

1.- La longitud de onda promedio del filamento de una bombilla es $12 \cdot 10^{-5}$ cm. Calcular el número de fotones emitidos por unidad de tiempo, si la potencia de la bombilla es 200 W.

La energía asociada a un fotón es

$$E = hv = h \frac{c}{\lambda}$$

Si N representa el número de fotones emitidos por unidad de tiempo NE es igual a la potencia de la bombilla

$$N h \frac{c}{\lambda} = 200 \Rightarrow N = \frac{200 \lambda}{hc} = \frac{200 * 12 \cdot 10^{-7}}{6,6 \cdot 10^{-34} * 3 \cdot 10^9} = 1,2 \cdot 10^{20} \frac{\text{fotones}}{\text{s}}$$

2.- En la fisión de un núcleo de ${}^{235}_{92}\text{U}$ se liberan aproximadamente 185 MeV de energía. Un reactor nuclear funciona con este isótopo y genera una potencia de 100 MW. Calcular los kilos de este isótopo que se desintegran en un año de funcionamiento del reactor.

La energía desarrollada por el reactor en un año es:

$$100 \frac{\text{MJ}}{\text{s}} \cdot 365 \frac{\text{días}}{\text{año}} \cdot 86400 \frac{\text{s}}{\text{día}} = 3,154 \cdot 10^9 \frac{\text{MJ}}{\text{año}}$$

Un mol de isótopos son $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ isótopos individuales y su masa es 235 g = 0,235 kg. La energía generada por esa masa es:

$$185 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ MeV} = 185 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 1,782 \cdot 10^{13} \text{ J} = 1,782 \cdot 10^7 \text{ MJ}$$

$$\frac{1,782 \cdot 10^7 \text{ MJ}}{0,235 \text{ kg}} = \frac{3,154 \cdot 10^9}{x} \Rightarrow x = 41,6 \text{ kg}$$

3.-El filamento de una bombilla, 220 V , 100 W, tiene una longitud L y un diámetro $D=0,1$ mm y su resistividad $\rho=5,5 \cdot 10^{-8} \Omega m$. Después de que la bombilla permanece encendida durante largo tiempo, adquiere una temperatura constante. Si se admite que todo el calor producido en el filamento se radia al exterior, estimar el valor de esa temperatura. Considérese que el filamento se comporta como un cuerpo negro.

Dato constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

Cuando se alcanza el estado estacionario la energía térmica producida en la unidad de tiempo es igual a la emitida en forma de radiación por la superficie del filamento.

La potencia térmica es $P = I \Delta V$ y la radiada $\sigma T^4 \cdot S = \sigma T^4 \cdot \pi DL$

$$P = \sigma T^4 \cdot \pi DL \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma \pi DL}} \quad (1)$$

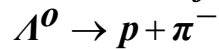
Para calcular L

$$P = I \Delta V = \frac{\Delta V^2}{R} = \Delta V^2 \cdot \frac{\pi D^2}{\rho 4L} \Rightarrow L = \frac{\Delta V^2 \pi D^2}{4P\rho}$$

Llevando la última relación a (1)

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma \pi D \frac{\Delta V^2 \pi D^2}{4P\rho}}} = \sqrt[4]{\frac{4P^2\rho}{\sigma \pi^2 \Delta V^2 D^3}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 100^2 \cdot 5,5 \cdot 10^{-8}}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 3,14^2 \cdot 220^2 \cdot (0,1 \cdot 10^{-3})^3}} = 534 \text{ K}$$

4.-La partícula Λ^0 decae mediante la transformación



Si Λ^0 se encuentra en reposo, determinar la energía cinética del pión.

Datos : Masas de las partículas

$$\Lambda^0 = 1116 \text{ MeV}/c^2 ; p = 938,3 \text{ MeV}/c^2 ; \pi^- = 139,6 \text{ MeV}/c^2$$

Si la partícula Λ^0 se encuentra en reposo quiere decir que la cantidad de movimiento del protón sumada a la del pión ha de ser cero, por tanto, ambas partículas tienen el mismo momento y se dirigen en la misma dirección y en sentido opuesto. Hacemos uso de la relación relativista

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

Aplicándola al protón y al pión

$$(E^2 - E_0^2)_p = (p^2 c^2)_p \quad ; \quad (E^2 - E_0^2)_\pi = (p^2 c^2)_\pi$$

Al ser los momentos iguales

$$(E^2 - E_0^2)_p = (E^2 - E_0^2)_\pi \quad \Rightarrow \quad E_p^2 - E_\pi^2 = (E_0^2)_p - (E_0^2)_\pi = (938,3)^2 - (139,6)^2 \quad (1)$$

Aplicamos el principio de conservación de la energía

$$(E_0)_\Lambda = E_p + E_\pi \quad \Rightarrow \quad E_p = (E_0)_\Lambda - E_\pi = 1116 - E_\pi$$

Llevando esta ecuación a la (1)

$$(1116 - E_\pi)^2 - E_\pi^2 = (938,3^2 - 139,6^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1116^2 + E_\pi^2 - 2 \cdot 1116 E_\pi - E_\pi^2 = (938,3^2 - 139,6^2) \quad \Rightarrow$$

$$E_\pi = \frac{1116^2 - (938,3^2 - 139,6^2)}{2 \cdot 1116} = (E_c)_\pi + (E_\pi^0) \quad \Rightarrow$$

$$(E_c)_\pi = \frac{1116^2 - (938,3^2 - 139,6^2)}{2 \cdot 1116} - 139,6 = 33 \text{ MeV}$$

5.- Un observador O' tiene una velocidad $0,8c$ respecto de un observador O . Ajustan sus relojes de modo que $t=t'=0$ cuando $x=x'=0$. El observador O determina que un primer suceso ocurre en $x=50$ m y $t=2 \cdot 10^{-7}$ s. Un segundo suceso ocurre para el observador O' en $x'=10$ m y $t'=2 \cdot 10^{-7}$ s. Se pide a) El tiempo determinado por O' para el primer suceso b) El intervalo de tiempo entre los dos sucesos para el observador O , c) La separación espacial de los dos sucesos para ambos observadores

Escribimos las ecuaciones de transformación de Lorentz

$$x = \gamma(x' + vt') \quad (1) \quad ; \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \quad (2)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (3) \quad ; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (4)$$

Calculamos el valor de γ , $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,64}} = 1,67$

Para el suceso 1 y el observador O , $x_1(O)=50$ m , $t_1(O)=2 \cdot 10^{-7}$ s

Para el suceso 2 y el observador O

$$x_2(O) = 1,67 \cdot \left(10 + 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-7}\right) = 96,9 \text{ m}$$

$$t_2(O) = 1,67 \cdot \left(2 \cdot 10^{-7} + \frac{0,8}{3 \cdot 10^8} \cdot 10\right) = 3,79 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Para el suceso 1 y el observador O'

$$x_1(O') = 1,67 \cdot \left(50 - 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-7}\right) = 3,34 \text{ m}$$

$$t_1(O') = 1,67 \cdot \left(2 \cdot 10^{-7} - \frac{0,8}{3 \cdot 10^8} \cdot 50\right) = 1,11 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Para el suceso 2 y el observador O' , $x_2(O')=10$ m , $t_2(O')=2 \cdot 10^{-7}$ s

a) $t_1(O') = 1,11 \cdot 10^{-7}$ s

b) $\Delta t(O) = t_2(O) - t_1(O) = 3,79 \cdot 10^{-7} - 2 \cdot 10^{-7} = 1,79 \cdot 10^{-7}$ s

c) $\Delta x(O) = x_2(O) - x_1(O) = 96,9 - 50 = 46,9$ m

$$\Delta x(O') = x_2(O') - x_1(O') = 10 - 3,34 = 6,7 \text{ m}$$

6.-En un dispositivo para determinar la composición isotópica de los iones potasio $^{39}\text{K}^+$ y $^{41}\text{K}^+$, primero se aceleran en un campo eléctrico y luego van a parar a un campo magnético B perpendicular a la dirección de su movimiento. La tensión que crea el campo eléctrico es U_0 , aun cuando este valor puede oscilar en $\pm \Delta U$. Determinar el cociente $\frac{\Delta U}{U_0}$ para que los haces de los iones potasio no se superpongan.

Dado que la tensión toma los valores extremos $U_0 + \Delta U$ y $U_0 - \Delta U$ los radios de los iones potasio están comprendidos entre los siguientes valores

$$U_0 + \Delta U = \frac{1}{2} m_{39} v_{M39}^2 \Rightarrow v_{M39} = \sqrt{\frac{2(U_0 + \Delta U)}{m_{39}}} ; \quad qBv_{M39} = \frac{mv_{M39}^2}{R_{M39}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{M39} = \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{39}}}{Bq} ; \quad R_{m39} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{39}}}{Bq}$$

M significa el radio mayor y m el menor. Para el ión de potasio 41

$$\Rightarrow R_{M41} = \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{41}}}{Bq} ; \quad R_{m41} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{41}}}{Bq}$$

Para que no se superpongan los haces de los iones, el límite lo indica que coincidan el radio mayor del ión 39 con el radio menor del ión 41.

$$\Rightarrow R_{M39} = \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{39}}}{Bq} ; \quad R_{m41} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{41}}}{Bq} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2(U_0 + \Delta U)m_{39}}}{Bq} = \frac{\sqrt{2(U_0 - \Delta U)m_{41}}}{Bq} \Rightarrow (U_0 + \Delta U)m_{39} = (U_0 - \Delta U)m_{41} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(U_0 + \Delta U)}{(U_0 - \Delta U)} = \frac{m_{41}}{m_{39}} = \frac{41}{39} \Rightarrow 39U_0 + 39\Delta U = 41U_0 - 41\Delta U \Rightarrow 80\Delta U = 2U_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta U}{U_0} = \frac{1}{40}$$

Dado el valor del límite, la relación para lo que no hay superposición es $\frac{\Delta U}{U_0} < \frac{1}{40}$

7.- En un sistema de referencia S dos sucesos están separados por $\Delta t=8,0$ s y $\Delta x = 2 \cdot 10^9$ m. ¿Existe un sistema de referencia S' para el que los dos sucesos sean simultáneos? ¿Existe un sistema S'' en que los dos sucesos ocurran en el mismo punto del espacio?, en tal caso ¿cuál sería su separación temporal?

Designamos con v a la velocidad del sistema S' y con A y B los dos sucesos y aplicamos una de las transformaciones de Lorentz a cada suceso.

$$t'_A = \frac{t_A - x_A \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad t'_B = \frac{t_B - x_B \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \quad t'_B - t'_A = 0 = \frac{(t_A - t_B) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - \frac{v}{9 \cdot 10^{16}} \cdot 2 \cdot 10^9 = 0 \quad \Rightarrow 72 \cdot 10^{16} = 2 \cdot 10^9 v \quad \Rightarrow v = 3,6 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dado que v supera la velocidad de la luz, el sistema S' no puede existir.

$$x'_A = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad x'_B = \frac{x_B - vt_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \quad x'_B - x'_A = 0 = \frac{(x_A - x_B) - v(t_A - t_B)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{x_A - x_B}{t_A - t_B} = \frac{2 \cdot 10^9}{8,0} = 2,5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad de S' es inferior a la de la luz y por tanto el sistema puede existir.

$$t'_A = \frac{t_A - x_A \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad t'_B = \frac{t_B - x_B \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \quad t'_B - t'_A = \frac{(t_A - t_B) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t'_B - t'_A = \frac{8,0 - \frac{2,5 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{16}} \cdot 2 \cdot 10^9}{\sqrt{1 - \left(\frac{2,5 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = 4,4 \text{ s}$$

Este problema se puede resolver más rápidamente utilizando el invariante s .

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta l^2$$

Aplicando la relación anterior para el sistema S y para el sistema S' en el que $\Delta t' = 0$

$$(3 \cdot 10^8 \cdot 8,0)^2 - (2 \cdot 10^9)^2 = -(\Delta l')^2 \Rightarrow -1,76 \cdot 10^{18} = (\Delta l')^2$$

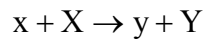
Este sistema no existe.

Apliquemos para el sistema S'' en el que $\Delta l' = 0$

$$1,76 \cdot 10^{18} = (c\Delta t')^2 \Rightarrow \Delta t' = \sqrt{\frac{1,76 \cdot 10^{18}}{9 \cdot 10^{16}}} = 4,4 \text{ s}$$

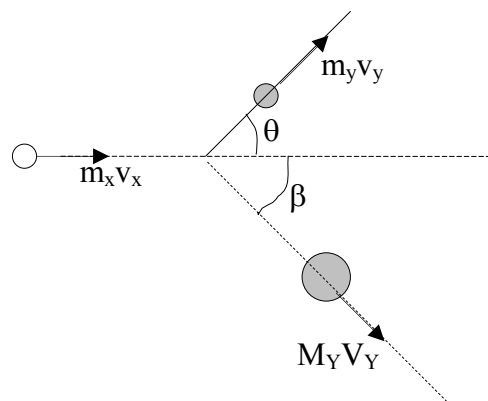
8.-Calcular el valor de Q para la reacción nuclear $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$, sabiendo que la energía inicial de la partícula incidente vale $4,00\text{ MeV}$ y el protón formó con la dirección de la partícula incidente un ángulo de 60° con una energía cinética de $2,09\text{ MeV}$.

Vamos a deducir la formula general utilizando la nomenclatura más habitual para una reacción nuclear



La partícula incidente es x , el núcleo que hace de blanco es X (admitimos como ocurre con frecuencia que está en reposo), y , es la partícula resultante de la reacción e Y es el nuevo núcleo formado. T_x , T_y y T_Y son las energías cinéticas clásicas.

El proceso puede representarse gráficamente



Aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$m_x v_x = m_y v_y \cos\theta + M_Y V_Y \cos\beta$$

$$m_y v_y \sin\theta = M_Y V_Y \sin\beta$$

Eliminamos el término que contiene el ángulo β .

$$m_x^2 v_x^2 + m_y^2 v_y^2 \cos^2\theta - 2m_x m_y v_x v_y \cos\theta = M_Y^2 V_Y^2 \cos^2\beta$$

$$m_y^2 v_y^2 \sin^2\theta = M_Y^2 V_Y^2 \sin^2\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_Y^2 V_Y^2 = m_x^2 v_x^2 + m_y^2 v_y^2 - 2m_x m_y v_x v_y \cos\theta$$

Introducimos en la ecuación anterior las energías cinéticas en sentido clásico.

$$T_x = \frac{1}{2} m_x v_x^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2T_x}{m_x}}; T_y = \frac{1}{2} m_y v_y^2 \Rightarrow v_y = \sqrt{\frac{2T_y}{m_y}}; T_x = \frac{1}{2} M_Y V_Y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_Y = \sqrt{\frac{2T_Y}{M_Y}}$$

$$M_Y^2 \frac{2T_Y}{M_Y} = m_x^2 \frac{2T_x}{m_x} + m_y^2 \frac{2T_y}{m_y} - 2m_x m_y \sqrt{\frac{2T_x}{m_x}} \cdot \sqrt{\frac{2T_y}{m_y}} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2M_Y T_Y = 2m_x T_x + 2m_y T_y - 4\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_Y = T_x \frac{m_x}{M_Y} + T_y \frac{m_y}{M_Y} - \frac{2\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta}{M_Y}$$

El valor de Q para las reacciones nucleares es:

$$Q = T_Y + T_y - T_x = T_x \frac{m_x}{M_Y} + T_y \frac{m_y}{M_Y} - \frac{2\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta}{M_Y} + T_y - T_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = T_y \left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - T_x \left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta}{M_Y} \quad (1)$$

Cuando se aplica esta ecuación se utilizan los valores de los números másicos en lugar de las masas nucleares, ya que el error que puede cometerse es pequeño y se facilitan los cálculos.

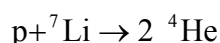
En el problema propuesto x es la partícula alfa, y es el protón e Y es el núcleo de oxígeno. Basta sustituir los valores numéricos en la ecuación (1) para hallar Q

$$Q = 2,09 \left(1 + \frac{1}{17}\right) - 4,00 \left(1 - \frac{4}{17}\right) - 2\sqrt{\frac{4}{17} \cdot \frac{1}{17}} \cdot 4,00 \cdot 2,09 \cdot \cos 60^\circ = -1,2 \text{ MeV}$$

9.-Unos protones con energía cinética 1,0 MeV bombardean un blanco de litio en reposo dando como resultado una reacción nuclear en la que se producen dos partículas alfa, las cuales forman con la dirección de los protones ángulos iguales. Calcular la energía de las partículas alfa y el ángulo que forman entre sí.

Datos: masa del protón=1,007825 u, masa de la partícula alfa = 4,00260 u , masa del núcleo de litio = 7,0160048 u, velocidad de la luz $c=2,998.10^8$ m/s, $1 u = 1,66.10^{-27}$ kg, carga del electrón $1,60.10^{-19}$ C.

El valor de Q para una reacción nuclear se puede expresar mediante la diferencia de masas. La reacción nuclear propuesta es la siguiente



$$Q = [(M_{\text{protón}} + M_{\text{Litio}}) - 2 \text{Masa } \alpha]c^2 = (1,007825 + 7,00160048 - 2 \cdot 4,002603)c^2$$

$$Q = -0,0186 \text{ u} \cdot (2,998.10^8)^2 = -0,0186 \text{ u} \cdot \frac{1,66.10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ u}} \cdot (2,998.10^8)^2 = -2,78.10^{-12} \text{ J}$$

$$Q = -2,78.10^{-12} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,60.10^{-19} \text{ J}} = -1,74.10^7 \text{ eV} = -17,4 \text{ MeV}$$

También Q es la diferencia de energías

$$-17,4 = T_{\text{protón}} - 2T_{\alpha} \Rightarrow -18,4 = -2 \cdot T_{\alpha} \Rightarrow T_{\alpha} = 9,2 \text{ MeV}$$

Aplicamos el principio de la conservación de la cantidad de movimiento

$$m_p v_p = 2m_{\alpha} v_{\alpha} \cos\theta \Rightarrow m_p \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{m_p}} = 2m_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9,2}{m_{\alpha}}} \cos\theta \Rightarrow 2m_p = 8 \cdot 9,2 m_{\alpha} \cos^2\theta$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{m_p}{4 \cdot 9,2 \cdot m_{\alpha}}} = \sqrt{\frac{1,007825}{4 \cdot 9,2 \cdot 4,002603}} = 0,083 \Rightarrow \theta = 85,3^{\circ}$$

El ángulo que forman entre sí las dos partículas alfa es: $2 \cdot 85,3 = 170,5^{\circ}$

10.-Un mesón π^+ en reposo se desintegró en un muón μ^+ y un neutrino. Determinar la energía cinética del muón y del neutrino. Datos .Masas de las partículas: $\pi^+ = 139,6 \text{ MeV}/c^2$; $\mu^+ = 105,7 \text{ MeV}/c^2$; neutrino = 0.

Teniendo en cuenta que el mesón se desintegra desde el reposo, las otras dos partículas deben salir en direcciones opuestas y con el mismo momento lineal, al cual designamos con p.

La conservación de la energía nos dice que

$$E_{\pi} = E_{\mu} + E_{\nu}$$

Teniendo presente la relación relativista $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, escribimos:

$$\begin{aligned} m_{\pi}c^2 &= \sqrt{p^2c^2 + m_{\mu}^2c^4} + pc \Rightarrow (m_{\pi}c^2 - pc)^2 = p^2c^2 + m_{\mu}^2c^4 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_{\pi}^2c^4 + p^2c^2 - 2m_{\pi}pc^3 &= p^2c^2 + m_{\mu}^2c^4 \Rightarrow m_{\pi}^2c^4 - 2m_{\pi}pc^3 = m_{\mu}^2c^4 \Rightarrow \\ \Rightarrow p &= \frac{c(m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2)}{2m_{\pi}} \end{aligned}$$

La energía del neutrino es:

$$\begin{aligned} E_{\nu} = pc &= \frac{c^2(m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2)}{2m_{\pi}} = \frac{c^2 \left[\left(139,6 \frac{\text{MeV}}{c^2} \right)^2 - \left(105,7 \frac{\text{MeV}}{c^2} \right)^2 \right]}{2 \cdot 139,6 \frac{\text{MeV}}{c^2}} \\ E_{\nu} &= \frac{139,6^2 - 105,7^2}{279,2} \frac{(\text{MeV})^2}{\frac{\text{MeV}}{c^2}} = 29,8 \text{ MeV} \end{aligned}$$

La energía del muón es:

$$E_{\mu} = E_{\pi} - 29,8 \Rightarrow m_{\mu}c^2 + T_{\mu} = m_{\pi}c^2 - 29,8 \Rightarrow T_{\mu} = c^2(m_{\pi} - m_{\mu}) - 29,8$$

$$T_{\mu} = 139,6 - 105,7 - 29,8 = 4,1 \text{ MeV}$$

11.-Determinar la energía umbral necesaria para crear un antiprotón mediante la reacción: $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$.

Realizar el mismo cálculo para la reacción: $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$

Datos: Masa del protón y antiprotón = $938,26 \text{ MeV}/c^2$; masa del pión = $135,0 \text{ MeV}/c^2$.

En estas reacciones entre partículas un protón actúa como proyectil dotado de energía cinética y momento y el otro está en reposo. En el sistema de referencia del protón en reposo la energía inicial es:

$$E_L = m_p c^2 + T + m_p c^2$$

Siendo m_p la masa del protón en reposo y T la energía cinética del protón que actúa como proyectil.

En el sistema de referencia del centro de masas los dos protones tienen momento nulo y dado que se pide la energía umbral (mínima) los cuatro protones deben estar en reposo siendo su energía

$$E_{cm} = 4m_p c^2$$

Hacemos uso del invariante relativista $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$, donde E y p son la energía y el impulso totales antes de la colisión y m la masa en reposo de las partículas que se forman

$$E_L^2 - p^2 c^2 = E_{cm}^2 \Rightarrow (2m_p c^2 + T)^2 - p^2 c^2 = 16m_p^2 c^4 \quad (1)$$

La energía del protón que actúa como proyectil

$$E_p^2 = p^2 c^2 + m_p^2 c^4 \Rightarrow p^2 c^2 = E_p^2 - m_p^2 c^4 \Rightarrow p^2 c^2 = (m_p c^2 + T)^2 - m_p^2 c^4$$

Combinando esta ecuación con la (1), resulta:

$$\begin{aligned} & (2m_p c^2 + T)^2 - [(m_p c^2 + T)^2 - m_p^2 c^4] = 16m_p^2 c^4 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 4m_p^2 c^4 + T^2 + 4Tm_p c^2 - (m_p^2 c^4 + T^2 + 2Tm_p c^2 - m_p^2 c^4) = 16m_p^2 c^4 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2Tm_p c^2 = 12m_p^2 c^4 \Rightarrow T = 6m_p c^2 = 6 \cdot 938,26 \frac{\text{MeV}}{c^2} \cdot c^2 = 5,63 \cdot 10^3 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Para la segunda reacción el procedimiento a seguir es el mismo

$$\text{Ahora } E_{cm} = (2m_p + m_\pi) c^2$$

$$4 m_p^2 c^4 + T^2 + 4 T m_p c^2 - (m_p^2 c^4 + T^2 + 2 T m_p c^2 - m_p^2 c^4) = (2 m_p + m_\pi)^2 c^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 m_p^2 c^4 + 2 T m_p c^2 = (2 m_p + m_\pi)^2 c^4 \Rightarrow 2 T m_p = (2 m_p + m_\pi)^2 c^2 - 4 m_p^2 c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{4 m_p^2 + m_\pi^2 + 4 m_p m_\pi - 4 m_p^2}{2 m_p} \cdot c^2 = \frac{m_\pi (m_\pi + 4 m_p)}{2 m_p} \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{135,0(135,0 + 4 \cdot 938,26)}{2 \cdot 938,26} = 280 \text{ MeV}$$

12.- Una partícula tiene una masa en reposo m_0 . Se somete a una fuerza constante de módulo F . Encontrar las ecuaciones que relacionan con el tiempo su velocidad y posición, sabiendo que cuando $t=0$, $v=0$, y $s=0$.

Utilizamos la ecuación

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \Rightarrow \int F dt = \int d \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \Rightarrow$$

$$F t = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + Cte$$

Cuando $t=0$, $v=0$, luego $Cte=0$

$$F^2 t^2 = \frac{m_0^2 v^2 c^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow F^2 t^2 c^2 - F^2 t^2 v^2 = m_0^2 v^2 c^2 \Rightarrow m_0^2 v^2 c^2 + F^2 t^2 v^2 = F^2 t^2 c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{F c t}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}}$$

Cuando t tiende a infinito, $m_0^2 c^2 \ll F^2 t^2$ y $v \rightarrow c$

Para calcular la posición de la partícula respecto a la posición inicial usamos la expresión $v = \frac{ds}{dt}$.

$$s = \int v dt = \int \frac{F c t}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}} dt$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable

$$m_0^2 c^2 + F^2 t^2 = u^2 \Rightarrow 2F^2 t = 2u du$$

Sustituyendo en la integral

$$s = \int \frac{F c \frac{u du}{2F^2 t}}{u} = \frac{c}{F} u + Cte = \frac{c}{F} \sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} + Cte$$

Cuando $t=0$, $s=0$

$$0 = \frac{c}{F} \sqrt{m_0^2 c^2} + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{m_0 c^2}{F}$$

$$s = \frac{c}{F} \sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{F} = \frac{c}{F} \left(\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} - m_0 c \right)$$

13.- a) Un fotón de energía E choca contra una partícula estacionaria de masa en reposo m_0 y es absorbido ¿Cuál es la velocidad de la partícula compuesta resultante?

b) Una partícula de masa en reposo m_0 se desplaza a una velocidad de $v = \frac{4}{5}c$, choca con una partícula semejante que está en reposo y se forma una partícula compuesta. ¿Cuál es la masa en reposo de la partícula compuesta y cuál su velocidad?

a) Designamos con v a la velocidad de la partícula compuesta y con M' a su masa.

El principio de conservación de la energía nos dice:

Energía antes del choque: $E + m_0c^2$; Energía después del choque: $M'c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$E + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

El principio de la conservación de la cantidad de movimiento nos dice:

Antes del choque: $\frac{E}{c} + 0$; después del choque $M'v = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$\frac{E}{c} = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2)

$$\frac{E + m_0c^2}{c^2} = \frac{E}{cv} \Rightarrow v = \frac{Ec}{E + m_0c^2} = \frac{c}{1 + \frac{m_0c^2}{E}}$$

b) Designamos con M a la masa de la partícula compuesta y con u a su velocidad. Por ser un choque inelástico existe conservación de la cantidad de movimiento.

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = M'u = \frac{M_0u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3)$$

La conservación de la masa

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (4)$$

De (3) y (4)

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 = \frac{m_0 v}{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + 1 = \frac{v}{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{v}{u} \Rightarrow 1 + \sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}} = \frac{v}{u} \Rightarrow 1 + \frac{3}{5} = \frac{v}{u} \Rightarrow \frac{8}{5} = \frac{\frac{4}{5}c}{u} \Rightarrow u = \frac{c}{2}$$

Llevando el valor de u a la ecuación (4) resulta:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} + m_0 = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \Rightarrow \frac{5m_0}{3} + m_0 = \frac{2M_0}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{8m_0}{3} = \frac{2M_0}{\sqrt{3}} \Rightarrow M_0 = \frac{4m_0\sqrt{3}}{3}$$

14.-A las doce del mediodía un cohete espacial pasa frente a la Tierra con una velocidad $0,8c$. Los observadores de la nave y de la Tierra están de acuerdo en que efectivamente es mediodía.

a) A las 12h 30 min., según un reloj situado en la nave, ésta pasa por delante de una estación interplanetaria que se encuentra fija con relación a la Tierra y cuyos relojes señalan el tiempo de la Tierra. ¿Qué hora es en la estación?

b) ¿A qué distancia de la Tierra (en coordenadas terrestres) se encuentra la estación?

c) A las 12 h 30 min., hora de la nave, se establece comunicación con la Tierra desde la nave. ¿Cuándo (en tiempo de la Tierra) recibe ésta la señal?

d) La estación terrestre contesta inmediatamente. ¿Cuándo se recibirá la respuesta (hora de la nave)?

Designamos con S al sistema ligado a la Tierra y con S' el ligado a la nave, por tanto, S' se desplaza con velocidad $0,8c$ respecto de S.

a) Utilizamos la relación

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{30 \text{ min}}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 50 \text{ min.}$$

Δt es el intervalo temporal para el sistema S, luego la hora en la estación y en la Tierra es: 12h 50 min.

b) La posición de la estación espacial es la misma que ocupa la nave a las 12h 50 min. Dado que su velocidad es $0,8c$, la distancia vale:

$$d = 0,8c \cdot (50 \cdot 60 \text{ s}) = 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 3000 = 7,2 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

c) La señal viaja a la velocidad de la luz y ha de recorrer la distancia $7,2 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{7,2 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 2400 \text{ s} = 40 \text{ min}$$

Desde las 12 h 50 min han pasado 40 minutos más, por tanto la hora en la Tierra es. 1h 30 min.

d) Calculamos la distancia D, de la nave respecto de la Tierra cuando ésta emite la señal de respuesta hacia la nave.

$$\Delta x = 0,8c \cdot 2400 \text{ s} = 5,76 \cdot 10^{11} \text{ m} \Rightarrow D = 7,2 \cdot 10^{11} + 5,76 \cdot 10^{11} = 1,296 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

Calculamos la hora que marca en ese instante el reloj de la nave.

$$40 \text{ min} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-0,8^2}} = 24 \text{ min} \Rightarrow 12 \text{ h } 30 \text{ min} + 24 \text{ min} = 12 \text{ h } 54 \text{ min}$$

Designamos con t_f el intervalo de tiempo (en tiempo terrestre) que necesita la señal emitida por la Tierra en llegar a la nave y con d la distancia que recorre la nave en ese tiempo

$$d = 0,8c \cdot t_f$$

Cuando la señal alcance la nave, dicha señal habrá recorrido una distancia $D+d$.

$$D + d = c \cdot t_f \Rightarrow 1,296 \cdot 10^{12} + 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot t_f = 3 \cdot 10^8 t_f \Rightarrow t_f = 21600 \text{ s} = 6 \text{ horas}$$

El intervalo de 6 horas está medido con los relojes de la Tierra, con los de la nave son:

$$6 \text{ horas} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-0,8^2}} \Rightarrow \Delta t = 3,6 \text{ horas} = 3 \text{ horas} + 36 \text{ min}$$

El reloj de la nave marcará

$$12 \text{ h } 54 \text{ min} + 3 \text{ horas } 36 \text{ min} = 4 \text{ h } 30 \text{ min}$$

15.-Un radioisótopo del fósforo tiene un periodo de semidesintegración $T = 14,3$ días y se forma en un reactor nuclear a velocidad constante $q = 2,7 \cdot 10^9$ núcleos/s . Determinar cómo varía la actividad de la muestra con el tiempo.

En el instante inicial no existe nada del isótopo; la cantidad del mismo aumenta a medida que pasa el tiempo, ese aumento lo provoca la producción del reactor nuclear pero al mismo tiempo ocurre que parte del radioisótopo desaparece como consecuencia de que es radiactivo.

Designamos con N el número de núcleos de fósforo que existen en un tiempo t . La velocidad de crecimiento del número de átomos está dada por la ecuación siguiente:

$$\frac{dN}{dt} = q - \lambda N = q - \frac{T}{\ln 2}$$

El primer término de la ecuación da la velocidad de formación del radioisótopo y el segundo la velocidad de desaparición.

La ecuación diferencial anterior se resuelve multiplicándola por el término $e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t} \frac{dN}{dt} + \lambda N e^{\lambda t} = q e^{\lambda t} \Rightarrow \frac{d}{dt} (N e^{\lambda t}) = q e^{\lambda t}$$

La solución de la ecuación es:

$$N e^{\lambda t} = \frac{q}{\lambda} e^{\lambda t} + Cte$$

La constante de integración se halla teniendo en cuenta que para $t=0$, $N=0$

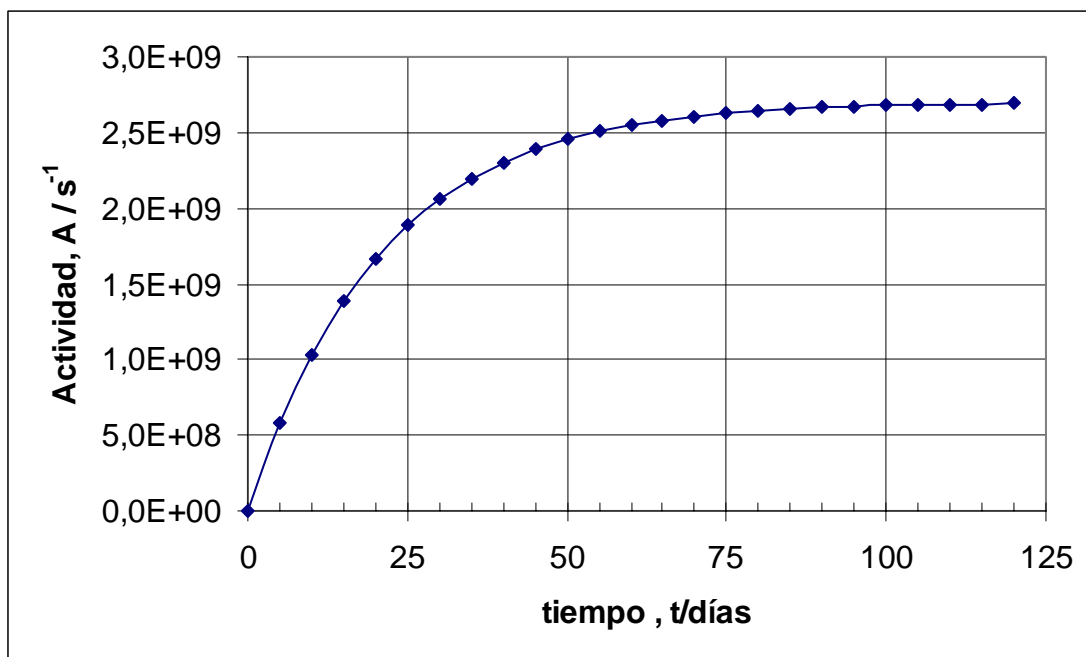
$$0 = \frac{q}{\lambda} + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{q}{\lambda}$$

$$N e^{\lambda t} = \frac{q}{\lambda} e^{\lambda t} - \frac{q}{\lambda} \Rightarrow N = \frac{q}{\lambda} - \frac{q}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

La actividad de la muestra es λN .

$$A = q(1 - e^{-\lambda t}) = q \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right)$$

La ecuación anterior nos dice que cuando $t=0$ la actividad es nula y cuando el tiempo es muy grande, infinito, se obtiene una actividad igual a q . Si representamos la actividad frente al tiempo obtendremos una curva cuya asíntota es q .



16.- El ^{232}U se desintegra emitiendo una partícula alfa y pasando a ^{228}Th . Calcular la energía cinética de la partícula alfa.

Datos. Masas en reposo: $^{232}\text{U} = 232,0372 \text{ u}$; $^{228}\text{Th} = 228,0288 \text{ u}$

Partícula alfa = $4,0026 \text{ u}$; $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Admitimos que el uranio se encuentra en reposo. La conservación de la energía nos dice.

$$E_{\text{U}} = E_{\text{Th}} + E_{\alpha} \quad (1)$$

El principio de conservación de la cantidad de movimiento: $m_{\text{Th}} v_{\text{Th}} = m_{\alpha} v_{\alpha}$ (2)

La energía cinética del torio, según la mecánica clásica, es: $T_{\text{Th}} = \frac{1}{2} m_{\text{Th}} v_{\text{Th}}^2$ (3)

Despejamos v_{Th} de la ecuación (2) y sustituimos en (3)

$$T_{\text{Th}} = \frac{1}{2} m_{\text{Th}} \frac{m_{\alpha}^2 v_{\alpha}^2}{m_{\text{Th}}^2} = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Th}}} = T_{\alpha} \cdot \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Th}}}$$

De (1) se deduce:

$$m_{\text{U}(0)} c^2 = m_{\text{Th}(0)} c^2 + T_{\text{Th}} + m_{\alpha(0)} c^2 + T_{\alpha} = m_{\text{Th}(0)} c^2 + T_{\alpha} \cdot \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Th}}} + m_{\alpha(0)} c^2 + T_{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 (m_{\text{U}(0)} - m_{\text{Th}(0)} - m_{\alpha(0)}) = T_{\alpha} \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Th}}} \right) \Rightarrow T_{\alpha} = \frac{c^2 (m_{\text{U}(0)} - m_{\text{Th}(0)} - m_{\alpha(0)})}{1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Th}}}}$$

$$T_{\alpha} = \frac{(3,0 \cdot 10^8)^2 (232,0372 - 228,0288 - 4,0026) \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{1 + \frac{4,0026}{228,0288}} = 8,52 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Expresando la energía en MeV.

$$T_{\alpha} = 8,52 \cdot 10^{-13} \text{ J} \cdot \frac{\text{eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \cdot \frac{\text{MeV}}{10^6 \text{ eV}} = 5,33 \text{ MeV}$$

El problema se ha resuelto utilizando conceptos relativistas combinados con expresiones de la mecánica clásica. Vamos ahora a resolverlo utilizando exclusivamente la teoría de la relatividad y ello nos permitirá comparar los resultados.

Partimos de la ecuación (1), y recurrimos a la ecuación relativista

$$E_{\text{Th}}^2 = p_{\text{Th}}^2 c^2 + m_{\text{Th}(0)}^2 c^4 ; E_{\alpha}^2 = p_{\alpha}^2 c^2 + m_{\alpha(0)}^2 c^4 \quad (4)$$

Como $|\mathbf{p}_{\text{Th}}| = |\mathbf{p}_{\alpha}|$, despejamos de (4) los valores del impulso y los igualamos

$$E_{\text{Th}}^2 - m_{\text{Th}(o)}^2 c^4 = E_{\alpha}^2 - m_{\alpha(o)}^2 c^4 \Rightarrow E_{\text{Th}} = \sqrt{E_{\alpha}^2 + c^4 (m_{\text{Th}(o)}^2 - m_{\alpha(o)}^2)}$$

A partir de la ecuación (1)

$$m_{\text{U}(o)} c^2 - E_{\alpha} = \sqrt{E_{\alpha}^2 + c^4 (m_{\text{Th}(o)}^2 - m_{\alpha(o)}^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\text{U}(o)}^2 c^4 + E_{\alpha}^2 - 2m_{\text{U}(o)} c^2 E_{\alpha} = E_{\alpha}^2 + c^4 (m_{\text{Th}(o)}^2 - m_{\alpha(o)}^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\alpha} = T_{\alpha} + m_{\alpha(o)} c^2 = \frac{c^2 (m_{\text{U}(o)}^2 - m_{\text{Th}(o)}^2 + m_{\alpha(o)}^2)}{2 m_{\text{U}(o)}} \Rightarrow$$

$$T_{\alpha} = \frac{c^2 (m_{\text{U}(o)}^2 - m_{\text{Th}(o)}^2 + m_{\alpha(o)}^2)}{2 m_{\text{U}(o)}} - m_{\alpha(o)} c^2$$

$$T_{\alpha} = \frac{(3,0 \cdot 10^8)^2 (232,0372^2 - 228,0288^2 + 4,0026^2) \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{2 \cdot 232,0372} - 4,0026 \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$$

$$T_{\alpha} = 8,52 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

El resultado es el mismo, lo que comprueba que cuando las velocidades no son próximas a la de la luz se pueden aplicar conceptos de la mecánica clásica.

17.-En un sistema de referencia K, una partícula posee una energía total de 5 GeV y una cantidad de movimiento 3 GeV/c, (es decir $pc = 3 \text{ GeV}$). a) ¿Cuál es la energía de esta partícula en un sistema K' en el cual la cantidad de movimiento es 2 GeV/c. b) ¿Cuál es su masa en reposo, expresada en uma? c) ¿Cuál es la velocidad relativa de los dos sistemas de referencia?

a) Utilizamos el invariante de relatividad

$$E^2 - p^2 c^2 = E'^2 - p'^2 c^2 \Rightarrow 5^2 - 3^2 = E'^2 - 2^2 \Rightarrow E' = \sqrt{20} \text{ GeV}$$

b) Refiriéndonos al sistema K podemos escribir

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; pc = \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{m_0 c^2}{E} = \frac{m_0 v c}{p} \Rightarrow v = \frac{pc}{E} = \frac{3}{5} c \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Conocida la velocidad de la partícula en el sistema K, sustituimos ese valor en la ecuación de la energía

$$5 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = \frac{m_0 c^3}{\sqrt{c^2 - \frac{9c^2}{25}}} = \frac{5 m_0 c^2}{4} \Rightarrow m_0 = \frac{10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4}{(3 \cdot 10^8)^2} = 7,11 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Dado que nos piden la masa en uma recordemos que un uma es la doceava parte de la masa de un átomo de ^{12}C .

$$1 \text{ uma} = \frac{1}{12} \cdot \text{masa}^{12}\text{C} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\frac{1 \text{ uma}}{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = \frac{x}{7,11 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \Rightarrow x = 4,3 \text{ uma}$$

c) Designamos con V la velocidad con que se desplaza el sistema K' respecto del K. Sabemos que la velocidad de la partícula en el sistema K es $3/5 c$. Calculamos ahora la velocidad de esa partícula medida en el sistema K'

$$v' = \frac{p' c}{E'} = \frac{2}{\sqrt{20}} c$$

Utilizando la ecuación relativista de la transformación de la velocidad de un sistema a otro, siendo V la velocidad con que el sistema K' se mueve respecto del K, y $-V$ es la velocidad con que el observador situado en K se mueve respecto de K'

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} \Rightarrow v' = \frac{(v - V)c^2}{c^2 - vV} \Rightarrow v'c^2 - v'vV = vc^2 - Vc^2 \Rightarrow V(c^2 - v'v) = c^2(v - v')$$

$$V = \frac{c^2(v - v')}{c^2 - v'v} = \frac{c^2\left(\frac{3}{5}c - \frac{2}{\sqrt{20}}c\right)}{c^2 - \frac{3}{5}c \cdot \frac{2}{\sqrt{20}}c} = \frac{c\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{\sqrt{20}}\right)}{1 - \frac{6}{22,4}} = 0,21c$$

18.- a) Calcular la velocidad de retroceso de un átomo de sodio después de absorber un fotón de longitud de onda $\lambda = 589 \text{ nm}$ b) Calcular la velocidad promedio de los átomos de sodio cuando se encuentran a una temperatura de $T = 300 \text{ K}$ c) Determinar el número de fotones que se requieren para que la velocidad de un átomo de sodio a la temperatura de 300 K disminuya a 10 cm/s .

Datos: Masa del átomo de sodio = 23 uma

Constante de Planck = $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

Unidad de masa atómica = $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Constante de Boltzmann = $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

a) Cuando el átomo de sodio absorbe un fotón se conserva la cantidad de movimiento antes y después del proceso

$$p_{\text{fotón}} = p_{\text{átomo}} \Rightarrow \frac{E}{c} = m v \Rightarrow \frac{h \nu}{c} = m v \Rightarrow v = \frac{h \nu}{m c} = \frac{h \frac{c}{\lambda}}{m c} = \frac{h}{m \lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{23 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 589 \cdot 10^{-9}} = 2,95 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

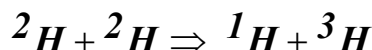
b)

$$\frac{3}{2} k T = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3 k T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{23 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}} = 570 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Un fotón es capaz de hacer variar la velocidad de un átomo de sodio en $2,95 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Para disminuir la velocidad de un átomo desde 570 m/s a 10 cm/s necesitamos x fotones

$$\frac{1 \text{ fotón}}{2,95 \cdot 10^{-2}} = \frac{x}{570 - 2,95 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow x = \frac{570 - 2,95 \cdot 10^{-2}}{2,95 \cdot 10^{-2}} = 1,93 \cdot 10^4$$

19.- Deuterones ${}^2\text{H}$, con energía E_2 y masa m_2 , se dirigen contra un blanco formado por deuterones en reposo, dando lugar a la siguiente reacción nuclear:



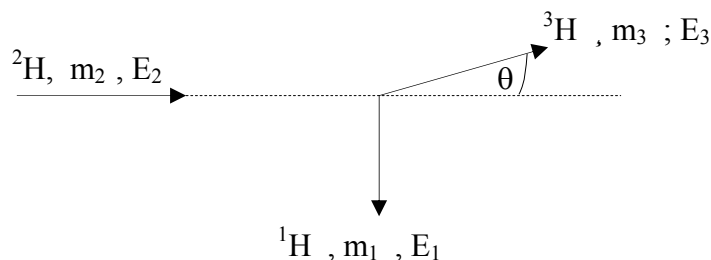
Los protones, de masa m_1 y energía E_1 , forman un ángulo de 90° con la dirección inicial de los deuterones. Calcular la masa m_3 del tritio a partir de los siguientes datos:

$$m_1 = 1,007825 \text{ uma} ; \frac{E_1}{c^2} = 1,011547 \text{ uma} ; \frac{E_2}{c^2} = 2,016043 \text{ uma} ;$$

$$m_2 = 2,014102 \text{ uma} ; \text{ velocidad de la luz } c = 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ uma} = 1,660538 \cdot 10^{-27} \text{ kg} ; 1 \text{ MeV} = 1,602176 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Designamos con θ el ángulo que forman los núcleos de tritio con la dirección original de los deuterones



Aplicamos los principios de conservación de la energía y del impulso

$$E_2 + m_2 c^2 = E_1 + E_3 \quad (1)$$

$$p_3 \cos \theta = p_1$$

$$p_3 \sin \theta = p_2$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce que $p_3^2 = p_1^2 + p_2^2$ (2)

Ahora vamos a buscar una relación entre la energía de una partícula y su impulso

$$E = mc^2 ; p = mv \Rightarrow v = \frac{pc^2}{E} ; p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \frac{pc^2}{E}}{\sqrt{1 - \frac{p^2 c^4}{E^2 c^2}}} = \frac{m_0 p c^2}{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}} \Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \Rightarrow p^2 = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2} \quad (3)$$

Aplicamos la ecuación (3) en (2) y luego aplicamos la ecuación (1):

$$E_3^2 - m_3^2 c^4 = E_1^2 - m_1^2 c^4 + E_2^2 - m_2^2 c^4 \Rightarrow m_3 = \sqrt{\frac{E_3^2 - E_1^2 + m_1^2 c^4 - E_2^2 + m_2^2 c^4}{c^4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_3 = \sqrt{\frac{(E_2 + m_2 c^2 - E_1)^2 - E_1^2 + m_1^2 c^4 - E_2^2 + m_2^2 c^4}{c^4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_3 = \sqrt{\frac{(E_2 + m_2 c^2 - E_1)^2 - (E_1^2 + E_2^2)}{c^4} + m_1^2 + m_2^2}$$

$$\frac{E_2}{c^2} - \frac{E_1}{c^2} = 2,016041 - 1,011547 = 1,004494 \Rightarrow$$

$$E_2 - E_1 = 1,004494 \text{ uma} \cdot 1,660538 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}} \cdot (2,99792 \cdot 10^8)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1,49912 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$m_2 c^2 = 2,014102 \text{ uma} \cdot 1,660538 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}} \cdot (2,99792 \cdot 10^8)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 3,00587 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$E_2 + m_2 c^2 - E_1 = 4,50499 \cdot 10^{-10} \text{ J} \Rightarrow (E_2 + m_2 c^2 - E_1)^2 = 2,02949 \cdot 10^{-19} \text{ J}^2$$

$$E_1 = 1,011547 \text{ uma} \cdot 1,660538 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}} \cdot (2,99792 \cdot 10^8)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1,50965 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$E_2 = 2,016043 \text{ uma} \cdot 1,660538 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}} \cdot (2,99792 \cdot 10^8)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 3,00877 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$E_1^2 + E_2^2 = (1,50965 \cdot 10^{-10})^2 + (3,00877 \cdot 10^{-10})^2 = 1,13317 \cdot 10^{-19} \text{ J}^2$$

$$\frac{(E_2 + m_2 c^2 - E_1)^2 - (E_1^2 + E_2^2)}{c^4} = \frac{(2,02949 - 1,13317) \cdot 10^{-19}}{(2,99792 \cdot 10^8)^4} = 1,10964 \cdot 10^{-53} \text{ kg}^2$$

$$m_1^2 = \left(1,007825 \text{ uma} \cdot 1,660538 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}} \right)^2 = 2,80071 \cdot 10^{-54} \text{ kg}^2$$

$$m_2^2 = \left(2,014102 \text{ uma} \cdot 1,660538 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}} \right)^2 = 1,11856 \cdot 10^{-53} \text{ kg}^2$$

$$m_1^2 + m_2^2 = 1,39863 \cdot 10^{-53} \text{ kg}^2$$

$$m_3 = \sqrt{1,10964 \cdot 10^{-53} + 1,39863 \cdot 10^{-53}} = 5,00826 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_3 = 5,00826 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \frac{\text{uma}}{1,660538 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 3,01605 \text{ uma}$$

20.- La luz emplea aproximadamente 10^5 años en recorrer de extremo a extremo nuestra galaxia. La mayor energía de las partículas conocidas es del orden de 10^{19} eV. ¿Cuánto tiempo tardará un protón con esa energía en recorrer la galaxia si el tiempo se mide en el sistema en reposo a) de la galaxia, b) de la partícula?

Datos. Masa del protón $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg ; $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J

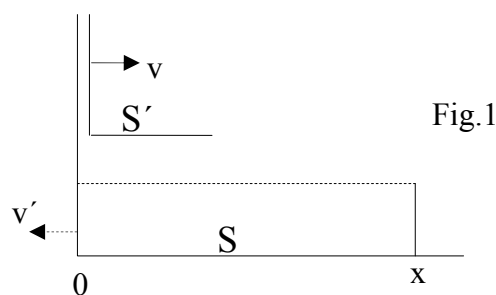
Según la teoría de la relatividad la energía cinética del protón es:

$$E_c = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \right) c^2 \Rightarrow \frac{E_c}{m_0 c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{E_c + m_0 c^2}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_0 c^2}{E_c + m_0 c^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{10^{-19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} + 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1,503 \cdot 10^{-10}}{1,6 + 1,503 \cdot 10^{-10}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 9,39 \cdot 10^{-11} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} \approx 1 \Rightarrow v \approx c$$

La velocidad del protón es muy próxima a la velocidad de la luz y por tanto desde el sistema S en el que nuestra galaxia está en reposo el tiempo medido en S es 10^5 años. En la figura 1, S es el sistema en el que nuestra galaxia está en reposo y S' es el sistema en el que el protón está en reposo.



Para S la distancia $ox = D$ es decir la distancia que la luz tarda 10^5 años en recorrerla y v es la velocidad que mide S del protón que es muy próxima a la velocidad de la luz. Desde S', el sistema S se mueve con velocidad v' , igual en módulo a v , pero al medir la distancia $ox = D$ el valor que encuentra, según la teoría de la relatividad es :

$$D' = D \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = D \cdot 9,39 \cdot 10^{-11}$$

El tiempo que se mide desde S' en recorrer la distancia D' es:

$$t' = \frac{D \cdot 9,39 \cdot 10^{-11}}{v'} = \frac{10^5 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 86400 \cdot 365 \cdot 9,39 \cdot 10^{-11}}{3 \cdot 10^8} = 296 \text{ s} \approx 5 \text{ minutos}$$

21.- Un átomo de masa M se encuentra en reposo, en él se produce un salto electrónico desde una órbita más externa a una más interna con un cambio de energía ΔE y se emite un fotón. A) Se pide determinar la energía de retroceso del átomo. B) Calcular la frecuencia del fotón emitido por un átomo de hidrógeno en un salto electrónico desde el nivel $n=5$ al nivel en que el átomo queda en su estado fundamental.

Datos. Masa aproximada del átomo de hidrógeno 1 una

Energía del átomo de hidrógeno $E = -13,6/n^2$ eV

Constante de Planck $= 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js

a) Designamos con E_f la energía del fotón y con E_a la del átomo. En el proceso se conserva la energía y la cantidad de movimiento.

$$\Delta E = E_a + E_f = \frac{1}{2} Mv^2 + E_f \quad (1)$$

$$p_a = p_f \Rightarrow Mv = \frac{E_f}{c} \Rightarrow E_f = Mvc \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\Delta E = \frac{1}{2} Mv^2 + Mvc \Rightarrow v^2 + 2vc - \frac{2\Delta E}{M} \Rightarrow v = \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 + 8 \frac{\Delta E}{M}}}{2} = -c \pm \sqrt{c^2 + 2 \frac{\Delta E}{M}}$$

La solución es tomar el signo positivo $v = -c + \sqrt{c^2 + 2 \frac{\Delta E}{M}}$ (3)

b) La energía del átomo de hidrógeno para el nivel $n=5$ es $E = -13,6/25 = -0,54$ eV

$$\Delta E = -0,54 - (-13,6) = 13,06 \text{ eV} = 13,06 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{\text{eV}} = 2,09 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$2 \frac{2,09 \cdot 10^{-18}}{1 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}} = 2,52 \cdot 10^9 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}; c^2 = 9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

De los valores se deduce que: $c^2 \gg 2 \frac{\Delta E}{M}$ y como consecuencia de ello $v \approx 0$. La energía ΔE se la lleva el fotón

$$\Delta E = h \nu \Rightarrow \nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2,09 \cdot 10^{-18}}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 3,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

22.-Una partícula de masa en reposo $m(o)_1$ se desplaza con una velocidad $+v_1$ constante paralela al eje X de un sistema de referencia S . En este mismo sistema se encuentra, enfrente de la partícula anterior, otra de masa en reposo $m(o)_2$ con velocidad nula. Aplicando la teoría de la relatividad

a) Calcular la cantidad de movimiento de ambas partículas en el sistema S .

b) Calcular la energía de cada partícula respecto del sistema S

c) Calcular la velocidad del centro de masa del sistema formado por las dos partículas respecto de S

d) Calcular las velocidades de las partículas respecto del centro de masas.

e) Calcular las cantidades de movimiento de ambas partículas respecto del sistema ligado al centro de masas.

Utilizar las relaciones siguientes: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$; $\frac{m(o)_2}{m(o)_1} = \mu$

a) La cantidad de movimiento en la teoría de la relatividad es: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, siendo m la masa en reposo de la partícula

$$\vec{p}_1 = \gamma m(o)_1 \vec{v}_1 ; \quad \vec{p}_2 = \gamma m(o)_2 \vec{v}_2 = 0$$

b) La ecuación de la energía según la teoría de la relatividad: $E = \gamma mc^2$. Para la

partícula 2 que esta en reposo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = 1$

$$E_1 = \gamma m(o)_1 c^2 ; \quad E_2 = \gamma m(o)_2 c^2 = m(o)_2 c^2$$

c) Recurrimos a la ecuación de la velocidad del centro de masas

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Las masas que figuran en la ecuación anterior son las masas medidas en el sistema S

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\gamma m(o)_1 \vec{v}_1 + \gamma m(o)_2 \vec{v}_2}{\gamma m(o)_1 + m(o)_2} = \frac{\gamma m(o)_1 \vec{v}_1}{\gamma m(o)_1 + m(o)_2} = \frac{\gamma \vec{v}_1}{\gamma + \frac{m(o)_2}{m(o)_1}} = \frac{\gamma \vec{v}_1}{\gamma + \mu}$$

d) La ecuación relativista que relaciona las velocidades medidas en dos sistemas es:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

Aplicando la ecuación anterior, tenemos:

$$(v_1)_{CM} = \frac{v_1 - v_{CM}}{1 - \frac{v_1 v_{CM}}{c^2}} = \frac{v_1 - \frac{\gamma v_1}{\gamma + \mu}}{1 - \frac{v_1 \frac{\gamma v_1}{\gamma + \mu}}{c^2}} = \frac{\frac{v_1 \mu}{\gamma + \mu}}{1 - \frac{v_1^2 \gamma}{c^2 (\gamma + \mu)}} = \frac{\frac{v_1 \mu}{\gamma + \mu}}{\frac{c^2 (\gamma + \mu) - v_1^2 \gamma}{c^2 (\gamma + \mu)}} = \frac{v_1 \mu c^2}{\gamma (c^2 - v_1^2) + \mu c^2}$$

Tenemos en cuenta que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \gamma \Rightarrow \frac{c^2}{c^2 - v_1^2} = \gamma^2 \Rightarrow c^2 - v_1^2 = \frac{c^2}{\gamma^2}$$

Sustituyendo en $(v_1)_{CM}$

$$(v_1)_{CM} = \frac{v_1 \mu c^2}{\gamma \frac{c^2}{\gamma^2} + \mu c^2} = \frac{v_1 \mu}{\frac{1}{\gamma} + \mu} = \frac{v_1 \mu \gamma}{1 + \mu \gamma}$$

Para la masa m_2 .

$$(v_2)_{CM} = \frac{v_2 - v_{CM}}{1 - \frac{v_2 v_{CM}}{c^2}} = -\frac{\gamma v_1}{\gamma + \mu}$$

e) Aplicando la ecuación relativista de la cantidad de movimiento en su aspecto modular

$$(p_1)_{CM} = \gamma m(o)_1 \cdot (v_1)_{CM} = \frac{m(o)_1}{\sqrt{1 - \frac{[(v_1)_{CM}]^2}{c^2}}} \cdot (v_1)_{CM} = \frac{c m(o)_1}{\sqrt{c^2 - \left[\frac{v_1 \mu \gamma}{1 + \mu \gamma} \right]^2}} \cdot \frac{v_1 \mu \gamma}{1 + \mu \gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_1)_{CM} = \frac{c m(o)_1 v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2 (1 + \mu \gamma)^2 - (v_1 \mu \gamma)^2}} = \frac{c m(o)_1 v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2 + c^2 \mu^2 \gamma^2 + 2 c^2 \mu \gamma - \mu^2 \gamma^2 v_1^2}}$$

$$= \frac{c m(o)_1 v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2 + \mu^2 \gamma^2 (c^2 - v_1^2) + 2 c^2 \mu \gamma}} = \frac{c m(o)_1 v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2 + \mu^2 \gamma^2 \frac{c^2}{\gamma^2} + 2 c^2 \mu \gamma}} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{p}_1)_{\text{CM}} = \frac{m(\mathbf{o})_1 v_1 \mu \gamma}{\sqrt{1 + \mu^2 + 2\mu \gamma}}$$

Dado que la cantidad de movimiento es un vector podemos escribir

$$(\bar{\mathbf{p}}_1)_{\text{CM}} = \frac{m(\mathbf{o})_1 \mu \gamma}{\sqrt{1 + \mu^2 + 2\mu \gamma}} \bar{\mathbf{v}}_1 \quad ; \quad (\bar{\mathbf{p}}_2)_{\text{CM}} = -\frac{m(\mathbf{o})_2 \gamma}{\sqrt{1 + \mu^2 + 2\mu \gamma}} \bar{\mathbf{v}}_1$$

Como $m(\mathbf{o})_2 = \mu m(\mathbf{o})_1$, resulta que: $(\bar{\mathbf{p}}_1)_{\text{CM}} + (\bar{\mathbf{p}}_2)_{\text{CM}} = 0$.