{j}$$

b2) Si en la figura 2 elegimos al azar un elemento de corriente  $dl$ , éste sufre una fuerza de módulo

$$dF = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) dl = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a d\theta \Rightarrow dF_x = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a d\theta \cdot \cos\theta$$

De la figura 2 se deduce que  $y = a \operatorname{sen}\theta$

$$dF_x = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a d\theta \cdot \cos\theta = IB_o \left(1 - \frac{a \operatorname{sen}\theta}{a}\right) a d\theta \cdot \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = IB_o a \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta \right] = IB_o a \left[ \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0^\circ \right) - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2\theta d\theta \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = IB_o a + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cdot \cos 2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 0^\circ \right) = IB_o a + IB_o a \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} (-1 - 1) \right) = IB_o \frac{a}{2}$$

Calculamos la componente  $F_y$ .

$$dF = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) dl = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a d\theta \Rightarrow dF_Y = IB_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a d\theta \cdot \text{sen}\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_Y = \int IB_o \left(1 - \frac{a \text{sen}\theta}{a}\right) a \text{sen}\theta d\theta = IB_o \left( a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\theta - a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2\theta d\theta \right)$$

$$F_Y = IB_o a - IB_o a \left[ \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\text{sen} 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow F_Y = IB_o a - IB_o a \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\text{sen} \pi + \frac{1}{4}\text{sen} 0^\circ \right) \Rightarrow$$

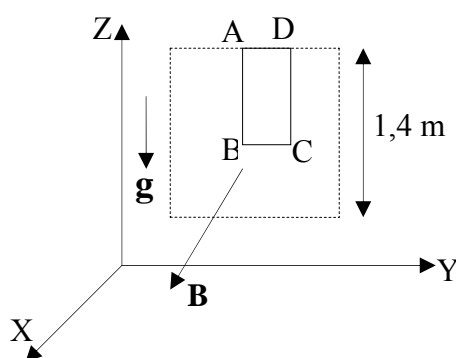
$$F_Y = IB_o a \left( 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\text{sen} \pi - \frac{1}{4}\text{sen} 0^\circ \right) = IB_o a \left( 1 - \frac{\pi}{4} - 0 - 0 \right) = IB_o a \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = IB_o \frac{a}{2} \vec{i} + IB_o a \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \vec{j}$$

9. En el plano  $ZY$  existe un campo magnético uniforme intenso de valor  $B= 2 \text{ T}$  y dirigido en el sentido positivo del eje  $X$  (ver la figura inferior). Los límites de ese campo son 1,4 metros por 1,4 metros. En el interior del mismo existe una espira metálica  $ABCD$  rectangular de lados  $AD=L=0,20 \text{ m}$ ,  $AB=h=0,60 \text{ m}$ , que inicialmente se encuentra en reposo. La resistencia óhmica de la espira es  $R=2 \Omega$  y su masa  $m=5 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ . a) Determinar cómo varía la velocidad de la espira desde que se suelta sin velocidad inicial hasta que el lado  $AD$  sale justamente del campo, Hacer una representación gráfica. b) Repetir el apartado anterior si el campo magnético tuviese una intensidad de 6 T.

Tome  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Ayuda:  $\int \frac{dx}{a-bx} = -\frac{1}{b} \ln(a-bx)$



a) El movimiento de la espira se divide en dos partes: una, cuando la espira se encuentra totalmente sumergida en el campo magnético uniforme y el flujo a través de ella es constante, esto es, desde la posición inicial hasta que el lado  $BC$  llega al borde inferior del campo, otra cuando la espira comienza a abandonar el campo y una parte está dentro del campo y otra fuera, esto es, desde que la posición anterior hasta que el lado  $AD$  sale justamente del campo.

En la primera parte el movimiento es una caída libre en el campo gravitatorio terrestre y la velocidad de la espira cuando el lado  $BC$  está justamente en el límite del campo es:

$$v_i = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot (1,4 - 0,6)} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El tiempo en que se verifica el anterior movimiento

$$h = \frac{1}{2} g t_i^2 \Rightarrow t_i = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{10}} = 0,40 \text{ s}$$

A partir del instante anterior, la espira sale del campo magnético y como consecuencia de ello se produce una variación del flujo magnético que la atraviesa y de ello se deriva que aparezca una fuerza electromotriz que provoca una corriente en la espira y finalmente, como veremos, una fuerza opuesta a la del campo gravitatorio.

En la figura 1 se observa la posición de la espira cuando su velocidad es  $v$  y un instante posterior  $\Delta t$  muy pequeño.

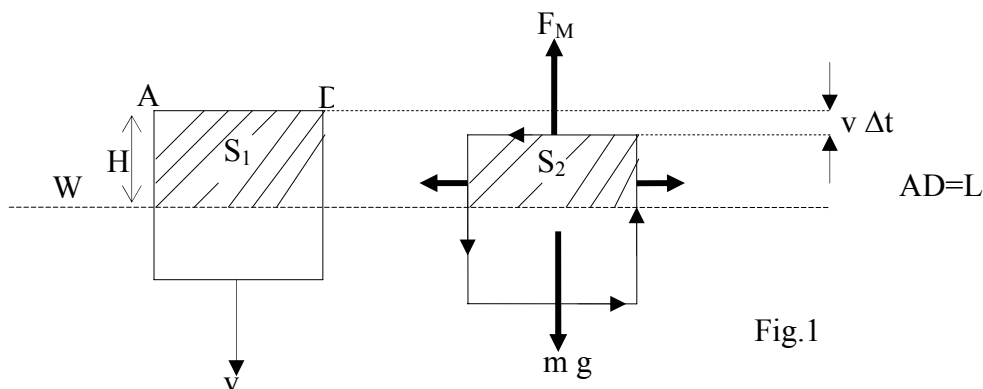


Fig.1

En la figura 1 la línea W indica el límite del campo, por encima existe un campo B perpendicular al plano del papel y dirigido hacia fuera del mismo, por debajo de L no existe campo.

Observando la figura 1 se deduce que  $S_1$  es la superficie de la espira atravesada por el campo en la posición 1 y  $S_2$  en la posición 2.

$$S_1 = H \cdot L ; S_2 = (H - v \Delta t) \cdot L \Rightarrow S_2 - S_1 = L(H - v \Delta t - H) = -L \cdot v \cdot \Delta t$$

En la posición 1 la espira está atravesada por un flujo magnético  $\Phi_1$ . Un tiempo después  $\Delta t$  (muy pequeño), la espira se ha desplazado hacia abajo una distancia  $v \Delta t$ , y es atravesada por un flujo  $\Phi_2$ .

El flujo penetra por la cara posterior de la espira y sale por la de delante, mirando la figura 2.

Podemos escribir siguiendo la ley de Lenz

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -\frac{B \cdot S_2 - B \cdot S_1}{\Delta t} = -\frac{B(S_2 - S_1)}{\Delta t} = \frac{B \cdot L \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} = B v L$$

En la espira aparecerá una corriente cuya intensidad es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B v L}{R}$$

Ahora hay que averiguar si la intensidad I en la espira forma una cara Norte o Sur tal como está la figura 2. Para ello recordemos que esa intensidad debe oponerse a la causa externa introducida, por ello la corriente tratará, dentro de lo posible, que el flujo que atraviesa la espira se conserve, en consecuencia la cara vista de frente (figura 2) debe ser una cara norte.

Finalmente la espira recorrida por la corriente I está en el seno de un campo magnético B (intenso y por tanto despreciable el que se induce) y por consiguiente habrá fuerzas sobre los lados de la espira

La fuerza sobre el lado  $AD=L$  es:

$$\vec{F}_M = I \vec{L} \times \vec{B} = IL(-\vec{j}) \times B \vec{i} = ILB \vec{k} \Rightarrow F_M = ILB = \frac{B^2 L^2}{R} v$$

Las fuerzas sobre los lados verticales tienen el mismo módulo y son de sentido contrario, su resultante es nula.

La espira, mientras está moviéndose una parte de ella dentro del campo y otra fuera, actúan dos fuerzas, una el peso vertical y hacia abajo y otra la fuerza magnética vertical y hacia arriba.

Para calcular la velocidad habremos de integrar una ecuación diferencial y para plantearla hay que aplicar la segunda ley de Newton.

$$mg - \frac{B^2 L^2}{R} v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow mg - \beta v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = \frac{m dv}{mg - \beta v} = \frac{dv}{g - \frac{\beta}{m} v}$$

Para integrar la expresión anterior recurrimos a la ayuda que nos dan en el enunciado.

Comparando las expresiones se deduce que  $a = g$  y  $b = \frac{\beta}{m}$ .

$$t = -\frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v\right) + Cte$$

Para hallar el valor de la constante de integración observamos que cuando la espira llega a la posición en que BC está sobre la línea W, la velocidad de la espira es  $v_i = 4 \text{ m/s}$  y el tiempo es  $t_i = 0,40 \text{ s}$ .

$$t_i = -\frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v_i\right) + Cte \Rightarrow Cte = t_i + \frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v_i\right)$$

Sustituyendo la constante en t, resulta:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v\right) + t_i + \frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v_i\right) = t_i + \frac{m}{\beta} \ln \frac{g - \frac{\beta}{m} v_i}{g - \frac{\beta}{m} v} \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\frac{\beta}{m}(t-t_i)} &= \frac{g - \frac{\beta}{m} v_i}{g - \frac{\beta}{m} v} \Rightarrow g - \frac{\beta}{m} v = \left(g - \frac{\beta}{m} v_i\right) e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_i)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\beta}{m} v &= g - \left(g - \frac{\beta}{m} v_i\right) e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_i)} \Rightarrow v = \frac{mg}{\beta} + \left(v_i - \frac{mg}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_i)} \quad (1) \end{aligned}$$

La ecuación anterior de v es válida cuando  $t \geq 0,40 \text{ s}$  hasta que la espira abandone el campo. Como la espira tiene una altura limitada hemos de calcular el tiempo que transcurre desde que llega el lado BC a la línea W, hasta que el lado AD llega a esa línea, en total una altura recorrida de 0,60m. Teniendo en cuenta que  $h = \int v dt$ , con resolver esa integral solucionaríamos el problema, pero dado que en el enunciado no se nos dice nada acerca de cómo resolver la integral, solamente podemos encontrar la solución al problema de forma aproximada, midiendo el área comprendida entre v y el tiempo.

Sustituimos valores en la ecuación (1)

$$\beta = \frac{B^2 L^2}{R} = \frac{2^2 \cdot 0,20^2}{2} = 0,080 \frac{T^2 m^2}{\Omega} \Rightarrow \frac{mg}{\beta} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{0,080} = 6,25 \frac{m}{s} \Rightarrow$$

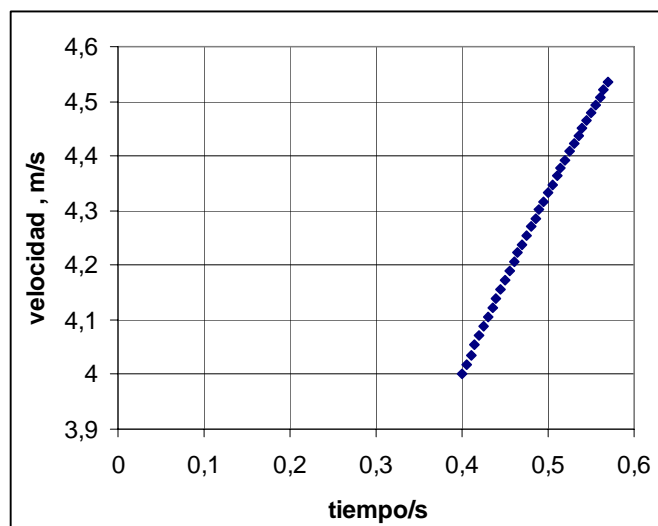
$$\Rightarrow \frac{\beta}{m} = \frac{0,080}{5 \cdot 10^{-2}} = 1,6 \frac{T^2 m^2}{kg \Omega}$$

$$v = 6,25 + (4 - 6,25) \cdot e^{-1,6(t-0,4)} = 6,25 - 2,25 \cdot e^{-1,6(t-0,4)}$$

Representamos  $v$  frente a  $t$ . Antes de hacer la representación obtengamos una idea acerca del valor de  $t$ . Si cayese libremente, con  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , y su velocidad inicial  $4 \text{ m/s}$  y la altura recorrida  $0,60$  metros

$$0,60 = 4 \cdot t + \frac{1}{2} 10 t_e^2 \Rightarrow t_e = 0,14 \text{ segundos} \Rightarrow t = 0,4 + 0,13 = 0,53 \text{ s}$$

Como  $F_M$  se opone a  $g$  (ver la figura 1), el tiempo será algo mayor y por tanto en la gráfica damos valores a  $t$  superiores a  $0,53$  segundos.



La curva de la figura se puede aproximar a una línea recta, por tanto, el área comprendida entre la curva y el eje de los tiempos es un trapecio, cuya área debe valer numéricamente  $0,60$ .

$$0,60 = \frac{4 + v(t)}{2} \cdot t \Rightarrow 0,60 = \frac{4 + (6,25 - 2,25e^{-1,6(t-0,4)})}{2} (t - 0,4) \Rightarrow$$

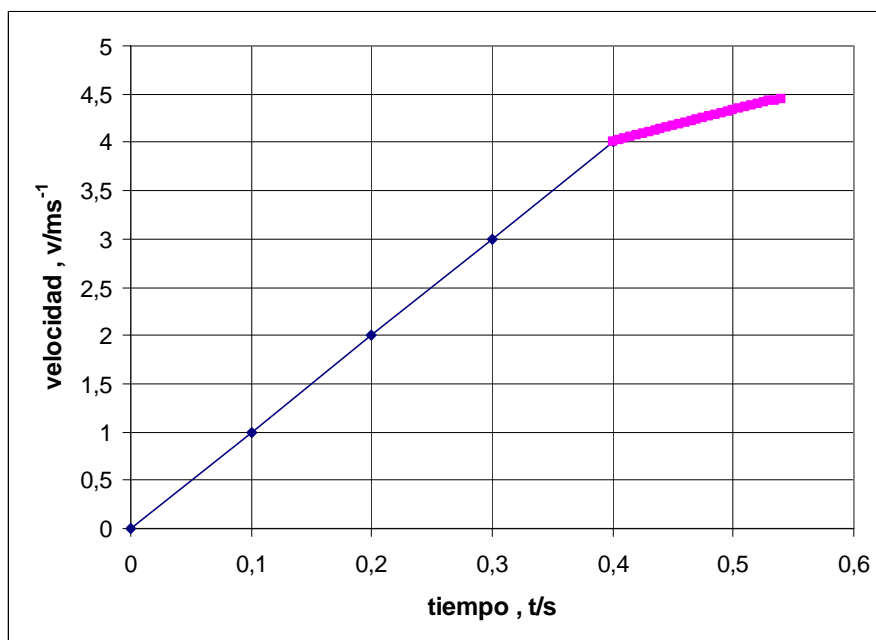
$$\Rightarrow 0,60 = \frac{10,25 - 2,25e^{-1,6(t-0,4)}}{2} (t - 0,4)$$

Resolvemos la ecuación anterior por tanteo, damos valores a  $t$  y cogemos como solución aquel valor de  $t$ , que dé como resultado  $0,60$ .

Cuando  $t = 0,56$  segundos  $0,60 < 0,68$  ; Cuando  $t = 0,54$  segundos  $0,60 > 0,59$

Cuando  $t = 0,543$  segundos  $0,60 = 0,60$

La velocidad de la espira es la siguiente



El primer tramo es lineal y corresponde a un movimiento uniformemente acelerado, el segundo no es lineal pero como el tiempo que dura ese movimiento es muy pequeño la curva aparece en el gráfico como si fuese una línea recta. Se observa que la velocidad siempre aumenta

**b)** Cuando el campo sea  $B=6$  T, los valores de  $v_i=4$  m/s y  $t_i=0,4$  segundos no varían. Cambian los siguientes:

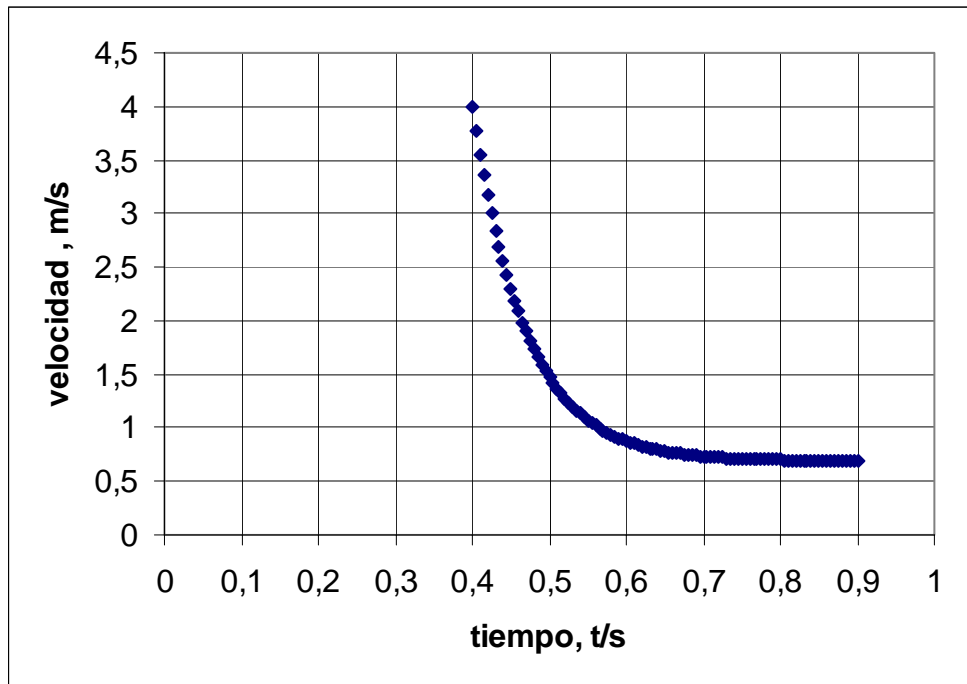
$$\beta = \frac{B^2 L^2}{R} = \frac{6^2 \cdot 0,20^2}{2} = 0,72 \frac{\text{T}^2 \text{m}^2}{\Omega} \Rightarrow \frac{mg}{\beta} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{0,72} = 0,69 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{m} = \frac{0,72}{5 \cdot 10^{-2}} = 14,4 \frac{\text{T}^2 \text{m}^2}{\text{kg} \Omega}$$

La ecuación de la velocidad es:

$$v = \frac{mg}{\beta} + \left( v_i - \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_i)} = 0,69 + (4 - 0,69) \cdot e^{-14,4(t-0,4)} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(t-0,4)} \quad (2)$$

La representación gráfica de la velocidad frente al tiempo es la gráfica siguiente:



La velocidad cuando la espira está una parte fuera del campo y otra dentro disminuye. Por tanto el tiempo que tarda la espira en recorrer su altura  $h=0,60$  metros es mayor que en el caso anterior.

Hacemos en primer lugar un cálculo aproximado del área bajo la curva suponiendo un trapecio.

$$0,60 = \frac{4 + v(t)}{2} \cdot t \Rightarrow 0,60 = \frac{4 + (0,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(t-0,4)})}{2} (t-0,4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,60 = \frac{4,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(t-0,4)}}{2} (t-0,4)$$

Para  $t = 0,5$ ,  $0,60 > 0,27$ . Para  $t = 0,6$ ,  $0,60 > 0,49$ . Para  $t = 0,70$ ,  $0,60 < 0,71$

A la vista de los resultados anteriores dividimos la curva entre 0,4 y 0,5 segundos.

Velocidad a los 0,4 segundos 4 m/s. Velocidad a los 0,5 segundos

$$v_{0,5} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(0,5-0,4)} = 1,47 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \text{área} = \frac{4 + 1,47}{2} \cdot 0,1 = 0,27$$

Entre 0,5 y 0,6 segundos. Velocidad a los cinco segundos 1,47 m/s. Velocidad a los seis segundos

$$v_{0,6} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(0,6-0,4)} = 0,88 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \text{área} = \frac{1,47 + 0,88}{2} \cdot 0,1 = 0,12$$

Entre 0,4 y 0,6 segundos el área vale  $0,27 + 0,12 = 0,39$ , nos falta de área  $0,6 - 0,39 = 0,21$

Calculemos la velocidad para un tiempo de  $t=0,80$  segundos y el área entre 0,80 y 0,60 segundos

$$v_{0,80} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(0,80-0,4)} = 0,70 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \text{área} = \frac{0,70 + 0,88}{2} \cdot 0,2 = 0,16$$

Como  $0,16 < 0,21$  el tiempo debe ser superior a 0,80 segundos

Calculemos la velocidad para un tiempo de  $t=0,90$  segundos y el área entre 0,90 y 0,60 segundos

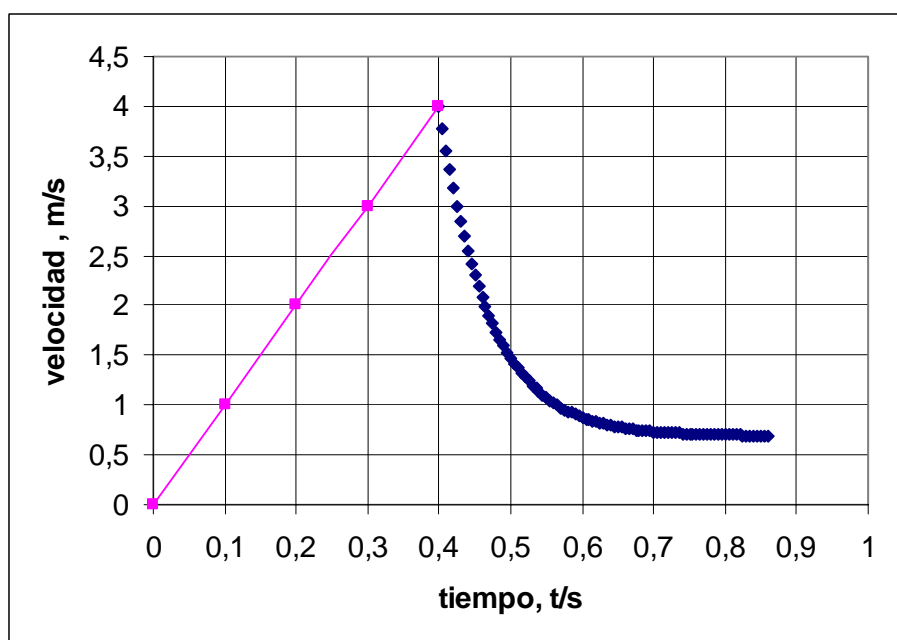
$$v_{0,90} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(0,90-0,4)} = 0,69 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \text{área} = \frac{0,69 + 0,88}{2} \cdot 0,3 = 0,24$$

Como  $0,24 > 0,21$  el tiempo debe ser inferior a 0,90 segundos.

Calculemos la velocidad para un tiempo de  $t=0,86$  segundos y el área entre 0,86 y 0,60 segundos

$$v_{0,85} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14,4(0,86-0,4)} = 0,69 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \text{área} = \frac{0,69 + 0,88}{2} \cdot 0,26 = 0,20$$

La gráfica del movimiento de la espira en un campo magnético de seis teslas es:

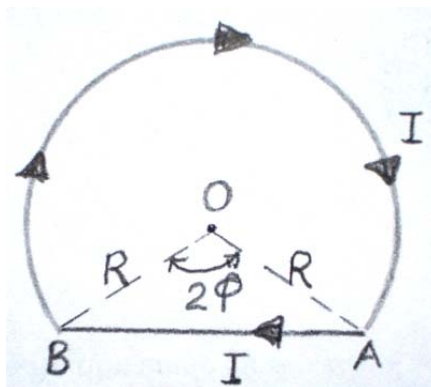


La espira alcanza prácticamente la velocidad límite. Calculemos el valor de ésta, que ocurrirá cuando la aceleración se anule.

$$mg - \frac{B^2 L^2}{R} v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow g - \frac{B^2 L^2}{R} v_{\text{lim}} = 0 \Rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{g m R}{B^2 L^2} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2}{6^2 \cdot 0,20^2} = 0,69 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10.- Calcular la intensidad del campo magnético en el punto  $O$ , creado por un conductor cuya forma es la de la figura inferior y por el que circula una corriente de intensidad  $I$ .  $R$  es el radio de la circunferencia del conductor  $BA$ .

Calcular y dibujar el valor de  $B$  frente al ángulo  $\varphi$ , cuando éste varíe entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ .



El campo magnético en  $O$  está creado por un conductor que corresponde a un arco de circunferencia  $BA$  y por un conductor rectilíneo  $AB$ .

De acuerdo con la ley de Biot-Savart determinamos que el campo creado por  $BA$  es perpendicular al plano del papel y dirigido hacia dentro y con la misma dirección y sentido es el campo creado por  $AB$ .

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

Aplicamos la ecuación anterior para el conductor  $BA$ . En la figura 1 se observa que  $d\vec{l}$  y  $\vec{r}_c$  forman un ángulo de  $90^\circ$  y  $r_c = R$ .

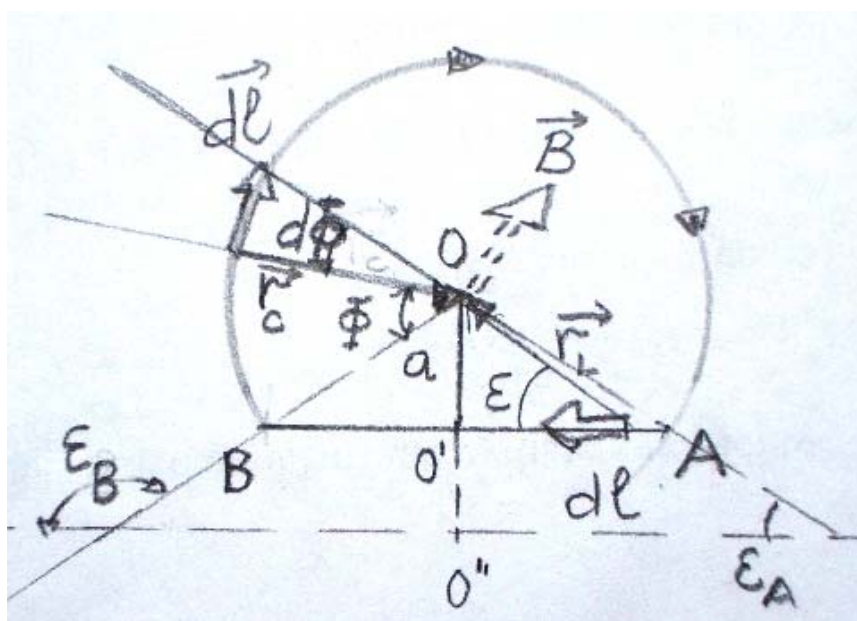


Fig.1

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_c}{r_c^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot R \cdot \sin 90^\circ}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2}$$

Como  $dl$  es un arco de circunferencia abarcado por un ángulo  $d\phi$  y el valor del arco es igual ángulo por el radio, resulta que  $dl=R d\phi$

$$dB_c = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\phi \Rightarrow B_c = \int_0^{2\pi-2\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (2\pi - 2\phi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \phi)$$

Aplicamos la ecuación (1) al conductor rectilíneo AB. Designamos con  $a$ , la mínima distancia que existe desde el punto O al conductor rectilíneo AB. Sobre dicho conductor, y a una distancia  $l$  del punto O', tomamos un elemento de corriente  $d\vec{l}$ . El vector que une  $d\vec{l}$  con O lo llamamos  $\vec{r}_L$ . Ambos vectores forman entre sí un ángulo  $\epsilon$  (ver la figura 2).

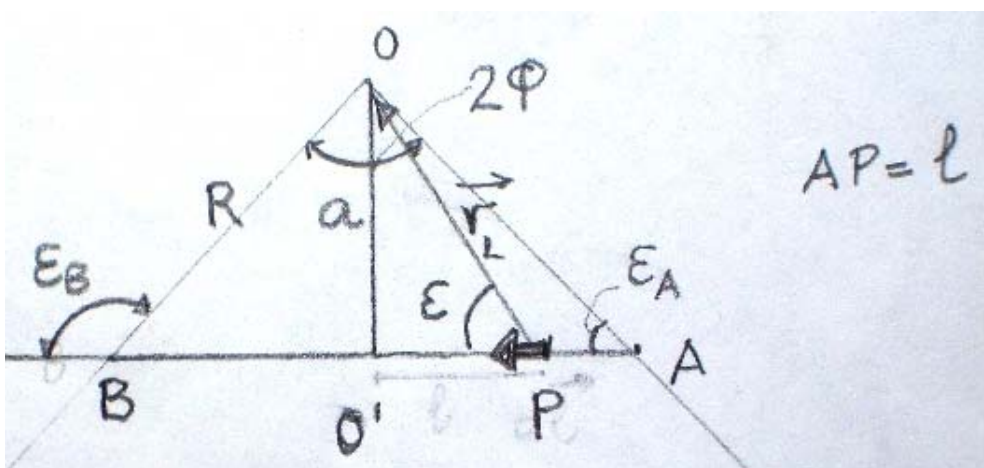


Fig.2

$$dB_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_L}{r_L^3} \Rightarrow dB_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot r_L \cdot \sin \epsilon}{r_L^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot \sin \epsilon}{r_L^2}$$

Se observa que en la ecuación anterior existen tres variables:  $l$ ,  $\epsilon$  y  $r_L$ , las cuales están relacionadas entre sí y lo que hacemos es poner  $dl$  y  $r_L$  en función de  $\epsilon$ .

De la figura 2 se deduce que

$$r_L = \frac{a}{\operatorname{sen}\varepsilon} \quad ; \quad PO' = AO' - l = \frac{a}{\operatorname{tag}\varepsilon} = \frac{a \cos\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon} \Rightarrow -dl = -a \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon + \cos^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\varepsilon} d\varepsilon = -a \frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\varepsilon}$$

$$dB_L = + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\frac{a d\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\varepsilon} \cdot \operatorname{sen}\varepsilon}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \operatorname{sen}\varepsilon d\varepsilon \Rightarrow B_L = \int_{\varepsilon_A}^{\varepsilon_B} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \operatorname{sen}\varepsilon d\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_L = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\varepsilon_B - \cos\varepsilon_A) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\varepsilon_A - \cos\varepsilon_B)$$

Los ángulo  $\varepsilon_A$  y  $\varepsilon_B$  son suplementarios, el coseno de  $\varepsilon_B$  es igual a  $-\cos\varepsilon_A$ . Por otra parte tenemos que  $a = R \operatorname{sen}\varepsilon_A$ , por lo que  $B_L$

$$B_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot 2 \cos\varepsilon_A$$

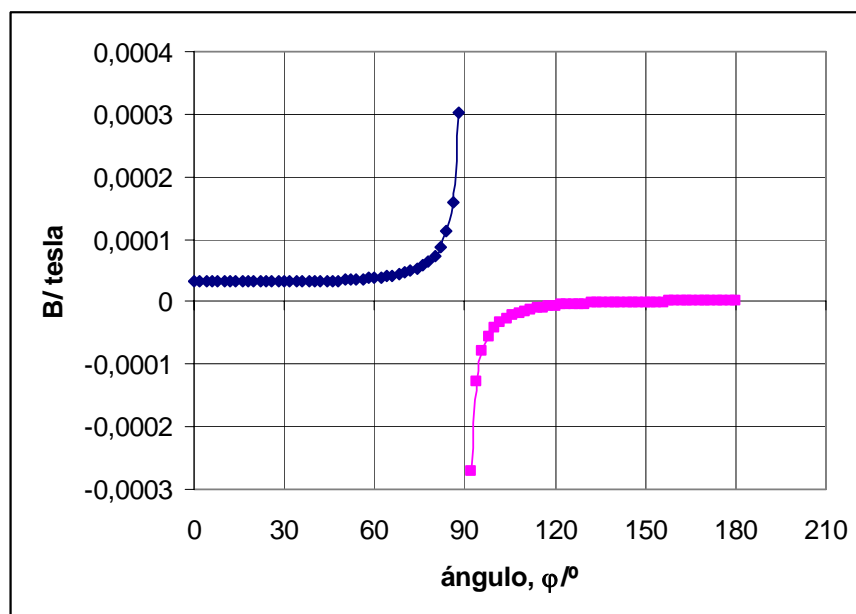
Volviendo a la figura 2, se deduce que  $2\varepsilon_A + 2\varphi = \pi \Rightarrow \varepsilon_A = \pi - \varphi$

$$B_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \operatorname{sen}\varepsilon_A} \cdot 2 \cos\varepsilon_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tag}\varepsilon_A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tag}(\pi - \varphi)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot \operatorname{tag}\varphi$$

El campo en O

$$B_O = B_C + B_L = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \varphi) + \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tag}\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \varphi + \operatorname{tag}\varphi)$$

En la ecuación anterior se dan valores a  $\varphi$  en una hoja de cálculo y se obtiene la siguiente gráfica



Cuando  $\varphi$  se aproxima a  $90^\circ$  el conductor AB se acerca al punto O y según la ecuación anterior el valor de B aumenta de forma notable y las gráficas tienen una asintota para ese valor.

11. Dos conductores rectilíneos de longitud infinita están situados en el plano XZ. El A corta al eje X en la coordenada  $-D$  y el B en la coordenada  $+D$ . La intensidad de la corriente es la misma en los dos conductores, en el A se dirige hacia el eje Z negativo y en el B hacia el eje Z positivo. Se pide calcular el campo magnético en los siguientes punto cuyas coordenadas son:  $(0;0;0)$  ,  $(0;2D;0)$ , y  $(2D;0;0)$ .

El módulo del campo magnético creado por un conductor de longitud infinita esta dado por la expresión

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Siendo  $r$  la distancia mínima entre el conductor y el punto donde se calcula el campo. La anterior expresión se deduce a partir de la ley de Biot-Savart.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Haremos uso de la primera expresión para calcular el módulo del campo y de la segunda, concretamente del producto vectorial  $d\vec{l} \times \vec{r}$  para saber la dirección y sentido del campo.

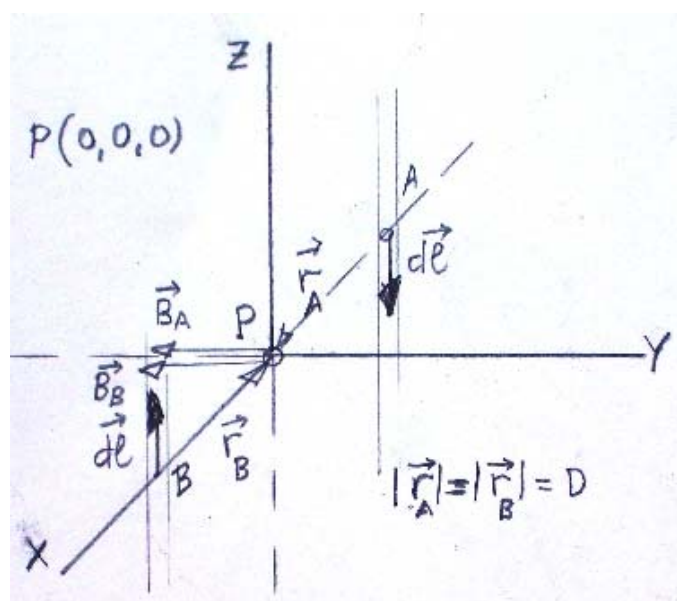


Fig.1

En la figura 1 se ha hecho una representación para calcular el campo en  $P(0;0;0)$ . Ambos campos tienen la misma dirección y sentido en el eje Y negativo. Esta dirección y sentidos se obtienen a partir del producto  $d\vec{l} \times \vec{r}$ .

$$B = B_A + B_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} + \frac{\mu_0 I}{2\pi D} = \frac{\mu_0 I}{\pi D} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{\pi D} \vec{j}$$

En la figura 2a se ha representado la situación de los vectores y del punto P. Para aclarar dicha figura se ha hecho la figura 2b en el plano XY. Observando esta figura se deduce que los vectores  $\vec{B}_A$  y  $\vec{B}_B$  suman sus componentes sobre el eje Y y se anulan sobre el eje X.

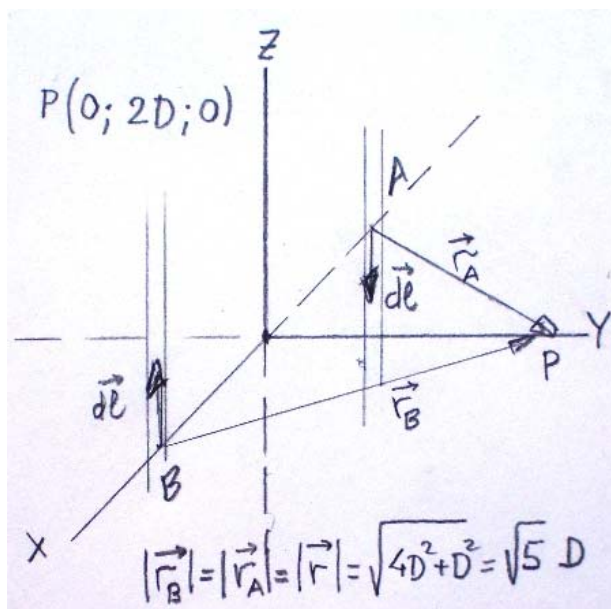


Fig.2 a

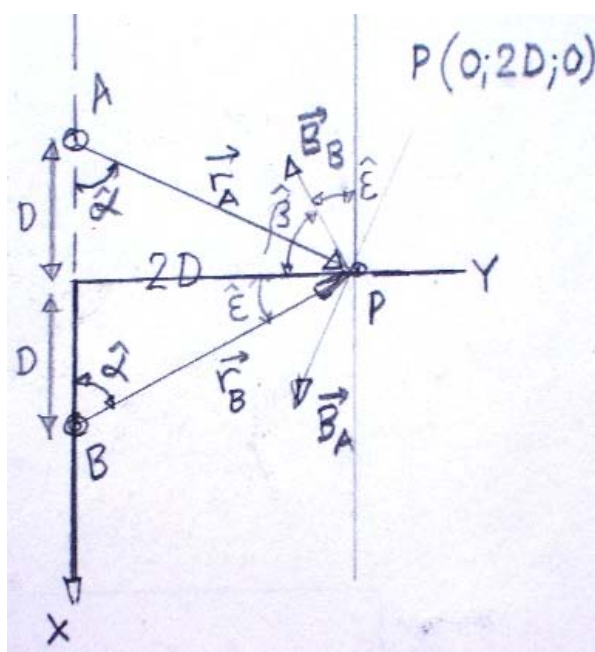


Fig. 2 b

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{5}D} ; \quad B_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{5}D}$$

Teniendo en cuenta que las componentes sobre el eje X se anulan

$$B = B_A \cos\beta + B_B \cos\beta$$

De la figura 2 b se deduce que  $\alpha + \varepsilon = 90^\circ$  y  $\beta + \varepsilon = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \beta$

$$B = B_A \cos\alpha + B_B \cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{5}D} \cdot \frac{D}{\sqrt{5}D} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{5}D} \cdot \frac{D}{\sqrt{5}D} = \frac{\mu_0 I}{5\pi D}$$

Como  $\vec{B}$  tienen el sentido negativo del eje Y

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{5\pi D} \vec{j}$$

En la figura 3 se ha hecho una representación para calcular el campo en  $P(2D;0;0)$ .

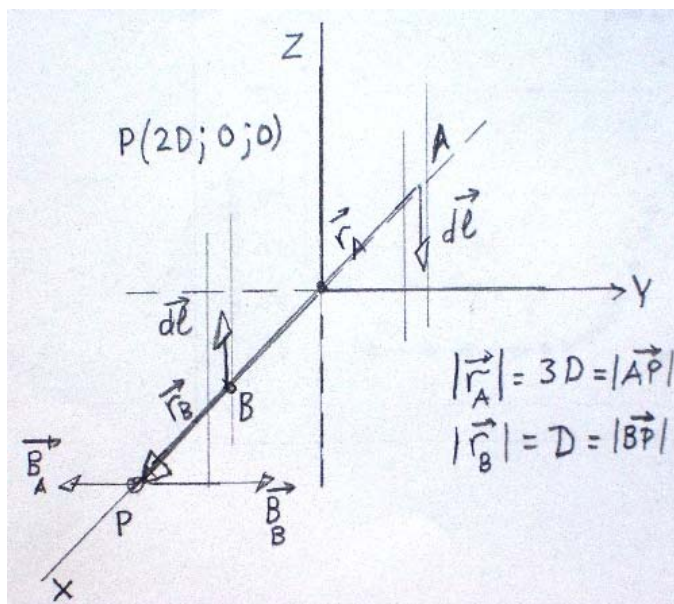
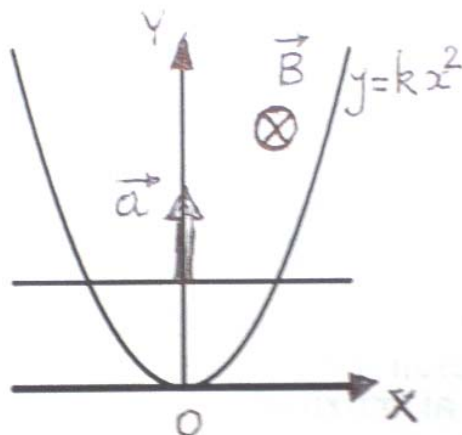


Fig.3

A la vista de la figura 3 y de las explicaciones anteriores se deduce:

$$B = B_B - B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} - \frac{\mu_0 I}{2\pi 3D} = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\mu_0 I}{3\pi D} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{3\pi D} \vec{j}$$

12.-Un conductor filiforme tiene la forma de una parábola de ecuación  $y = kx^2$ , y está situado en el plano XY. Perpendicular a dicho plano existe un campo magnético constante  $B$ .



En el instante  $t=0$  una barra horizontal arranca desde el vértice de la parábola desplazándose con una aceleración constante  $a$ . Encontrar la fuerza electromotriz del circuito debido al movimiento de la barra en función de  $y$ .

En el instante  $t=0$  la barra está sobre el eje X, un tiempo después  $t$  se encuentra en la posición indicada en la figura 1, siendo su altura sobre el vértice de la parábola

$$y = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{a}}$$

La velocidad de la barra en ese instante es  $v=at$ . Transcurrido un tiempo  $dt$  la barra se ha desplazado una altura  $dy = vdt=at dt$  y ha barrido la superficie

$$dS = 2x dy = 2x v dt$$

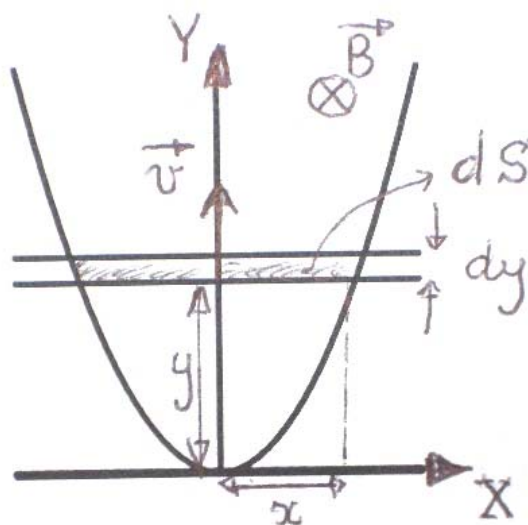


Fig.1

Como consecuencia de el desplazamiento el flujo magnético ha aumentado en

$$d\Phi_M = B \cdot dS = B 2x v dt = B 2 \sqrt{\frac{y}{k}} a t dt$$

El valor absoluto de la fuerza electromotriz es:

$$\varepsilon = \left| \frac{dB}{dt} \right| = 2B \sqrt{\frac{y}{k}} a \sqrt{\frac{2y}{a}} = 2B \sqrt{\frac{2y^2 a}{k}} = 2B y \sqrt{\frac{2a}{k}}$$

13.-En el plano XY yace un hilo conductor de longitud infinita por el que circula una corriente de intensidad  $I$ . En el mismo plano existe una barra conductora de longitud  $L$  que gira con velocidad angular constante  $\omega$ , alrededor de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por su centro. La distancia del extremo más próximo de la varilla al hilo conductor es  $D$ . a) Se pide calcular la fuerza electromotriz  $\varepsilon$ , inducida en la varilla. b) Si  $I=1\text{ A}$ ,  $\omega=1\text{ rad/s}$  y  $L=1\text{ m}$ , determinar la gráfica de  $\varepsilon$  en función de la distancia  $D$ .

Dato:  $\mu_0=1,26 \cdot 10^{-6}\text{ m kg C}^{-2}$

En la figura 1 se representa la varilla girando. En un lugar de ella se ha considerado un elemento de longitud  $dx$ , que al girar y en un tiempo  $dt$  barre un área  $dS$ , describiendo un ángulo  $d\theta$ .

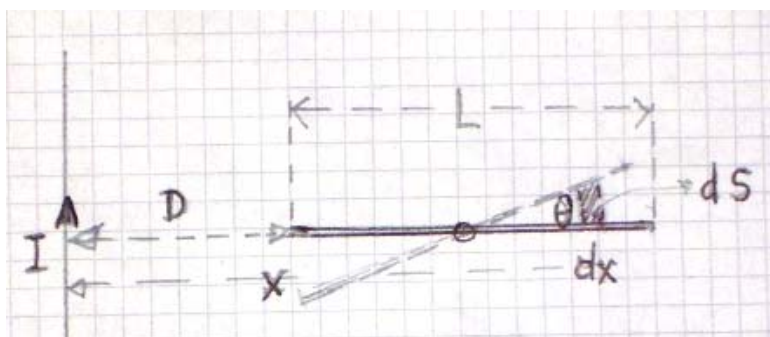


Fig.1

El área  $dS$  esta formada por un arco = ángulo  $\cdot$  radio =  $d\theta \cdot \left(x - D - \frac{L}{2}\right)$  y una longitud  $dx$

$$dS = \left(x - D - \frac{L}{2}\right) \cdot d\theta \cdot dx$$

Esta superficie es atravesada por el campo magnético  $B$  creado por el hilo conductor cuyo módulo es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

El flujo barrido por dicha superficie en un tiempo  $dt$ , vale:

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \left(x - D - \frac{L}{2}\right) d\theta \cdot dx$$

De acuerdo con la ley de Faraday

$$d\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \left(x - D - \frac{L}{2}\right) \frac{d\theta}{dt} \cdot dx = -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi x} \left(x - D - \frac{L}{2}\right) \cdot dx$$

Hacemos extensible el valor de la fuerza electromotriz a toda la varilla

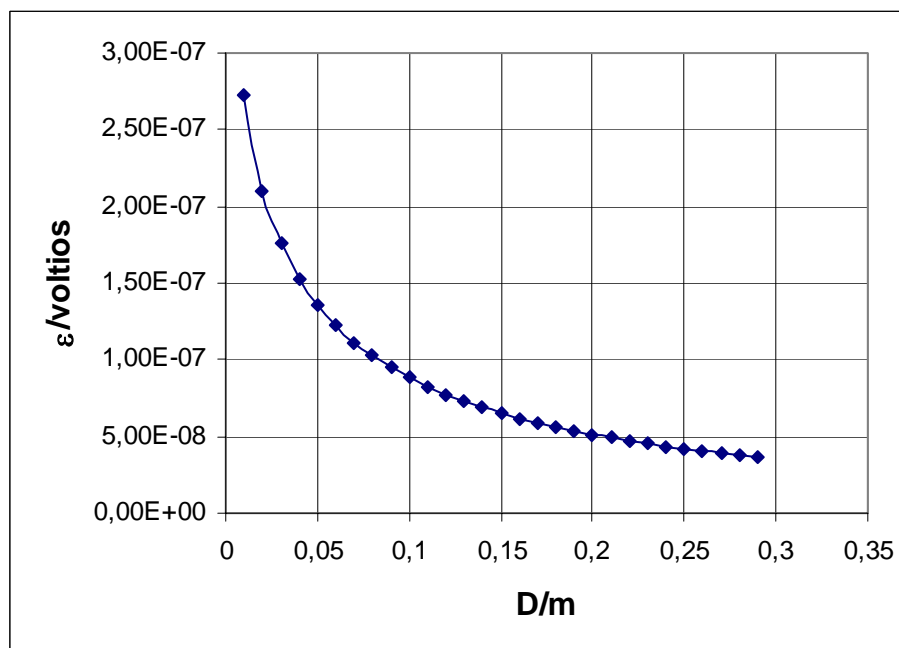
$$\varepsilon = - \int_D^{L+D} \frac{\mu_0 I \omega}{2\pi x} \left( x - D - \frac{L}{2} \right) \cdot dx = - \frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ \int_D^{L+D} dx - D \int_D^{L+D} \frac{dx}{x} - \frac{L}{2} \int_D^{L+D} \frac{dx}{x} \right] \Rightarrow$$

$$\varepsilon = - \frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ (L+D-D) - D \left( \ln \frac{L+D}{D} \right) - \frac{L}{2} \left( \ln \frac{L+D}{D} \right) \right] = - \frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ L - \left( \ln \frac{L+D}{D} \right) \left( D + \frac{L}{2} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I \omega}{2\pi} \left[ \left( \ln \frac{L+D}{D} \right) \left( D + \frac{L}{2} \right) - L \right]$$

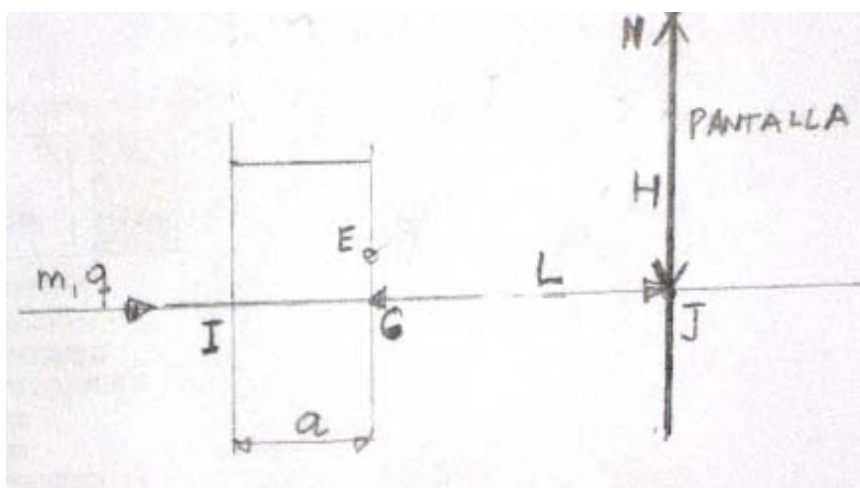
b) Sustituimos valores en la ecuación anterior

$$\varepsilon = \frac{1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 1}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{1+D}{D} \right) \left( D + \frac{1}{2} \right) - 1 \right] = 2,01 \cdot 10^{-7} \left[ \ln \left( \frac{1+D}{D} \right) \left( D + \frac{1}{2} \right) - 1 \right]$$



14.-Un haz de protones se acelera con una diferencia de potencial de 50 kV, el cual se dirige hacia una zona de anchura  $a=2\text{ cm}$  sobre la que se puede instalar un campo magnético uniforme  $B$ .

Cuando el campo está ausente, los protones alcanzan la pantalla en el punto  $J$  y cuando actúa el campo magnético en un punto de altura  $H$ , siendo  $JH=30\text{ cm}$  y  $GJ=L=20\text{ cm}$ . Determinar la intensidad del campo magnético  $B$ .



Masa del protón  $= 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ ; Carga del protón  $= 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$

Calculamos la velocidad de los protones

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^3}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 9,8 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Cuando existe un campo magnético  $B$  los protones recorren un arco de circunferencia de radio  $R$ , tal como se observa en la figura 1. El módulo de la velocidad de salida de los protones en  $E$  es igual a la de entrada en  $I$ , puesto que el campo magnético no aumenta el módulo de la velocidad aunque sí lo hace sobre su dirección. A partir de  $E$  el haz se dirige en línea recta hacia la pantalla.

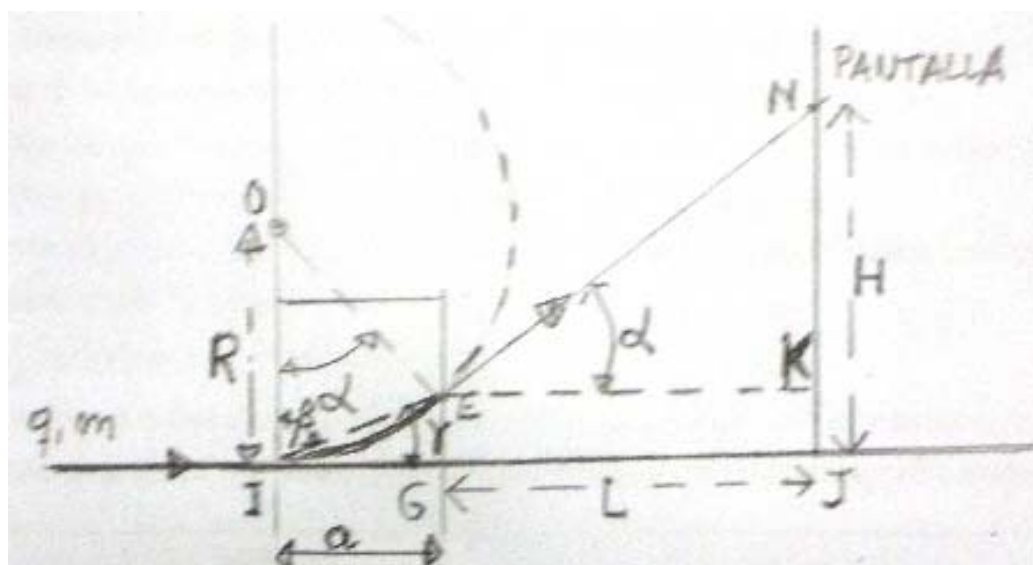


Fig 1

Cuando el haz penetra en el campo magnético la fuerza centrípeta es proporcionada por la fuerza magnética:

$$\frac{m v^2}{R} = q v B \Rightarrow B = \frac{m v}{R q}$$

Para determinar el valor de R nos fijamos en la figura 1. Designamos  $GE=h$ .

Del triángulo EKN deducimos que  $\operatorname{tag} \alpha = \frac{H-h}{L}$  (1).

El triángulo OIE es isósceles siendo sus lados iguales a R

$$\alpha + 2\beta = \pi : \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tag} \gamma = \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{a} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) resulta:

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{H - a \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}}{L} = \frac{30 - 2 \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}}{20} = 1,5 - 0,10 \cdot \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

La ecuación (3) la resolvemos por tanteo

$\alpha$	$\operatorname{tag} \alpha$	$1,5 - 0,10 \operatorname{tag} (\alpha/2)$
10	0,176	1,49
50	1,19	1,45
70	2,75	1,43
60	1,73	1,44
56	1,48	1,45
55,5	1,46	1,45
55,4	1,45	1,45

Volviendo a la figura 1:

$$R = R \cos \alpha + h = R \cos \alpha + a \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow R = \frac{a \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \cdot \operatorname{tag} 27,7}{1 - \cos 55,4} = 2,43 \text{ cm}$$

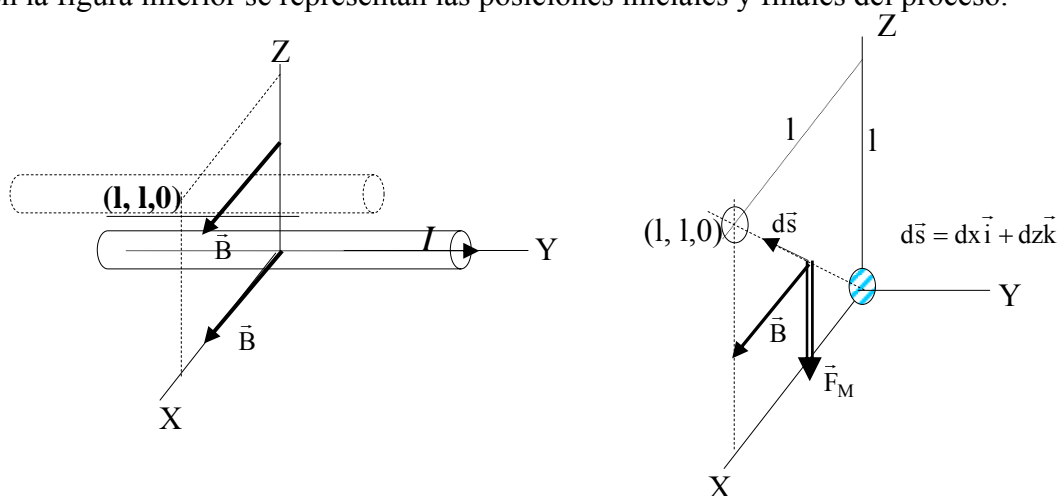
$$B = \frac{m v}{R q} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9,8 \cdot 10^5}{2,43 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,42 \text{ T}$$

15.- Un conductor rectilíneo (de masa despreciable) de longitud  $L$  está situado sobre el eje  $Y$ , ocupando sus extremos las posiciones ( $y = +L/2$ ;  $y = -L/2$ ); mantiene una corriente constante de  $I$  amperios en el sentido del eje  $Y$  positivo. Un campo magnético uniforme  $B$  está dirigido en sentido positivo del eje  $X$  ocupando todo el espacio. Si el mencionado conductor se traslada paralelamente a sí mismo hasta que el centro del mismo ocupe la posición  $x=l, z=l$

a) Se pide calcular el trabajo que se realiza para lograr este desplazamiento, cuando el campo magnético es uniforme.

b) El trabajo, si el módulo del campo es variable según la ecuación  $B(z) = B - \rho z$ , siendo  $\rho$  positivo

a) En la figura inferior se representan las posiciones iniciales y finales del proceso.



El campo magnético provoca sobre el conductor una fuerza cuya ecuación es:

$$\vec{F}_M = I\vec{L} \times \vec{B} = IL \vec{j} \times B \vec{i} = -ILB \vec{k}$$

Esta fuerza perpendicular al conductor, tiende a llevárselo en el sentido negativo del eje  $Z$ , por lo tanto, para trasladar el conductor en el sentido positivo de este mismo eje, hemos de aplicar una fuerza  $\vec{F}$  de módulo igual a la anterior, pero de sentido contrario, que efectúe un trabajo positivo. Después, para llevarlo paralelo al eje  $X$ , hasta llegar al punto considerado  $(l, l, 0)$ , no hace falta más trabajo, puesto que la fuerza del campo magnético al estar según  $Z$  y ser perpendicular al camino, (paralelo al eje  $X$ ), hace trabajo nulo. En efecto.

El trabajo es:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int -\vec{F}_M \cdot d\vec{s} = \int ILB \vec{k} \cdot (dx \vec{i} + dz \vec{k}) = \int_0^l ILB dz = ILBl$$

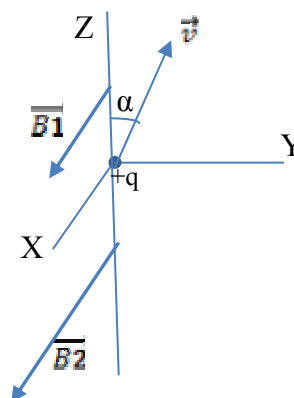
b) La fuerza que sufre el conductor por acción del campo magnético variable es:

$$\vec{F}_M = I\vec{L} \times \vec{B} = IL \vec{j} \times B(z) \vec{i} = -ILB(z) \vec{k} = -IL(B - \rho z) \vec{k}$$

El trabajo es:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int -\vec{F}_M \cdot d\vec{s} = \int IL(B - \rho z)\vec{k} \cdot (dx\vec{i} + dz\vec{k}) = \int_0^l IL(B - \rho z)dz = ILB l - ILB\rho \frac{l^2}{2} \Rightarrow$$
$$W = ILB l \left(1 - \frac{\rho l}{2}\right)$$

16.- Una partícula de masa  $m$  y carga  $+q$  se encuentra en el instante inicial sobre el eje  $Y$ , formando su velocidad un ángulo  $\alpha$  respecto del eje  $Z$ . En el semiplano superior  $YZ$  existe un campo magnético uniforme  $B_1$  dirigido según el eje positivo  $X$  y en el semiplano inferior un campo magnético  $B_2$  también dirigido en el sentido positivo del eje  $X$ , siendo  $B_2 > B_1$ . Se pide estudiar el movimiento de la partícula a partir del instante inicial.



La partícula al penetrar en el campo  $B_1$  sufre una fuerza perpendicular a su velocidad que modifica su dirección, pero no su módulo, de valor:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}_1$$

La velocidad  $\vec{v}$  y el campo  $\vec{B}_1$  forman un ángulo de  $90^\circ$ , por lo que se puede escribir

$$F_1 = qvB_1 = m \frac{v^2}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{mv}{qB_1}$$

La partícula describe un arco de circunferencia  $OQ$  (figura 1) con velocidad constante. Al llegar a  $Q$  penetra en el campo magnético  $B_2$  y describe otro arco de circunferencia  $QP$  de radio

$$F_2 = qvB_2 = m \frac{v^2}{R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{mv}{qB_2} ; R_1 > R_2$$

Al llegar a  $P$  se repite la situación de  $O$  y a partir de este momento el movimiento se repite de forma periódica.

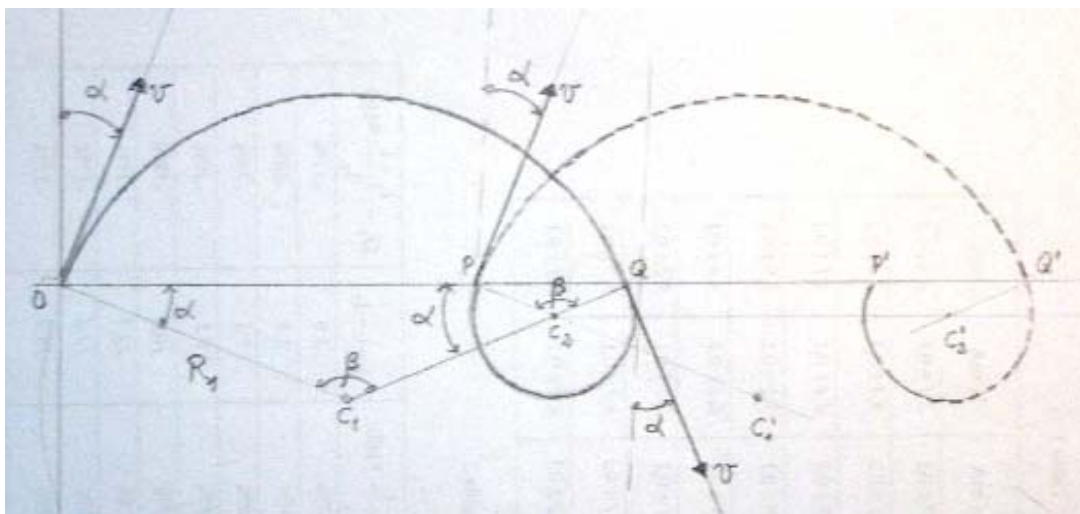


Fig.1

Vamos a calcular el periodo del movimiento. Determinamos primero el tiempo  $t_1$  que emplea la partícula en ir desde O hasta Q.

La longitud del arco OQ vale recordando que el arco es igual al ángulo abarcado, expresado en radianes, por el radio.

$$L_{OQ} = \beta R_1$$

Del triángulo  $OC_1Q$

$$2\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \beta = \pi - 2\alpha \Rightarrow L_{OQ} = (\pi - 2\alpha)R_1$$

Teniendo en cuenta que el arco OQ se recorre con velocidad constante

$$t_1 = \frac{L_{OQ}}{v} = \frac{(\pi - 2\alpha)R_1}{v}$$

Calculamos ahora el tiempo que emplea la partícula en recorrer el arco QP,. Utilizamos el razonamiento anterior

$$L_{QP} = (2\pi - \beta)R_2 = (2\pi - \pi + 2\alpha)R_2 \Rightarrow t_2 = \frac{(\pi + 2\alpha)R_2}{v}$$

El periodo T del movimiento

$$T = t_1 + t_2 = \frac{(\pi - 2\alpha)R_1 + (\pi + 2\alpha)R_2}{v} = \frac{\pi(R_1 + R_2) - 2\alpha(R_1 - R_2)}{v}$$

La velocidad media con que la partícula recorre el segmento OP es:

$$v_m = \frac{OP}{T} = \frac{OQ - PQ}{T} = \frac{2R_1 \cos \alpha - 2R_2 \cos \alpha}{\frac{\pi(R_1 + R_2) - 2\alpha(R_1 - R_2)}{v}} = \frac{2v \cos \alpha (R_1 - R_2)}{\pi(R_1 + R_2) - 2\alpha(R_1 - R_2)}$$

Expresamos los radios en función de los campos magnéticos

$$R_1 - R_2 = \frac{mv}{q} \left( \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} \right) = \frac{mv}{q} \left( \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \right); \quad R_1 + R_2 = \frac{mv}{q} \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) = \frac{mv}{q} \left( \frac{B_2 + B_1}{B_1 B_2} \right)$$

Llevando estas relaciones a la velocidad media:

$$v_m = \frac{2v \cos \alpha \frac{mv}{q} \left( \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \right)}{\pi \frac{mv}{q} \left( \frac{B_1 + B_2}{B_1 B_2} \right) - 2\alpha \frac{mv}{q} \left( \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \right)} = \frac{2v \cos \alpha (B_2 - B_1)}{\pi(B_1 + B_2) - 2\alpha(B_2 - B_1)}$$

