

**1.- Una plataforma circular de masa  $M = 360$  kg y radio  $R$  puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro. En el instante  $t=0$ , dos personas cada una de masa  $m = 60$  kg se encuentran situadas en sendos extremos de un diámetro de la plataforma. Ambas personas y la plataforma están en reposo en el instante  $t=0$ . Si ambas personas se desplazan en el mismo sentido que avanzan las agujas de un reloj con velocidad constante, cuando hayan recorrido una vuelta completa respecto de la plataforma, determinar el ángulo que han girado respecto de un observador inercial que está fuera de la plataforma.**

El sistema plataforma-personas constituye un sistema aislado, y ello conlleva que el momento angular se conserve. Si las personas se desplazan en el sentido de las agujas del reloj la plataforma debe girar en sentido contrario para que el momento angular total sea nulo, tal como lo era en el instante  $t=0$ .

Designamos con  $\omega$  la velocidad angular de rotación de la plataforma respecto del sistema inercial exterior y  $v$  la velocidad lineal de las personas respecto del mismo sistema. La velocidad  $v$  de las personas es igual a

$$v = \omega_p R$$

Siendo  $\omega_p$  la velocidad angular de las personas respecto del observador inercial.

La conservación del momento angular establece que

$$2m R \omega_p R = I\omega \Rightarrow 2mR^2 \frac{d\theta_p}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Si el ángulo girado por la plataforma es  $-\beta$ , las personas deben haber girado una vuelta más beta,  $\alpha=2\pi+\beta$

$$\int_0^{2\pi+\beta} d\theta_p = \int_0^{-\beta} \frac{M}{4m} d\theta_p \Rightarrow 2\pi + \beta = -\frac{M}{4m} \beta \Rightarrow 2\pi + \beta = -\frac{360}{4 * 60} \beta \Rightarrow 2\pi + \beta = -\frac{3}{2} \beta \Rightarrow$$

$$\beta = -\frac{4}{5} \pi = -\frac{4}{5} * 180^\circ = -144^\circ \Rightarrow \alpha = 2\pi - \frac{4}{5} \pi = \frac{6}{5} \pi = 216^\circ$$

2.- La densidad de un planeta, de radio  $R$ , depende de su distancia al centro del mismo según la ecuación

$$\rho = \rho_0 - kr$$

Siendo  $r$  la distancia desde el centro del planeta al punto considerado. El valor en la superficie del planeta es  $\frac{1}{4}$  del valor máximo de la densidad. ¿A qué distancia del centro del planeta la intensidad del campo gravitatorio es máxima?

La densidad máxima es  $\rho_0$  y ocurre cuando  $r = 0$ . Cuando  $r = R$  la densidad es un cuarto de  $\rho_0$

$$\frac{1}{4}\rho_0 = \rho_0 - kR \Rightarrow k = \frac{3\rho_0}{4R} \Rightarrow \rho = \rho_0 - \frac{3\rho_0}{4R}r$$

La intensidad del campo gravitatorio a una distancia  $r$  del centro del planeta vale

$$g_r = \frac{GM}{r^2}$$

Siendo  $M$  la masa comprendida en una esfera de radio  $r$ . Consideramos una capa esférica de radio  $l$  y espesor  $dl$ , siendo  $r > l$ , la masa de esa capa esférica es

$$dM = dV * \rho_l = 4\pi l^2 dl * \left( \rho_0 - \frac{3\rho_0}{4R}l \right)$$

Para hallar la masa  $M$  hemos de integrar la anterior expresión entre cero y  $r$

$$M = \int_0^r 4\pi l^2 \left( \rho_0 - \frac{3\rho_0}{4R}l \right) dl = 4\pi \rho_0 \frac{r^3}{3} - 3\pi \frac{\rho_0}{R} \frac{r^4}{4}$$

El campo gravitatorio es:

$$g_r = \frac{G \frac{4\pi \rho_0 r^3}{3} - \frac{3}{4} \pi \frac{\rho_0 r^4}{R}}{r^2} = G\pi \rho_0 \left( \frac{4}{3}r - \frac{3r^2}{4R} \right)$$

Para hallar la distancia  $r$  a la cual el valor de la intensidad del campo gravitatorio es un máximo, derivamos la expresión anterior con respecto a  $r$  e igualamos a cero

$$\frac{dg_r}{dr} = G\pi \rho_0 \left( \frac{4}{3} - \frac{3r}{2R} \right) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{3r}{2R} \Rightarrow r = \frac{8}{9}R$$

**3.- En un contenedor se mantiene la altura del agua constante  $H$ . Por un orificio situado a una altura  $H/3$  surge el agua, la cual alcanza una cierta distancia del contenedor. Se pide a que altura se debe practicar un orificio igual para que el agua alcance la misma distancia del contenedor.**

De acuerdo con el teorema de Torricelli la velocidad de salida del agua está dada por la ecuación

$$v = \sqrt{2gh}$$

Siendo  $h$  la altura desde el centro del orificio a la superficie libre del líquido. Si aplicamos esta ecuación al primer orificio tenemos

$$v = \sqrt{2g\left(H - \frac{1}{3}H\right)} = 2\sqrt{\frac{Hg}{3}}$$

Las ecuaciones del chorro de agua en el aire son:

$$x = vt = 2\sqrt{\frac{Hg}{3}}t \quad ; \quad y = \frac{1}{3}H - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando  $y=0$ , el alcance del chorro es:

$$0 = \frac{1}{3}H - \frac{1}{2}gt_a^2 \Rightarrow t_a = \sqrt{\frac{2H}{3g}} \Rightarrow x_a = 2\sqrt{\frac{Hg}{3}} \sqrt{\frac{2H}{3g}} = \frac{2\sqrt{2}H}{3}$$

Designamos con  $h$  la altura del otro agujero respecto del suelo y cómo ha de alcanzar la misma distancia, podemos escribir

$$\frac{2\sqrt{2}H}{3} = v't_a \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}H}{3} = \sqrt{2g(H-h)}t_a \quad ; \quad y = 0 = h - \frac{1}{2}g(t_a')^2$$

De ambas ecuaciones

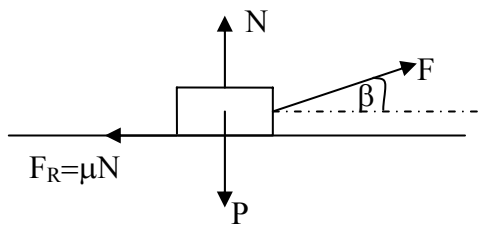
$$\frac{2\sqrt{2}H}{3} = \sqrt{2g(H-h)}\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \frac{8H^2}{9} = 2(H-h)2h \Rightarrow \frac{2H^2}{9} = Hh - h^2$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$h = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - \frac{8H^2}{9}}}{2} = \frac{H \pm \frac{H}{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{2}{3}H \quad y \quad h = \frac{1}{3}H$$

4.- Un bloque de peso  $P$  se encuentra en reposo sobre un suelo horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento estático  $\mu$ . Sobre el bloque se aplica una fuerza  $F$  que puede formar con la horizontal cualquier ángulo agudo  $\beta$ . Calcular la fuerza mínima que se precisa para iniciar el movimiento del bloque y el valor del ángulo.

El diagrama de fuerzas que actúa sobre el bloque es el siguiente:



$$P = N + F \sin \beta \rightarrow N = P - F \sin \beta$$

$$F \cos \beta = \mu N$$

$$F \cos \beta = \mu (P - F \sin \beta);$$

$$F(\cos \beta + \mu \sin \beta) = \mu P$$

$$F = \frac{\mu P}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \quad (1)$$

Para calcular el valor mínimo de  $F$  derivamos  $F$  con respecto a la variable  $\beta$  e igualamos a cero.

$$\frac{dF}{d\beta} = \mu P \left( \frac{-\sin \beta + \mu \cos \beta}{(\cos \beta + \mu \sin \beta)^2} \right) = 0 \Rightarrow -\sin \beta + \mu \cos \beta \Rightarrow \tan \beta = \mu$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \tan^2 \beta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

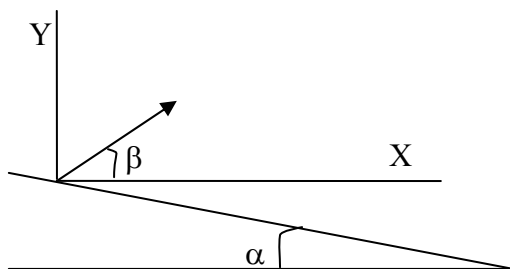
$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\tan^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}}} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$F_{\min} = \frac{\mu P}{\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} + \frac{\mu^2}{\sqrt{1 + \mu^2}}} = \frac{\mu P}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

5.- Desde un terreno plano que forma con la dirección horizontal un ángulo  $\alpha$ , se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba formando la dirección de la velocidad inicial un ángulo  $\beta$  con la horizontal. A) Calcular el valor de  $\beta$  para que el cuerpo permanezca en el aire el mayor tiempo posible b) Lo mismo para que el alcance sea el mayor posible.

a) Las ecuaciones del movimiento del cuerpo en el sistema de referencia que se indican



en la figura son:

$$x = v_0 (\cos \beta) t$$

$$y = v_0 (\sin \beta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Supongamos que cuando el tiempo  $t$  es el mayor posible el impacto del cuerpo con el suelo tiene de coordenadas  $x_a$  e  $-y_a$ , ambas coordenadas relacionadas por

$$-y_a = x_a \operatorname{tag} \alpha$$

$$x_a = v_0 (\cos \beta) t \quad ; \quad y_a = -x_a \operatorname{tag} \alpha = v_0 (\sin \beta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -v_0 (\cos \beta) t \operatorname{tag} \alpha = v_0 (\sin \beta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0}{g} (\sin \beta + \operatorname{tag} \alpha \cos \beta)$$

El tiempo mayor posible ha de cumplir que su derivada con respecto a  $\beta$  sea cero

$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{2v_0}{g} (\cos \beta - \operatorname{tag} \alpha \sin \beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag} \alpha * \operatorname{tag} \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag} \beta = \frac{1}{\operatorname{tag} \alpha}$$

Los ángulos complementarios tienen el seno de uno igual al coseno del otro y viceversa, por tanto, sus tangentes cumplen la relación anterior, lo que quiere decir

$$\beta + \alpha = 90^\circ$$

b) Para buscar la condición de alcance máximo la forma de operar es semejante a la anterior

$$-y_m = x_m \operatorname{tag} \alpha$$

$$x_m = v_o (\cos \beta) t \quad ; \quad y_m = -x_m \operatorname{tag} \alpha = v_o (\operatorname{sen} \beta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x_m \operatorname{tag} \alpha = v_o (\operatorname{sen} \beta) \frac{x_m}{v_o \cos \beta} - \frac{1}{2} g \left( \frac{x_m}{v_o \cos \beta} \right)^2 \quad \Rightarrow -\operatorname{tag} \alpha = \operatorname{tag} \beta - \frac{1}{2} g \frac{x_m}{v_o^2 \cos^2 \beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_m}{v_o^2 \cos^2 \beta} = \frac{2}{g} (\operatorname{tag} \alpha + \operatorname{tag} \beta) \quad \Rightarrow \quad x_m = \frac{2v_o^2}{g} (\operatorname{tag} \alpha \cos^2 \beta + \operatorname{tag} \beta \cos^2 \beta) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_m = \frac{2v_o^2}{g} (\operatorname{tag} \alpha \cos^2 \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \beta)$$

El alcance mayor posible ha de cumplir que su derivada con respecto a  $\beta$  sea cero

$$\frac{dx_m}{d\beta} = \frac{2v_o^2}{g} (-\operatorname{tag} \alpha * 2 \cos \beta \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = \operatorname{tag} \alpha * 2 \cos \beta \operatorname{sen} \beta \quad \Rightarrow \quad -\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = \operatorname{tag} \alpha * \operatorname{sen} 2\beta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\operatorname{sen}^2 \beta + (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) = \operatorname{tag} \alpha * \operatorname{sen} 2\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen} 2\beta} = \operatorname{tag} \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos 2\beta}{\operatorname{sen} 2\beta} = \operatorname{tag} \alpha$$

$$\operatorname{tag} 2\beta = \frac{1}{\operatorname{tag} \alpha} \quad \Rightarrow \quad 2\beta + \alpha = 90^\circ$$

**6.- La fotografía del espectro del Sol para la línea amarilla ( $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ) se encuentra desplazada  $0,08 \text{ \AA}$  según el borde del Sol del cual provenga la luz. Calcular la velocidad lineal de los puntos del ecuador del Sol debido a su movimiento de rotación**

Consideramos a la Tierra fija, donde se recibe la fotografía, y el Sol rotando. La luz de un borde del Ecuador se acerca a la Tierra y la del borde opuesto se aleja. Según el efecto Doppler, las frecuencias registradas son respectivamente:

$$v' = \frac{v}{1 - \frac{v_F}{c}} \Rightarrow \frac{c}{\lambda'} = \frac{cv}{c - v_F} \quad ; \quad v'' = \frac{v}{1 + \frac{v_F}{c}} \Rightarrow \frac{c}{\lambda''} = \frac{cv}{c + v_F}$$

Restando los inversos de las ecuaciones anteriores

$$\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''} = v \left( \frac{1}{c - v_F} - \frac{1}{c + v_F} \right) \Rightarrow \frac{\lambda'' - \lambda'}{\lambda' \lambda''} = \frac{c}{\lambda} \left( \frac{2v_F}{c^2 - v_F^2} \right)$$

Hacemos  $\lambda'' - \lambda' = \Delta\lambda$  y  $c^2 - v_F^2 \approx c^2$

$$v_F = \frac{c \Delta\lambda}{2 \lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 * 0,08 \cdot 10^{-10}}{2 * 5890 \cdot 10^{-10}} = 2,0 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**7.- Un recipiente de volumen  $V$  se conecta a una bomba de pistón cuya cámara tiene un volumen  $V'$ . La presión inicial del recipiente es  $P$ . Se pide el número de emboladas que hay que efectuar para que la presión del recipiente se reduzca a  $P_f$ . La variación de temperatura se considera despreciable.**

Cuando la bomba aspira el volumen inicial  $V$  del recipiente aumenta a  $V+V'$  y por consiguiente la presión disminuye a  $p_1$ . Después de la aspiración las válvulas funcionan para que el aire contenido en la cámara de la bomba salga al exterior.

La presión en el recipiente es:

$$p_1 (V+V') = PV \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{PV}{V+V'}$$

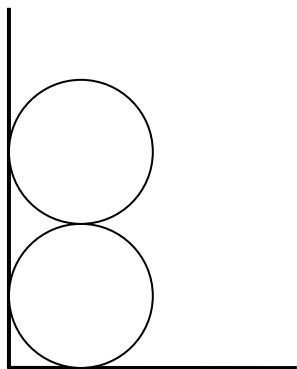
Si ahora se efectúa una segunda embolada, la presión disminuye a  $p_2$ .

$$p_2(V+V') = p_1V \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{p_1V}{V+V'} = P \left( \frac{V}{V+V'} \right)^2$$

Al cabo de  $n$  emboladas

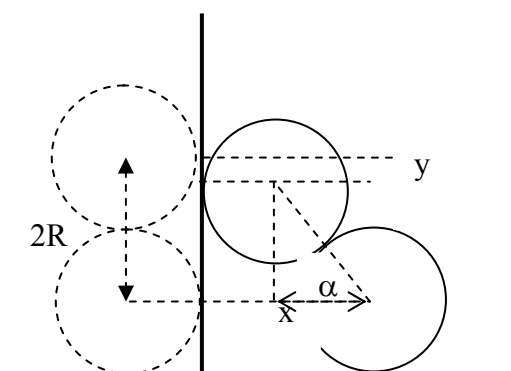
$$P_f = P \left( \frac{V}{V+V'} \right)^n \quad \Rightarrow \quad \log \frac{P_f}{P} = n \log \left( \frac{V}{V+V'} \right) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log \frac{P_f}{P}}{\log \left( \frac{V}{V+V'} \right)}$$

8.-Dos cilindros se encuentran inicialmente situados como indica la figura.



*De forma suave, se desplaza el cilindro inferior hacia la derecha y así comienza a deslizar por la acción del cilindro superior que actúa en contacto con el inferior y con la pared vertical. Se admite que no existe ningún rozamiento entre las superficies que estén en contacto. Se pide la velocidad final que alcanza el cilindro inferior*

A medida que desliza el cilindro inferior hacia la derecha, el superior, mientras esté en contacto con él, sigue empujándolo y haciendo que su velocidad aumente, por tanto, ésta adquirirá un valor máximo y a partir de ese momento los cilindros dejan de estar en contacto, ya que si siguiesen en contacto la velocidad aumentaría aún más y eso no es posible porque hemos llegado al máximo valor de ella.



En la figura de la izquierda se representan los cilindros en la situación inicial y cuando ha transcurrido un cierto tiempo.  $R$  representa el radio de cada cilindro, inicialmente la distancia entre sus centros de masa es  $2R$ . Al cabo de un cierto tiempo, el cilindro superior ha descendido una altura  $y$  y mientras que el inferior ha sufrido un desplazamiento horizontal  $x$ . Se ha dibujado un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es  $2R$ , el cateto contiguo  $x$  y el opuesto  $2R-y$

En este momento el cilindro superior posee una velocidad  $v_y$  dirigida hacia abajo y el cilindro inferior una velocidad  $v_x$  dirigida hacia la derecha. Dado que no existen rozamientos, la energía cinética que han adquirido los cilindros proviene de la pérdida de energía potencial del cilindro superior.

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 = mgy \Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = 2gy \quad (1)$$

Volviendo al triángulo de la figura:

$$\text{sen}\alpha = \frac{2R-y}{2R} \Rightarrow y = 2R(1 - \text{sen}\alpha) \quad ; \quad \text{cos}\alpha = \frac{x}{2R} \Rightarrow x = 2R\text{cos}\alpha$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} * \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(2R\cos\alpha)}{d\alpha} * \frac{d\alpha}{dt} = -2R\sin\alpha * \frac{d\alpha}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\alpha} * \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(2R[1-\sin\alpha])}{d\alpha} * \frac{d\alpha}{dt} = 2R\cos\alpha * \frac{d\alpha}{dt}$$

Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones resulta:

$$v_x \cos\alpha = -v_y \sin\alpha$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$v_x^2 + v_x^2 \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2gy \Rightarrow v_x = \frac{2gy}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}} = \sqrt{2gy} \sin\alpha \Rightarrow v_x = \sqrt{2g(2R[1-\sin\alpha])} \sin\alpha$$

Para calcular el valor máximo de  $v_x$  respecto del ángulo  $\alpha$ , derivamos e igualamos a cero

$$\frac{dv_x}{d\alpha} = \sqrt{4gR(1-\sin\alpha)} * \cos\alpha + \sin\alpha \frac{-4gR \cos\alpha}{2\sqrt{4gR(1-\sin\alpha)}} = 0 \Rightarrow$$

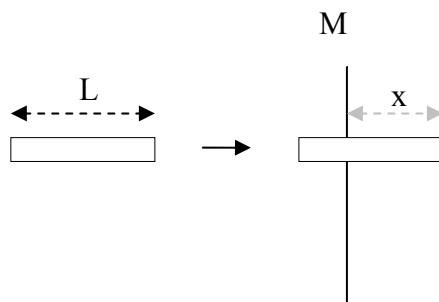
$$\Rightarrow \frac{8gR(1-\sin\alpha) * \cos\alpha - 4gR \sin\alpha \cos\alpha}{2\sqrt{4gR(1-\sin\alpha)}} = 0 \Rightarrow 2(1-\sin\alpha)\cos\alpha = \sin\alpha \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos\alpha - 2\sin\alpha \cos\alpha = \sin\alpha \cos\alpha \Rightarrow 2\cos\alpha = 3\sin\alpha \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{3}$$

$$v_x = \sqrt{4gR\left(1 - \frac{2}{3}\right)} * \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{4gR}{3}}$$

9.- Una varilla uniforme de longitud  $L$  desliza con velocidad  $v$  por un suelo horizontal sin rozamiento. La varilla encuentra que a partir de una línea  $M$  el suelo presenta un coeficiente de rozamiento  $\mu$  constante.

La varilla penetra en ese suelo y se detiene al cabo de un cierto tiempo, quedando una parte de ella en el suelo sin rozamiento, tal como indica la figura inferior.



**Determinar el tiempo que emplea la varilla desde que llega a la línea  $M$  hasta que se para.**

Cuando la varilla desliza por el suelo sin rozamiento, las fuerzas que actúan son el peso en dirección vertical al suelo y hacia abajo y la fuerza normal con que el suelo empuja a la varilla, vertical y hacia arriba, la suma de ambas fuerzas es nula y la varilla mantiene su velocidad constante.

Cuando penetra en el suelo con rozamiento aparece una fuerza horizontal de rozamiento en sentido contrario a la velocidad. Esta fuerza de rozamiento vale.

$$F_R = \mu N$$

Siendo  $\mu$  el coeficiente de rozamiento y  $N$  la fuerza de reacción del suelo con rozamiento sobre la varilla.  $N$  aumenta a medida que la varilla penetra en el suelo con rozamiento. Si la varilla ha penetrado una distancia  $x$  en el suelo con rozamiento

$$N = \frac{mg}{L} x \Rightarrow F_R = \frac{\mu mg}{L} x \Rightarrow F_R = kx$$

En consecuencia, la fuerza que frena a la varilla es directamente proporcional a la longitud de varilla que ha penetrado en el suelo con rozamiento. Esta situación es la misma que cuando un móvil efectúa un movimiento armónico y se desplaza desde la posición de equilibrio hacia la máxima elongación y cuando alcanza ésta, su velocidad se anula. Aquí la varilla al llegar a la línea  $M$  lleva una velocidad  $v$ , al penetrar aparece la fuerza de rozamiento y se para hasta frenarse, por tanto, equivale a un tiempo de un cuarto de periodo en el movimiento vibratorio armónico.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{\mu mg}{L}}} \Rightarrow t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{\mu g}}$$

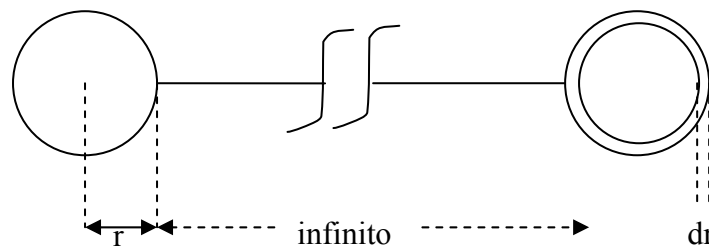
10.- De acuerdo con la teoría de la relatividad un cuerpo formado por la adición de masas,  $m_1, m_2 \dots m_n$ , su masa es inferior respecto a la suma en una cantidad

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

donde  $\Delta E$  es la energía de enlace (energía que se ha de suministrar al cuerpo para separar las masas individuales que lo componen) y  $c$  es la velocidad de la luz.

Calcular  $\Delta m$  para la Tierra, admitiendo que  $\Delta E$  solamente corresponde a la energía gravitacional. Admitir que la Tierra es una esfera de densidad constante.

Para realizar el cálculo vamos a suponer que desde el infinito traemos capas esféricas de espesor  $dr$ , las cuales las vamos apilando, hasta formar una esfera cuyo radio final es el de la Tierra. En un determinado momento la esfera que ya hemos formado tiene un radio  $r$  y sobre ella y desde el infinito traemos una capa esférica de radio  $r$  y espesor  $dr$ .



La energía necesaria para realizar el proceso de sumar la capa esférica a la esfera  $r$ , está dada por

$$dE = dm \cdot (\text{Potencial gravitatorio de partida menos potencial gravitatorio de llegada})$$

siendo,  $dm$  la masa transportada, esto es, la masa de la capa esférica.

El potencial gravitatorio en el infinito es cero y en la superficie de la esfera de radio  $r$

$$V = -\frac{Gm}{r}$$

Siendo  $m$  la masa de la esfera de radio  $r$

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr \quad ; \quad m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$dE = 4\pi r^2 \rho dr \left( 0 + \frac{G \frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{r} \right) = G \frac{(4\pi \rho)^2 r^4}{3} dr$$

Para construir la esfera de radio igual al de la Tierra, hemos de sumar los trabajos anteriores desde que el radio inicial es cero hasta que alcanza el valor R

$$E = \int_0^R G \frac{(4\pi \rho)^2 r^4}{3} dr = G \frac{(4\pi \rho)^2 R^5}{15} \quad (1)$$

La energía anterior sería la que necesitaríamos para destruir la esfera terrestre llevando capas de espesor dr al infinito.

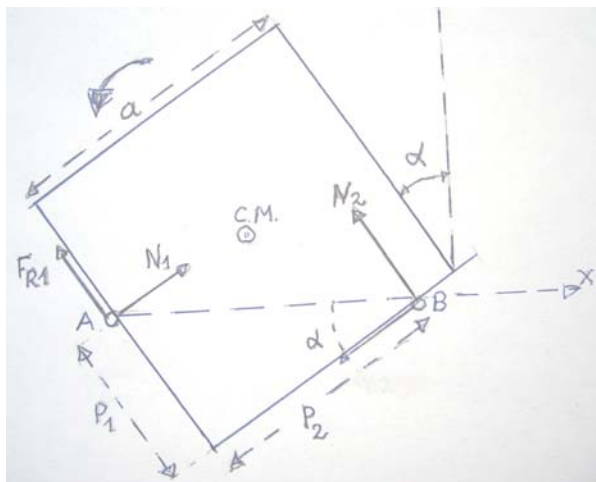
$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} \Rightarrow \rho = \frac{3g}{4\pi G}$$

Sustituyendo en (1)

$$E = \frac{(4\pi)^2 G * \left(\frac{3g}{4\pi G}\right)^2 R^5}{15} = \frac{3g^2 R^3}{5 G} \Rightarrow$$

$$\Delta m = \frac{3g^2 R^3}{5Gc^2} = \frac{3 * 9,8^2 * (6370 \cdot 10^3)^3}{5 * 6,67 \cdot 10^{-11} * (3 \cdot 10^8)^2} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ kg}$$

**11.- Un cubo de arista  $a$ , se apoya sobre dos varillas  $A$  y  $B$  dispuestas horizontalmente con una distancia entre ellas igual a la arista  $a$  del cubo. Si el coeficiente de rozamiento es  $0,2$ , para qué valores del ángulo  $\alpha$  el cubo puede mantenerse en equilibrio.**



La posición de equilibrio más estable del cubo es cuando  $\alpha = 45^\circ$ . En la figura superior el cubo aparece desplazado y si no hubiese rozamiento tendería a girar en el sentido de la flecha, esto es, en sentido contrario a las agujas del reloj, hasta alcanzar la posición de  $45^\circ$ . En esa situación se han dibujado las fuerzas que actúan sobre el cubo.

Si desplazásemos el cubo hacia la derecha las fuerzas de rozamiento tendrían sentido contrario a las dibujadas en la figura y el cubo de no existir rozamiento se desplazaría en el sentido de las agujas del reloj.

Si el cubo está en equilibrio se cumple que la suma de las fuerzas sobre el eje X es nula y el momento de las fuerzas respecto del centro de masas, C.M., también es nulo.

$$\begin{aligned}
 -F_{R1} \operatorname{sen} \alpha + N_1 \operatorname{cos} \alpha - N_2 \operatorname{sen} \alpha - F_{R2} \operatorname{cos} \alpha &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow N_1 \operatorname{cos} \alpha &= F_{R1} \operatorname{sen} \alpha + N_2 \operatorname{sen} \alpha + F_{R2} \operatorname{cos} \alpha \quad (1)
 \end{aligned}$$

Los momentos de las fuerzas dirigidos hacia dentro del papel se consideran positivos y hacia fuera negativos.

$$\begin{aligned}
 F_{R1} \frac{a}{2} - N_1 \left( \frac{a}{2} - p_1 \right) + F_{R2} \frac{a}{2} - N_2 \left( p_2 - \frac{a}{2} \right) &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow F_{R1} \frac{a}{2} - N_1 \left( \frac{a}{2} - a \operatorname{sen} \alpha \right) + F_{R2} \frac{a}{2} - N_2 \left( p_2 - \frac{a}{2} \right) &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow F_{R1} + F_{R2} &= N_1 (1 - 2 \operatorname{sen} \alpha) + N_2 (2 \operatorname{cos} \alpha - 1) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Los valores de las fuerzas de rozamiento son:  $F_{R1} \leq \mu N_1$  ;  $F_{R2} \leq \mu N_2$  (3)

De la ecuación (1) se deduce:

$$N_1 = F_{R1} \operatorname{tag} \alpha + N_2 \operatorname{tag} \alpha + F_{R2} \Rightarrow F_{R1} \operatorname{tag} \alpha + F_{R2} = N_1 - N_2 \operatorname{tag} \alpha \quad (4)$$

A partir de las ecuaciones (3)

$$F_{R1} \operatorname{tag} \alpha \leq \mu N_1 \operatorname{tag} \alpha \quad ; \quad F_{R2} \leq \mu N_2 \quad \Rightarrow \quad F_{R1} \operatorname{tag} \alpha + F_{R2} \leq \mu(N_1 \operatorname{tag} \alpha + N_2) \quad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5)

$$\mu(N_1 \operatorname{tag} \alpha + N_2) \geq N_1 - N_2 \operatorname{tag} \alpha \quad \Rightarrow \quad \mu N_1 \operatorname{tag} \alpha \geq N_1 - N_2 \operatorname{tag} \alpha - \mu N_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mu N_1 \operatorname{tag} \alpha - N_1 \geq -N_2 (\operatorname{tag} \alpha + \mu) \Rightarrow N_1 (1 - \mu \operatorname{tag} \alpha) \leq N_2 (\operatorname{tag} \alpha + \mu) \Rightarrow$$

$$1 - \mu \operatorname{tag} \alpha \leq \frac{N_2}{N_1} (\operatorname{tag} \alpha + \mu) \Rightarrow \frac{1 - \mu \operatorname{tag} \alpha}{\operatorname{tag} \alpha + \mu} \leq \frac{N_2}{N_1} \quad (6)$$

De las ecuaciones (3) :  $F_{R1} + F_{R2} \leq \mu(N_1 + N_2)$  (7)

De las ecuaciones (7) y (2)

$$\mu(N_1 + N_2) \geq N_1 (1 - 2 \operatorname{sen} \alpha) + N_2 (2 \operatorname{cos} \alpha - 1) \Rightarrow$$

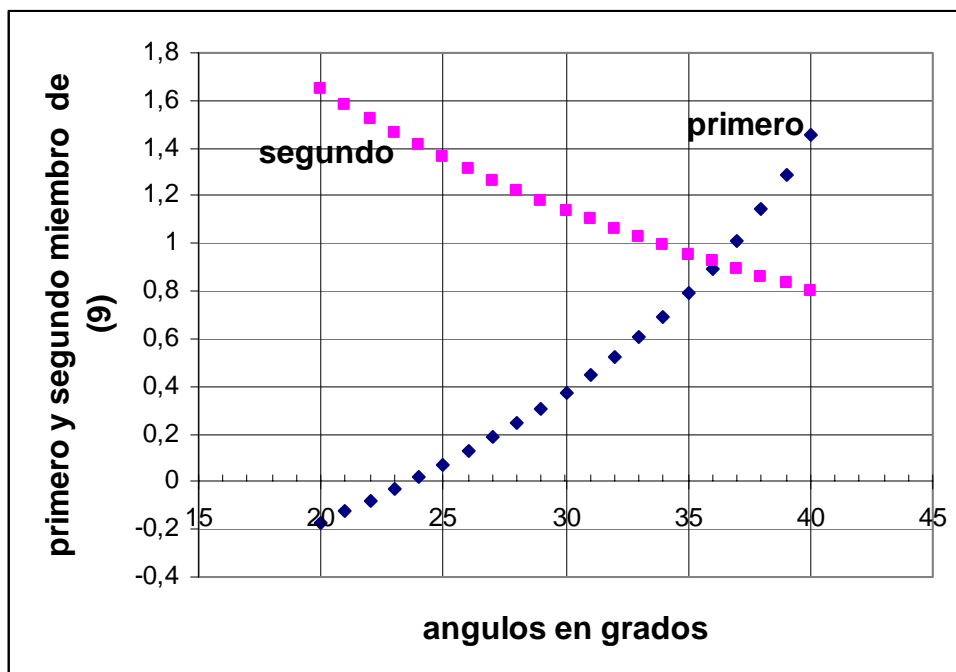
$$\Rightarrow \mu N_1 - N_1 (1 - 2 \operatorname{sen} \alpha) \geq N_2 (2 \operatorname{cos} \alpha - 1) - \mu N_2 \Rightarrow \mu - 1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \geq \frac{N_2}{N_1} (2 \operatorname{cos} \alpha - 1 - \mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu - 1 + 2 \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{cos} \alpha - 1 - \mu} \geq \frac{N_2}{N_1} \quad (8)$$

Comparando las ecuaciones (8) y (6), se deduce que

$$\frac{\mu - 1 + 2 \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{cos} \alpha - 1 - \mu} \geq \frac{1 - \mu \operatorname{tag} \alpha}{\mu + \operatorname{tag} \alpha} \quad (9)$$

La inecuación (9) se resuelve mediante la hoja de cálculo en forma gráfica.

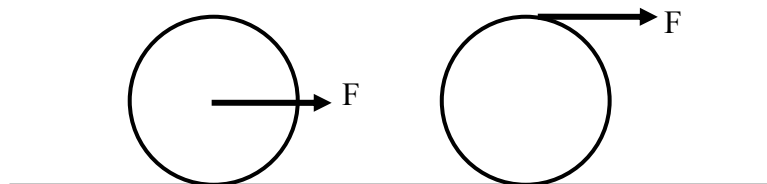


Aproximadamente a unos 36° se igualan los valores del primer miembro con el segundo y a partir de ahí el primero es mayor que el segundo tal como exige el problema. Si se precisa algo más el cálculo resulta que

ángulo	Primer miembro	Segundo miembro
36,1	0,9075	0,9198
36,2	0,9188	0,9166

Entre 36,2° y 45° hay equilibrio, en el intervalo  $45 - 36,2 = 8,8^\circ$  y si el cubo se sitúa desplazado para que gire en sentido de las agujas del reloj hay equilibrio entre 45° y 53,8°. En total hay equilibrio desde 36,2° a 53,8°.

12.-Dos cilindros idénticos, de radio  $R$ , están en reposo sobre un suelo horizontal. A uno de ellos se le aplica una fuerza  $F$  en su centro y al otro en la periferia, tal como indica la figura inferior



El coeficiente de rozamiento de los cilindros con el plano es el mismo  $\mu$ . Se pide calcular la fuerza máxima  $F$  que puede aplicarse a cada cilindro sin que se produzca deslizamiento y las aceleraciones de sus centros de masas.

Sobre el primer cilindro actúan las fuerzas que se indican en la figura 1

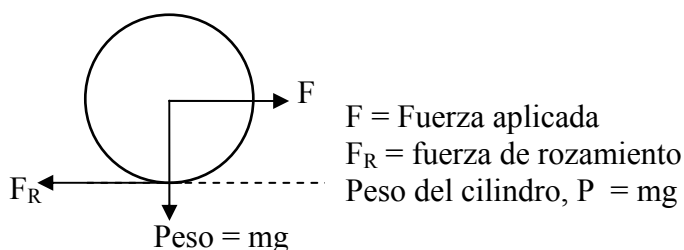


Fig.1

Las ecuaciones del movimiento del cilindro para la traslación y rotación son:

$$\left. \begin{aligned} F - F_R &= ma \\ F_R * R &= I\alpha \\ a_{CM} &= \alpha R \end{aligned} \right\}$$

La última ecuación se cumple siempre que el cilindro no deslice. Si se aumenta el valor de  $F$  la aceleración del centro de masas aumenta y también la aceleración angular por lo que  $F_R$  debe aumentar. Ahora bien esta fuerza de rozamiento no puede aumentar indefinidamente sino que alcanza un valor máximo  $F_R = \mu mg$  que se corresponde con un valor máximo de  $F = F_{max}$ , y el cilindro rueda sin deslizarse. Si  $F$  supera ese valor máximo entonces se produce rodadura y deslizamiento.

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores resulta:

$$F_{\max} - \mu mg = ma$$

$$\mu mg * R = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu mg * R = \frac{1}{2} mR^2 * \frac{a_{\text{CM}}}{R} \quad \Rightarrow \quad a_{\text{CM}} = 2\mu g$$

$$a_{\text{CM}} = \alpha R$$

Sustituyendo la aceleración hallada en la primera ecuación

$$F_{\max} = 2m\mu g + \mu mg = 3\mu mg$$

Para el segundo cilindro las fuerzas se indican en la figura 2.

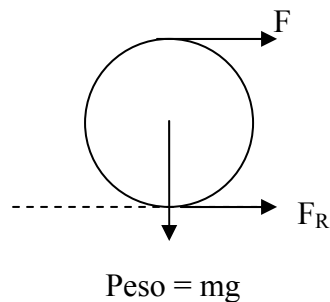


Fig. 2

Aquí la fuerza de rozamiento actúa en el sentido del movimiento del centro de masas. Veamos el porqué. F y  $F_R$  actúan creando una aceleración hacia la derecha de valor

$$F + F_R = ma$$

El momento de la fuerza F tiene sentido contrario al de la fuerza de rozamiento, El momento de F crea una aceleración angular para que el cilindro ruede hacia delante, mientras que el momento de  $F_R$  se opone a ello.

$$(F - F_R) * R = I\alpha$$

Si la fuerza  $F_R$  actuase en sentido contrario a como lo hace estaríamos ante una situación paradójica, los dos momentos de ambas fuerzas tienden a hacer rodar hacia delante el cilindro, pero la  $F_R$  se opone a las traslación del centro de masas.

Cuando la fuerza de rozamiento alcance su valor máximo  $F_R = \mu mg$ , la fuerza aplicada F es la máxima.

$$F_{\max} + \mu mg = ma$$

$$F_{\max} - \mu mg = \frac{I\alpha}{R} = \frac{\frac{1}{2} mR^2 * \frac{a}{R}}{R} = \frac{1}{2} ma$$

Restando las ecuaciones anteriores

$$2\mu mg = \frac{1}{2}ma \Rightarrow a = 4\mu g$$

y

$$F_{\max} = ma - \mu mg = 3\mu mg$$

Si la fuerza de rozamiento actuase como en el caso 1, las ecuaciones serían

$$F - F_R = ma$$

$$(F + F_R) * R = I\alpha$$

$$a_{CM} = \alpha R$$

Operando con estas tres ecuaciones

$$F_{\max} - \mu mg = ma$$

$$F_{\max} + \mu mg = \frac{\frac{1}{2}mR^2 * \frac{a}{R}}{R} = \frac{1}{2}ma$$

De ambas ecuaciones

$$2\mu mg = -\frac{1}{2}a \Rightarrow a = -4\mu g$$

$$F_{\max} = -3\mu mg$$

Según la primera ecuación el cilindro rodaría en sentido contrario a la fuerza aplicada. Lo lógico es admitir que la fuerza de rozamiento actúa como hemos supuesto en la figura 2.

13.-Dos abalorios iguales de masa  $m$  y carga  $q$  pueden deslizarse sin rozamiento por dos barras no conductoras. Ambas barras están en el mismo plano vertical formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Determinar a qué altura por encima de la horizontal pueden elevarse ambos abalorios. Inicialmente se encuentran a una distancia  $L$  entre sí y a una distancia  $l$  de los extremos de las barras, tal como indica la figura 1.

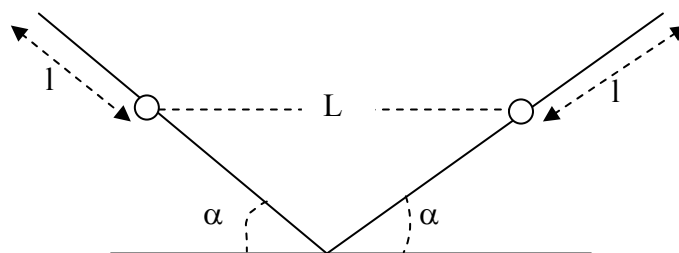


Fig.1

a) Suponemos que los abalorios se desplazan hacia arriba una distancia que es inferior a  $l$ , o en otras palabras, que no abandonan las barras.

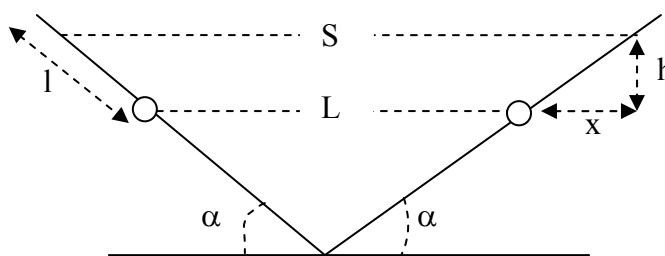


Fig.2

En el equilibrio reencuentran a una distancia  $S$  y se han elevado una altura  $h$  sobre la horizontal. Los abalorios han ganado energía potencial gravitatoria respecto de la posición inicial y esta ganancia es debida a la pérdida de energía potencial eléctrica de las cargas

$$2mgh = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{S} \right)$$

De la figura 2 se deduce:

$$S = L + 2x = L + \frac{2h}{\text{tag } \alpha}$$

$$2mgh = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L + \frac{2h}{\tan\alpha}} \right) = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{L} - \frac{\tan\alpha}{L\tan\alpha + 2h} \right) = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{2h}{L\tan\alpha + 2h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\tan\alpha + 2h = \frac{q^2}{4\pi mg\epsilon_0} \Rightarrow h = \frac{q^2}{8\pi mg\epsilon_0} - \frac{L}{2}\tan\alpha \quad (1)$$

Veamos cuál es la condición para que los abalorios no se salgan de las barras. El límite viene determinado porque los abalorios recorran sobre la barra la longitud  $l$ . En este caso  $h$  es igual a  $l \operatorname{sen} \alpha$

$$l \operatorname{sen} \alpha = \frac{q^2}{8\pi mg\epsilon_0} - \frac{L}{2}\tan\alpha \Rightarrow q \leq \sqrt{8\pi mg\epsilon_0 \left( l \operatorname{sen} \alpha + \frac{L}{2}\tan\alpha \right)}$$

Si  $q$  es mayor que la raíz cuadrada de la expresión anterior los abalorios abandonan las barras con una velocidad  $v$ , y una vez fuera de las barras describirán un movimiento parabólico. Para que esto ocurra, la suma de las energías potenciales gravitatorias más las cinéticas de ambos abalorios deben ser iguales a la pérdida de energía potencial gravitatoria al llegar a los extremos de las barras

$$2 * \frac{1}{2} mv^2 + 2mgl \operatorname{sen} \alpha = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L + \frac{2l \operatorname{sen} \alpha}{\tan\alpha}} \right) = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L + 2l \operatorname{cos} \alpha} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{q^2}{4\pi m\epsilon_0} \left( \frac{2l \operatorname{cos} \alpha}{L(L + 2l \operatorname{cos} \alpha)} \right) - 2gl \operatorname{sen} \alpha$$

La altura que alcanza un abalorio cuando abandona la barra viene dada por la expresión que determina la altura máxima en un movimiento parabólico

$$H = \frac{v^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} = \frac{\left[ \frac{q^2}{4\pi m\epsilon_0} \left( \frac{2l \operatorname{cos} \alpha}{L(L + 2l \operatorname{cos} \alpha)} \right) - 2gl \operatorname{sen} \alpha \right] * \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{q^2}{8mg\pi \epsilon_0} \left( \frac{2l \operatorname{cos} \alpha}{L(L + 2l \operatorname{cos} \alpha)} \right) * \operatorname{sen}^2 \alpha - l \operatorname{sen}^3 \alpha$$

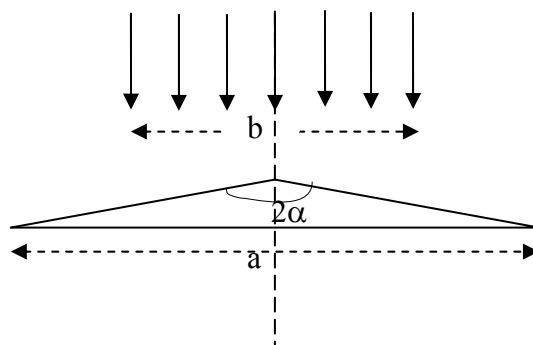
La altura total respecto de la posición inicial es:

$$h_{\text{total}} = l \operatorname{sen} \alpha + \frac{q^2}{8mg\pi \epsilon_0} \left( \frac{2l \operatorname{cos} \alpha}{L(L + 2l \operatorname{cos} \alpha)} \right) * \operatorname{sen}^2 \alpha - l \operatorname{sen}^3 \alpha \Rightarrow$$

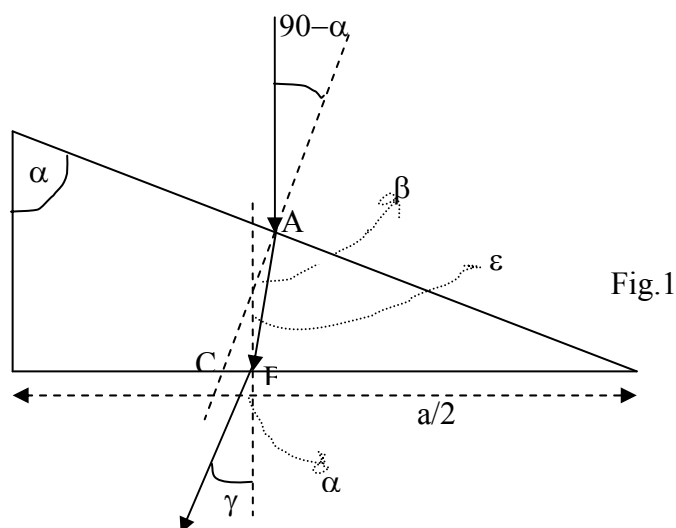
$$\Rightarrow h_{\text{total}} = l \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha + \frac{q^2}{4mg\pi \epsilon_0} \left( \frac{l \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha}{L(L + 2l \operatorname{cos} \alpha)} \right)$$

14.-Un prisma cuya sección principal es un triángulo isósceles de base  $a$  y ángulo  $2\alpha = 160^\circ$  (ver la figura) posee un índice de refracción  $n = 1,5$ .

Un haz de luz, cuya anchura es  $b = \frac{3}{4}a$ , y potencia  $P = 8000 \text{ W}$ , la cual está distribuida uniformemente sobre el haz, incide sobre el prisma. Dibujar la gráfica de la fuerza  $F$  que actúa sobre el prisma en función de  $x$ , siendo  $x$  la distancia en horizontal que existe entre el vértice  $A$  del prisma y el centro  $B$  del haz luminoso. Calcular el valor máximo de  $F$ . Considerar que el haz luminoso penetra por entero en el prisma y por tanto se desprecian las posibles reflexiones.



Vamos a dividir el prisma en dos partes simétricas. Calculemos el ángulo con el que un rayo sale del prisma, tal como indica la figura inferior



$$\text{Por la ley de Snell} \quad 1 \cdot \sin(90 - \alpha) = 1,5 \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = 6,6478^\circ$$

$$\text{En el triángulo ABC} \quad \alpha + \beta + (90 + \epsilon) = 180 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 90 - \alpha - \beta$$

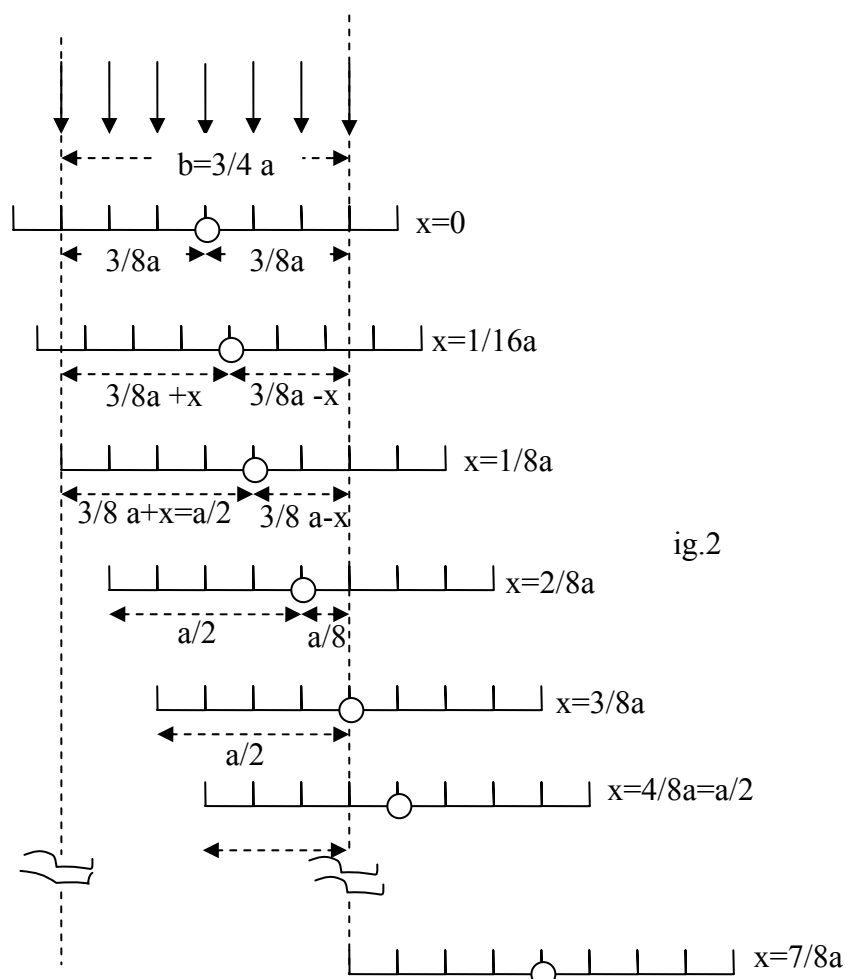
Por la ley de Snell  $1,5 * \sin(90 - \alpha - \beta) = 1 * \sin \gamma \Rightarrow \sin \gamma = 0,0877$

Un fotón con energía  $E$  posee un momento lineal  $\frac{E}{c}$ . De la figura 1 se deduce que un fotón que incida sobre la parte derecha del prisma cambia su dirección, teniendo una componente en dirección horizontal y dirigida hacia la izquierda  $-\frac{E \sin \gamma}{c}$

Y otra en dirección vertical  $\frac{E \cos \gamma}{c}$

Sobre la parte izquierda del prisma un fotón en posición simétrica con el de la figura 1 tendría de componentes:  $+\frac{E \sin \gamma}{c}; \frac{E \cos \gamma}{c}$ .

La fuerza horizontal que aparece sobre la mitad del prisma derecho y dirigida hacia la izquierda se anula con la fuerza horizontal que aparece en la mitad izquierda del prisma y dirigida hacia la derecha. La fuerza neta horizontal sobre el prisma es cero. Esto ocurre porque la mitad del prisma recibe la misma potencia luminosa que la otra mitad y se debe a la situación simétrica del prisma cuyo centro coincide exactamente con el centro del haz luminoso. La situación cambia si el centro del prisma no coincide con el centro del haz luminoso, ya que entonces una mitad del prisma recibe mayor potencia que la otra mitad. En la figura 2 se representa el haz y la base del prisma situada en distintas posiciones



Cuando  $x = 0$  la potencia recibida por la parte izquierda del prisma es igual que la que recibe la parte derecha, por tanto, las fuerzas horizontales son iguales y de sentido contrario y su suma es nula, lo que indica  $F = 0$

Cuando  $x = 1/16a$ , la potencia recibida por la mitad izquierda del prisma es mayor que por la parte derecha. La fuerza es proporcional a la superficie recibida

$$F_1 = k\left(\frac{3}{8}a + x\right) = k\left(\frac{3}{8}a + \frac{1}{16}a\right); F_2 = k\left(\frac{3}{8}a - x\right) = k\left(\frac{3}{8}a - \frac{1}{16}a\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F = F_1 - F_2 = k\frac{1}{8}a$$

Cuando  $x = 1/8a$ ,

$$F_1 = k\left(\frac{3}{8}a + x\right) = k\left(\frac{3}{8}a + \frac{1}{8}a\right); F_2 = k\left(\frac{3}{8}a - x\right) = k\left(\frac{3}{8}a - \frac{1}{8}a\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F = F_1 - F_2 = k\frac{1}{4}a$$

Cuando  $x = 2/8a$ ,

$$F_1 = k\frac{a}{2}; F_2 = k\left(\frac{3}{8}a - x\right) = k\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F = F_1 - F_2 = k\frac{3}{8}a$$

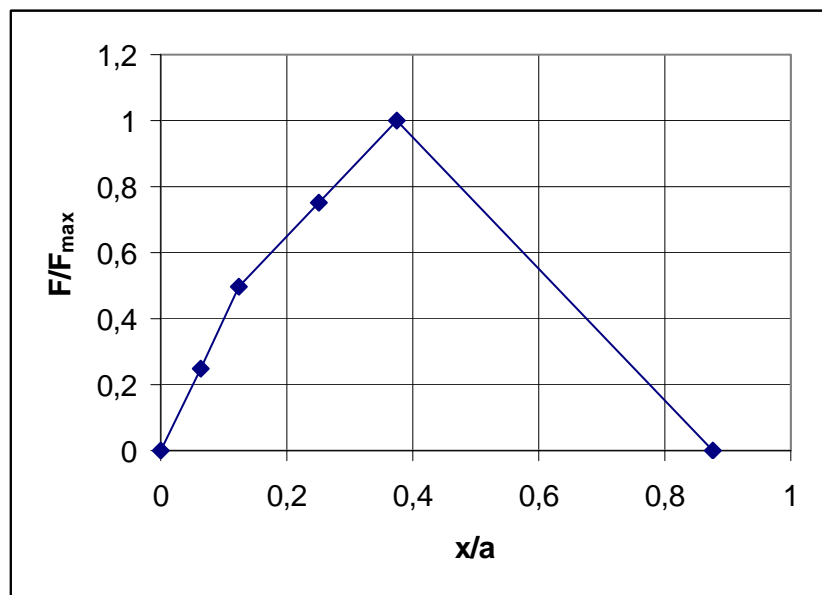
Cuando  $x = 3/8a$ ,

$$F_1 = k\frac{1}{2}a; F_2 = k\left(\frac{3}{8}a - x\right) = k\left(\frac{3}{8}a - \frac{3}{8}a\right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow F = F_1 - F_2 = k\frac{1}{2}a$$

A partir de  $3/8a$ , la fuerza disminuye ya que disminuye la luz que le llega a la parte izquierda del prisma. Cuando  $x = 7/8a$  resulta que ya no le llega luz al prisma y por consiguiente la fuerza es cero.

Representamos en el eje de abscisas  $x/a$  frente a la fuerza relativa al valor máximo

$x/a$	0	$1/16=0,5/8$	$1/8$	$2/8$	$3/8$	$7/8$
$F/F_{\max}$	0	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1	0



La fuerza máxima se produce cuando la mitad izquierda del prisma recibe luz y la mitad derecha no la recibe.

La energía que recibe el prisma por unidad de longitud es  $\frac{P}{3}$  y la que recibe la mitad

izquierda del prisma  $\frac{4P}{3a} * \frac{a}{2} = \frac{2}{3}P$ .

La fuerza esta determinada por la variación del momento lineal con respecto al tiempo

$$F = \frac{\frac{E_t \text{sen} \gamma}{c}}{\Delta t} = \frac{\frac{2}{3} P \text{ sen} \gamma}{c} = \frac{2 * 8000 * 0,0877}{3 * 3 \cdot 10^8} = 1,56 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

**15.- Una membrana horizontal oscila armónicamente a lo largo de un eje vertical con una frecuencia  $f= 100 \text{ Hz}$ . Calcular la amplitud de las oscilaciones si unos granos de arena que están sobre la membrana saltan hasta una altura de  $H= 2 \text{ cm}$  respecto de la posición central de la membrana.**

Cuando la membrana está en su posición inicial de equilibrio, en la que la aceleración es cero, un grano de arena de masa  $m$  está sometido a dos fuerzas su peso y el empuje de la membrana.

En una posición en que la membrana está separada de su posición de equilibrio, resulta que existe una aceleración vertical dirigida hacia la posición de equilibrio. Si analizamos las fuerzas desde un sistema ligado a la membrana, que es un sistema no inercial, las fuerzas que actúan están representadas en la posición 2 de la figura 1.

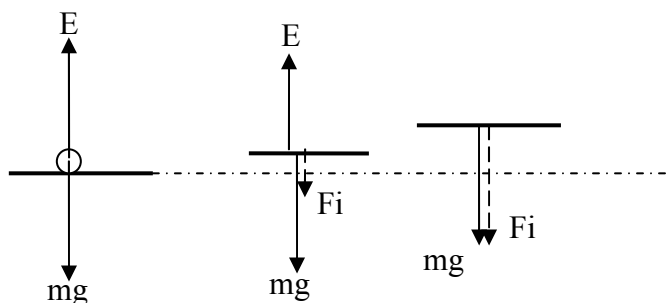


Fig.1

En la segunda posición sobre el grano actúan las fuerzas indicadas, siendo  $E$  menor que en la primera posición. En la tercera el empuje se ha anulado y  $mg = Fi = ma$ ; al cesar  $E$  el grano puede abandonar la membrana, y esto ocurre cuando la aceleración de la membrana es igual a  $g$ . Si para la posición de equilibrio la ecuación del movimiento armónico es  $y = A \sin \omega t$ , la ecuación de la velocidad es  $v = A\omega \cos \omega t$  y la de la aceleración  $a = -A\omega^2 \sin \omega t$ .

Cuando el valor absoluto de la aceleración sea igual a  $g$ , es cuando el grano puede abandonar la membrana

$$A\omega^2 \sin \omega t = g \quad (1)$$

En ese instante la velocidad vertical del grano es:  $v = A\omega \cos \omega t$

Debido a esa velocidad alcanza una altura respecto de la posición de la membrana cuando la abandona igual a:

$$h = \frac{A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t}{2g}$$

Respecto a la posición inicial de la membrana

$$H = A \sin \omega t + \frac{A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t}{2g} \quad (2)$$

A partir de las ecuaciones (1) y (2)

$$H = A \frac{g}{A\omega^2} + \frac{A^2\omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{A^2\omega^4}\right)}{2g} = \frac{g}{\omega^2} + \frac{A^2\omega^2}{2g} - \frac{g}{2\omega^2} \Rightarrow \frac{A^2\omega^2}{2g} = H - \frac{g}{2\omega^2} \Rightarrow$$

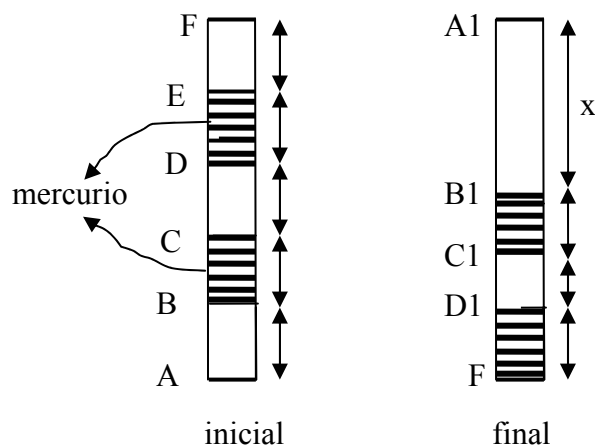
$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{\left(H - \frac{g}{2\omega^2}\right)2g}{\omega^2}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4\omega^2 g H - 2g^2}{2\omega^2}} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2\omega^2 g H - g^2}}{\omega^2}$$

Sustituyendo valores

$$A = \frac{\sqrt{2 * 4\pi^2 * 100^2 * 9,8 * 2.10^{-2} - 9,8^2}}{4\pi^2 * 100^2} = 9,96.10^{-4} \text{ m} \approx 1 \text{ mm}$$

$$\alpha = \beta^2$$

16.- Los compartimentos *AB* y *CD* de un tubo vertical están llenos de aire. Los extremos del tubo están cerrados. Las partes *BC* y *DE* son de mercurio y en la parte superior *EF* se ha hecho el vacío. Las longitudes de cada una de las partes son iguales a *h*. La presión en el punto *A* es *p*. El tubo se gira cuidadosamente y adopta la posición de las distintas partes indicadas en la figura. Calcular la presión en el punto inferior *F* en función de *p*. Se supone que al darle la vuelta al tubo la temperatura no



*varía. Cuando el tubo se gira el compartimiento de aire AB pasa a ser A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> y el CD a C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>.*

Designamos con *S* la sección del tubo. Los volúmenes de cada uno de los compartimientos de aire en el estado inicial son *Sh*.

Las presiones son  $P_E = 0$ ;  $P_D = P_{DC} = \rho gh$ ;  $P_B = P_{DC} + \rho gh = P_A = p = 2 \rho gh$

Siendo  $\rho$  la densidad del mercurio

Las presiones en las cámaras de aire son *p* en *AB* y *p/2* en *CD*

El aire contenido en la cámara *AB* ocupa en la posición final la cámara *A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>*. La presión ahora en esta cámara es  $p_x$ . Teniendo en cuenta que la temperatura no ha variado se cumple, de acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte

$$pSh = p_x Sx \quad \Rightarrow \quad ph = p_x x \quad (1)$$

La cámara de aire *CD* tiene una presión *p/2* y al volcar el tubo pasa a ser *C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>*. Puesto que el tubo no ha variado de tamaño y tampoco las alturas del mercurio se deduce que la altura *H* de esa cámara es:

$$5h = 2h + x + H \quad \longrightarrow \quad H = 3h - x$$

Aplicando la ley de Boyle-Mariotte, y designando con  $p_2$  a la presión en *C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>* en el estado final

$$\frac{p}{2}Sh = p_2S(3h - x) \Rightarrow p_2 = \frac{ph}{2(3h - x)} \quad (2)$$

De acuerdo con la figura se deduce que.

$$p_2 = p_x + \rho gh \Rightarrow p_2 = p_x + \frac{p}{2} \quad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) se deduce que.

$$\frac{ph}{2(3h - x)} = p_x + \frac{p}{2} \Rightarrow p_x = \frac{ph}{2(3h - x)} - \frac{p}{2} \quad (4)$$

Llevando la ecuación (4) a la (1)

$$ph = \left[ \frac{ph}{2(3h - x)} - \frac{p}{2} \right] x \Rightarrow 2h = \frac{hx}{3h - x} - x \Rightarrow 6h^2 - 2hx = hx - 3hx + x^2 \Rightarrow 6h^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{6}h$$

La presión en F en el estado final es:

$$p_F = p_2 + \rho gh = \frac{ph}{2(3h - x)} + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} \left( \frac{h}{3h - \sqrt{6}h} + 1 \right) = p \left( \frac{1}{6 - 2\sqrt{6}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$p_F = p \left( \frac{6 + 2\sqrt{6}}{36 - 24} + \frac{1}{2} \right) = p \left( \frac{6 + 2\sqrt{6} + 6}{12} \right) = p \left( 1 + \frac{\sqrt{6}}{6} \right)$$

**17.- Se lanza un proyectil, con velocidad inicial  $v_0$ , desde un suelo horizontal formando un cierto ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Este ángulo es tal que el alcance sobre la horizontal es el máximo posible. Desde una altura  $y = h$  se traza una recta paralela al suelo que corta a la trayectoria del proyectil en dos puntos. Calcular la distancia  $D$  en dirección horizontal de ambos puntos en función de  $h$ . Dibuje la gráfica de  $D$  frente  $h$  cuando la velocidad inicial es  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ . ¿A que corresponden los valores máximo y mínimo de  $D$ ? Tome  $g = 10 \text{ m/s}^2$**

Tomamos ejes de referencia el de abscisas paralelo al suelo y a su nivel y el de ordenadas perpendicular al anterior. Las ecuaciones de la trayectoria son:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha \, t \\ y &= v_0 \sin \alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\}$$

Cuando  $y = 0$ , el proyectil está en la salida o ha recorrido su trayectoria y choca contra el suelo

$$0 = v_0 \sin \alpha \, t_a - \frac{1}{2} g t_a^2 \quad \Rightarrow \quad t_a = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$t_a$  es el tiempo que emplea el proyectil en recorrer su trayectoria y llegar al suelo

$$x_a = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

El alcance depende de la velocidad inicial y del ángulo de salida, si fijamos  $v_0$ , podemos calcular para qué ángulo el alcance es el máximo posible

$$\frac{dx_a}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$

Las ecuaciones paramétricas para este movimiento de máximo alcance son:

$$x = v_0 \cos 45^\circ \, t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos 45^\circ}$$

$$y = v_0 \sin 45^\circ \, t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin 45^\circ \cdot \frac{x}{v_0 \cos 45^\circ} - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2 45^\circ} \quad \Rightarrow \quad y = x - \frac{g x^2}{v_0^2} \quad (1)$$

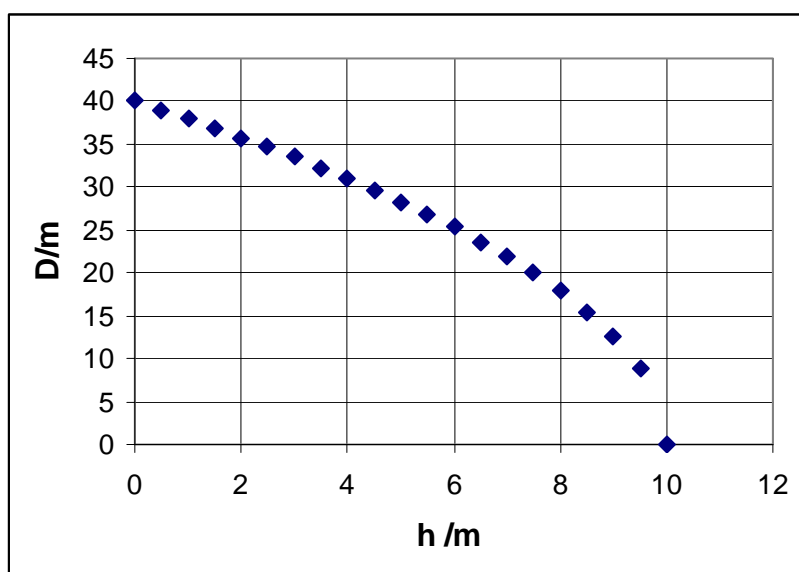
Si en la ecuación (1) hacemos  $y = h$  se obtiene dos soluciones que corresponden a las abscisas de los puntos de corte de la recta con la parábola

$$\frac{g}{v_0^2}x^2 - x + h = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{gh}{v_0^2}}}{\frac{2g}{v_0^2}} = \frac{v_0^2 \left( 1 \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 4gh}}{v_0} \right)}{2g} = \frac{v_0^2 \pm v_0 \sqrt{v_0^2 - 4gh}}{2g}$$

La distancia D entre ambas abscisas es

$$D = x_2 - x_1 = \frac{v_0^2 + v_0 \sqrt{v_0^2 - 4gh}}{2g} - \frac{v_0^2 - v_0 \sqrt{v_0^2 - 4gh}}{2g} = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 - 4gh}}{g}$$

Para dibujar la gráfica tenemos en cuenta que el radicando no sea negativo, por tanto, el máximo valor de h es 10 m.



Cuando  $h = 0$  m, D se corresponde con el alcance horizontal del proyectil y cuando  $h=10$  m es la altura máxima.

Para comprobarlo

$$x_a = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{20^2 \cdot \sin 90^\circ}{10} = 40 \text{ m}$$

La altura máxima se obtiene cuando la componente vertical de la velocidad se hace cero

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt_h = 0 \Rightarrow t_h = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

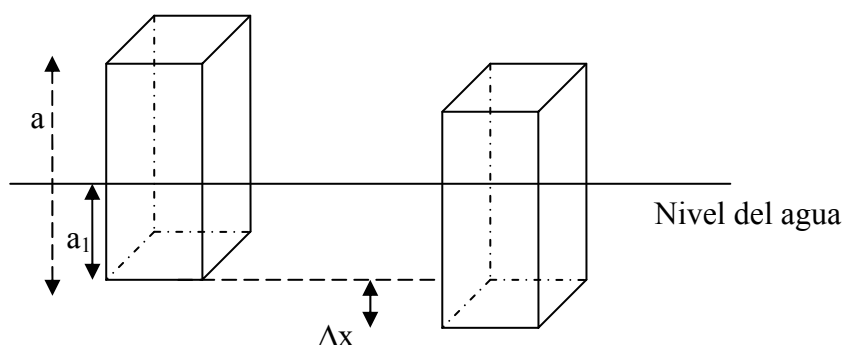
Sustituyendo

$$y_{\max} = v_0 \sin \alpha t_h - \frac{1}{2}gt_h^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 45^\circ}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v_0^2 \sin^2 45^\circ}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 45^\circ}{g} = \frac{400 \cdot 0,5}{20} = 10 \text{ m}$$

**18.- Un bloque de madera de dimensiones  $a * b * c$  y densidad  $\rho$  respecto del agua. Cuando el bloque está flotando con el lado  $a$  en posición vertical se empuja hacia abajo y se suelta. Calcular el periodo de oscilación del bloque.**

Cuando el bloque está flotando el peso es igual al empuje. Si designamos con  $a_1$  la parte sumergida del bloque,  $\rho_M$  la densidad de la madera y  $\rho_A$  la del agua

$$P = E \Rightarrow abc\rho_M g = a_1 bc\rho_A g \Rightarrow a_1 = a \frac{\rho_M}{\rho_A} = ap$$



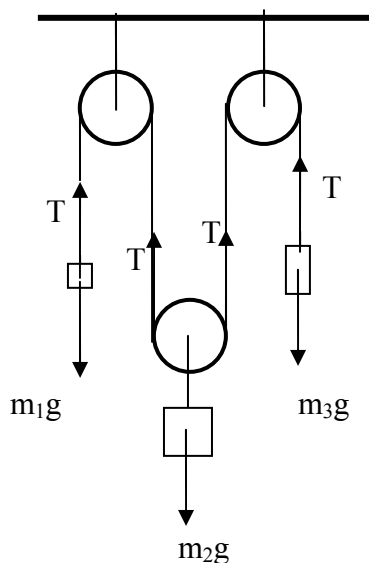
Si sumergimos el bloque una distancia  $\Delta x$  respecto a la posición inicial de equilibrio, el empuje ahora es superior al peso y esa fuerza resultante tenderá a llevarlo a la posición inicial

$$\begin{aligned} F = E - P &\Rightarrow (a_1 + \Delta x)bc\rho_A g - abc\rho_M g \Rightarrow F = (ap + \Delta x)\rho_A bcg - abc\rho_M g \Rightarrow \\ &= \Rightarrow F = a \frac{\rho_M}{\rho_A} \rho_A bcg + \Delta x \rho_A bcg - abc\rho_M g \Rightarrow F = \Delta x \rho_A bcg = K \Delta x \end{aligned}$$

Dado que la fuerza es proporcional al desplazamiento al igual que en un movimiento armónico

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{abc\rho_M}{bc\rho_A g}} = 2\pi \sqrt{\frac{ap}{g}}$$

19.- En el sistema de poleas de la figura inferior se supone que carecen de masa y que el sistema se desplaza sin rozamiento. Se pide calcular la aceleración de las masas.



Tomando como sentidos positivo vertical hacia abajo, las ecuaciones de las tres masas son:

$$m_1g - T = m_1a_1 \quad (1)$$

$$m_2g - 2T = m_2a_2 \quad (2)$$

$$m_3g - T = m_3a_3 \quad (3)$$

Imaginemos que las masas  $m_1$  y  $m_3$  fuesen iguales, si la masa  $m_2$  se desplaza hacia abajo  $\Delta x_2$ , las otras dos masas se desplazan hacia arriba  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_3$ . La distancia  $\Delta x_2$  se reparte por igual en las dos ramas de la cuerda de modo que  $\Delta x_1$  es la mitad de  $\Delta x_2$ , lo mismo le ocurre a la masa 3. Por tanto las aceleraciones guardan la relación

$$a_2 = -\frac{a_1 + a_3}{2} \quad (4)$$

En el caso expuesto  $a_1 = a_3$  y en general serán distintas si las masas  $m_1$  y  $m_3$  son diferentes. El signo menos se debe a que la aceleración de  $m_2$  es hacia abajo (sentido positivo) y las otras dos sentido negativo.

Ahora debemos resolver un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Despejamos  $T$  de la ecuación (3) y sustituimos en la (1)

$$m_1g - m_3(g - a_3) = m_1a_1 \quad (5)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por 2 y le restamos la (2)

$$2m_1g - 2T - m_2g + 2T = 2m_1a_1 - m_2a_2 \Rightarrow g(2m_1 - m_2) = 2m_1a_1 - m_2a_2$$

En la última ecuación sustituimos  $a_2$  por la ecuación (4)

$$\begin{aligned} g(2m_1 - m_2) &= 2m_1a_1 - m_2\left(-\frac{a_1 + a_3}{2}\right) \Rightarrow g(2m_1 - m_2) = a_1\left(2m_1 + \frac{m_2}{2}\right) + \frac{m_2a_3}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_3 = \frac{2g(2m_1 - m_2) - 2a_1\left(2m_1 + \frac{m_2}{2}\right)}{m_2} \quad (6) \end{aligned}$$

Llevando la ecuación (6) a la (5)

$$\begin{aligned} m_1g - m_3g + m_3 \frac{4m_1g - 2m_2g - 4m_1a_1 - m_2a_1}{m_2} &= m_1a_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1m_2g - m_2m_3g + 4m_1m_3g - 2m_2m_3g - 4m_1m_3a_1 - m_2m_3a_1 - m_2m_3a_1 &= m_1m_2a_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{4m_1m_3 + m_1m_2 - 3m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3} g \end{aligned}$$

Llevando la ecuación de  $a_1$  a la (1)

$$\begin{aligned} m_1g - T &= m_1 \frac{4m_1m_3 + m_1m_2 - 3m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3} g \Rightarrow T = m_1g \left(1 - \frac{4m_1m_3 + m_1m_2 - 3m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= m_1g \left(\frac{4m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) \end{aligned}$$

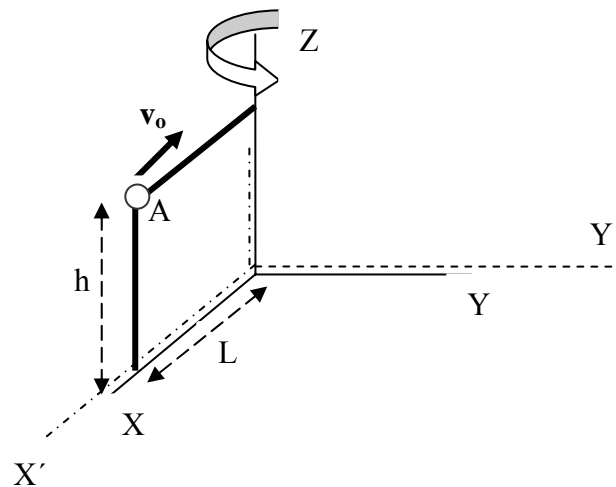
Sustituyendo la tensión en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} m_2g - 2m_1g \left(\frac{4m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) &= m_2a_2 \Rightarrow g - 2m_1g \frac{4m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3} = a_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_2 &= g \left(1 - \frac{8m_1m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{m_1m_2 + m_2m_3 - 4m_1m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3} g \end{aligned}$$

Sustituyendo la tensión en la ecuación (3)

$$\begin{aligned} m_3g - m_1g \left(\frac{4m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) &= m_3a_3 \Rightarrow g - m_1g \frac{4m_2}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3} = a_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_3 &= g \left(1 - \frac{4m_1m_2}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) \Rightarrow a_3 = \frac{4m_1m_3 - 3m_1m_2 + m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3} g \end{aligned}$$

20.- Una partícula se encuentra en el tiempo  $t=0$  en la esquina superior  $A$  de una puerta rectangular que gira alrededor del eje  $Z$  con velocidad angular constante  $\omega$



Los ejes  $XYZ$  son de un sistema  $S$  inercial, y los ejes  $X' Y'$  y  $Z'$  pertenecen a un sistema  $S'$ , ligado a la puerta y que por tanto giran con ella. En el instante  $t=0$  ambos sistemas de coordenadas están superpuestos. Determinar expresando los resultados en el sistema móvil  $S'$  a) la velocidad relativa  $b$ , de arrastre y absoluta de la partícula en función del tiempo b) la aceleración relativa, de arrastre, de Coriolis y absoluta en función del tiempo.

Al cabo de un tiempo  $t$  la situación de la puerta está indicada en la figura 1.

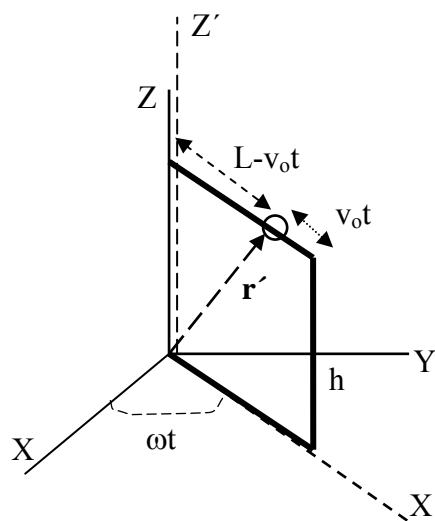


Fig.1

La puerta ha girado un ángulo  $\omega t$  y con ella los ejes del sistema  $S'$ . En ese mismo tiempo la partícula ha avanzado por la puerta una longitud  $v_0 t$ . Desde el sistema móvil  $S'$  la velocidad de la partícula es:

$$\vec{v}' = v_0 \vec{i}'$$

La velocidad de arrastre es:

$$\vec{v}_{\text{arrastre}} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ L - v_0 t & 0 & h \end{vmatrix} = -\vec{j}'[-\omega(L - v_0 t)] = \vec{j}'[\omega(L - v_0 t)]$$

$$\vec{v}_{\text{absoluta}} = \vec{v}_{\text{arrastre}} + \vec{v}_{\text{relativa}} = -v_0 \vec{i}' + \omega(L - v_0 t) \vec{j}'$$

b) La aceleración relativa es cero, pues la velocidad es constante.

La aceleración de arrastre es la centrípeta

$$\vec{a}_{\text{centrípeta}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega(L - v_0 t) & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}'[\omega^2(L - v_0 t)]$$

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' = 2 \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ -v_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \omega v_0 \vec{j}'$$

$$\vec{a}_{\text{absoluta}} = -\omega^2(L - v_0 t) \vec{i}' - 2 \omega v_0 \vec{j}'$$

21.- Considerar el problema 20. a) Obtener la ecuación de la trayectoria de la partícula en el sistema fijo b) determinar los vectores velocidad absoluta y aceleración absoluta en el sistema de referencia fijo  $S$  al cabo de 10 s de iniciado el movimiento, sabiendo que en el instante inicial los ejes  $X$  y  $X'$  coinciden y que  $L = 1 \text{ m}$ ,  $v_0 = 0,05 \text{ m/s}$  y  $\omega = 20 \text{ rpm}$ .

Si nos fijamos en la figura 1, las coordenadas de la partícula en el sistema  $S$ , al cabo de un tiempo  $t$ , son:

$$x = (L - v_0 t) \cos \omega t \quad ; \quad y = (L - v_0 t) \sin \omega t \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + y^2 = (L - v_0 t)^2$$

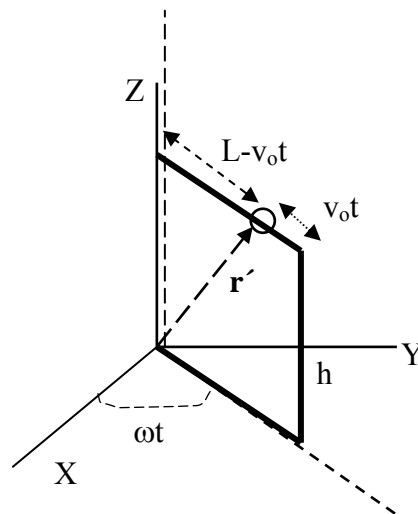
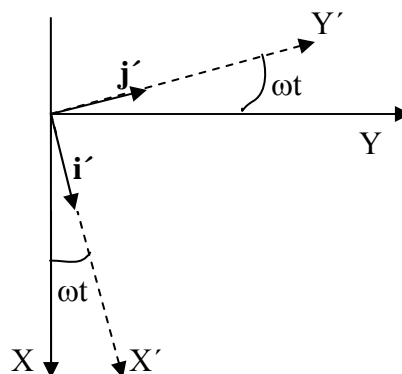


Fig.1

La trayectoria en el plano  $z=h$ , se obtiene sustituyendo valores en las ecuaciones de las coordenadas

b)



Las componentes de los vectores unitarios  $\mathbf{i}'$  y  $\mathbf{j}'$  sobre el sistema de referencia  $X Y$  son respectivamente.

$$(\mathbf{i}' \cos \omega t, \mathbf{i}' \sin \omega t) \quad ; \quad (-\mathbf{j}' \sin \omega t, \mathbf{j}' \cos \omega t)$$

Que puestos en forma vectorial y dado que  $\mathbf{i}'$  y  $\mathbf{j}'$  valen la unidad

$$\vec{i}' = \cos \omega t \vec{i} + \text{sen } \omega t \vec{j} \quad ; \quad \vec{j}' = -\text{sen } \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j}$$

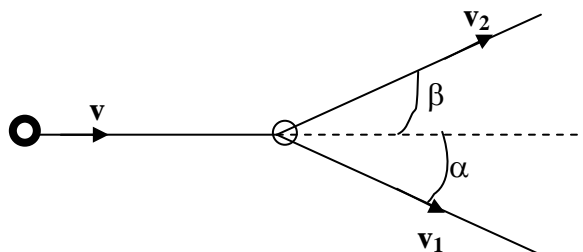
$$\begin{aligned} \vec{v} &= \omega(l - v_o t) \vec{j}' - v_o \vec{i}' = \omega(l - v_o t)(-\text{sen } \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j}) - v_o (\cos \omega t \vec{i} + \text{sen } \omega t \vec{j}) \\ &= -(\omega(l - v_o t) \text{sen } \omega t + v_o \cos \omega t) \vec{i} + (\omega(l - v_o t) \cos \omega t - v_o \text{sen } \omega t) \vec{j} \\ &= -\left(\frac{20 \cdot 2\pi}{60}(1 - 0,05 \cdot 10) \text{sen} \frac{20 \cdot 2\pi}{60} \cdot 10 + 0,05 \cos \frac{20 \cdot 2\pi}{60} \cdot 10\right) \vec{i} + \\ &+ \left(\frac{20 \cdot 2\pi}{60}(1 - 0,05 \cdot 10) \cos \frac{20 \cdot 2\pi}{60} \cdot 10 - 0,05 \text{sen} \frac{20 \cdot 2\pi}{60} \cdot 10\right) \vec{j} \end{aligned}$$

$$\vec{v} = -0,88 \vec{i} - 0,57 \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -\omega^2(l - v_o t) \vec{i}' - 2v_o \omega \vec{j}' = -\omega^2(l - v_o t)(\cos \omega t \vec{i} + \text{sen } \omega t \vec{j}) - 2v_o \omega(-\text{sen } \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j}) \\ &= (-\omega^2(l - v_o t) \cos \omega t + 2v_o \omega \text{sen } \omega t) \vec{i} + (-\omega^2(l - v_o t) \text{sen } \omega t - 2v_o \omega \cos \omega t) \vec{j} \\ &= \left(-\left(\frac{20 \cdot 2\pi}{60}\right)^2 (1 - 0,05 \cdot 10) \cos \frac{20 \cdot 2\pi}{60} \cdot 10 + 2 \cdot 0,05 \cdot \frac{20 \cdot 2\pi}{60} \text{sen} \frac{20 \cdot 2\pi}{60} \cdot 10\right) \vec{i} + \\ &+ \left(-\left(\frac{20 \cdot 2\pi}{60}\right)^2 (1 - 0,05 \cdot 10) \text{sen} \frac{20 \cdot 2\pi}{60} \cdot 10 - 2 \cdot 0,05 \cdot \frac{20 \cdot 2\pi}{60} \cos \frac{20 \cdot 2\pi}{60} \cdot 10\right) \vec{j} \end{aligned}$$

$$\vec{a} = 1,28 \vec{i} - 1,79 \vec{j}$$

22.- Una partícula de masa  $m_1$  colisiona, de forma elástica, con una partícula de masa  $m_2$ , siendo  $m_1 > m_2$ . La partícula 2 se encuentra en reposo ¿Cuál es el máximo ángulo de desviación de la primera partícula respecto de su dirección inicial? .Se supone que las velocidades de las partículas son mucho más pequeñas que la de la luz.



En el choque elástico hay conservación de la cantidad de movimiento y de la energía

$$\left. \begin{aligned} m_1 v &= m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta \\ m_1 v_1 \sin \alpha &= m_2 v_2 \sin \beta \\ \frac{1}{2} m_1 v^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{aligned} \right\}$$

Despejamos de la ecuación 2,  $\sin \beta$ ; y de la tercera  $v_2$ .

$$\sin \beta = \frac{m_1 v_1 \sin \alpha}{m_2 v_2} \quad ; \quad v_2^2 = \frac{m_1}{m_2} (v^2 - v_1^2)$$

Designando a  $\frac{m_1}{m_2} = M$ , resulta:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{M^2 v_1^2 \sin^2 \alpha}{v_2^2}} = \sqrt{1 - \frac{M^2 v_1^2 \sin^2 \alpha}{M(v^2 - v_1^2)}}$$

Llevando  $\cos \beta$  y  $v_2$  a la primera de las ecuaciones iniciales:

$$\begin{aligned} Mv &= Mv_1 \cos \alpha + \sqrt{M(v^2 - v_1^2)} \cdot \sqrt{1 - \frac{M^2 v_1^2 \sin^2 \alpha}{M(v^2 - v_1^2)}} \Rightarrow \\ \Rightarrow Mv &= Mv_1 \cos \alpha + \sqrt{M(v^2 - v_1^2) - M^2 v_1^2 \sin^2 \alpha} \Rightarrow v = v_1 \cos \alpha + \sqrt{\frac{v^2 - v_1^2}{M} - v_1^2 \sin^2 \alpha} \\ \Rightarrow (v - v_1 \cos \alpha)^2 &= \frac{v^2 - v_1^2}{M} - v_1^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow v^2 + v_1^2 \cos^2 \alpha - 2vv_1 \cos \alpha + v_1^2 \sin^2 \alpha = \frac{v^2 - v_1^2}{M} \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \cos \alpha &= \frac{v^2 - v_1^2}{M} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{M(v^2 + v_1^2) - v^2 + v_1^2}{2vv_1 M} \end{aligned}$$

En el problema nos piden que el ángulo  $\alpha$  sea el máximo posible, o el coseno el valor mínimo, para ello derivamos la anterior expresión con respecto a  $v_1$  e igualamos a cero

$$\begin{aligned} \frac{2vv_1M(2Mv_1 + 2v_1) - [M(v^2 + v_1^2) - v^2 + v_1^2] \cdot 2vM}{4v^2v_1^2M^2} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2Mv_1^2 + 2v_1^2 - Mv^2 - Mv_1^2 + v^2 - v_1^2 &= 0 \\ \Rightarrow Mv_1^2 - Mv^2 + v_1^2 + v^2 = 0 \Rightarrow v_1^2 &= \frac{v^2(M-1)}{(M+1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1 = v \sqrt{\frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}} &\Rightarrow v_1 = v \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de  $v_1$  en coseno  $\alpha$

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\frac{m_1}{m_2}v^2 + \frac{m_1}{m_2}v^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} - v^2 + v^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}{2v \frac{m_1}{m_2} v \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}} = \frac{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right) + \left( \frac{m_1}{m_2} - 1 \right)}{2 \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}} = \\ &= \frac{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) + \frac{m_1 - m_2}{m_2}}{2 \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}} \Rightarrow \\ \sin^2\alpha &= 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1^2 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} = 1 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2} = \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \Rightarrow \text{sen}\alpha_{\max} = \frac{m_2}{m_1} \end{aligned}$$

Calculamos ahora el valor de  $v_2$  y del ángulo beta.

$$\begin{aligned} m_1v^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2 \Rightarrow m_2v_2^2 &= m_1v^2 - m_1v_1^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = m_1v^2 \left( 1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2^2 &= \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2m_1}{m_1 + m_2}} \\ m_1v_1\text{sen}\alpha &= m_2v_2\text{sen}\beta \Rightarrow m_1v \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} \cdot \frac{m_2}{m_1} = m_2v \sqrt{\frac{2m_1}{m_1 + m_2}} \cdot \text{sen}\beta \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{sen}\beta &= \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{2m_1}} \end{aligned}$$

23.- Se lanza un proyectil formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. En el punto más alto de su trayectoria  $h$  su velocidad es  $v_1$ . La velocidad en un punto de la trayectoria que es la mitad de la altura máxima  $h/2$  es  $v_2$  y entre ambas velocidades existe la relación

$$v_1 = \sqrt{\frac{6}{7}} v_2$$

Calcular el ángulo  $\alpha$  de lanzamiento.

Las ecuaciones paramétricas del movimiento del proyectil son:

$$\left. \begin{aligned} x &= v \cos\alpha \cdot t \\ y &= v \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \right\}$$

Las ecuaciones de las velocidades sobre los ejes coordenados son:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v \cos\alpha \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = v \operatorname{sen}\alpha - gt \end{aligned} \right\}$$

En el punto más alto de la trayectoria la componente  $v_y$  de la velocidad es nula. El tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima es:

$$0 = v \operatorname{sen}\alpha - gt_h \quad \Rightarrow \quad t_h = \frac{v \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

Y el valor de  $h$

$$h = v \operatorname{sen}\alpha \cdot t_h - \frac{1}{2}gt_h^2 = v \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{v \operatorname{sen}\alpha}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g} \quad (1)$$

La velocidad en el punto más alto de la trayectoria:

$$v_1 = v_x = v \cos\alpha \quad (2)$$

Cuando el proyectil se encuentra a una altura  $h/2$  la velocidad  $v_2$  tiene dos componentes  $v_{2x}$  y  $v_{2y}$ , cuyos valores son respectivamente

$$v_{2x} = v \cos\alpha$$

$$v_{2y} = v \operatorname{sen}\alpha - gt_{h/2}$$

Para averiguar la componente  $v_{2y}$  necesitamos saber el tiempo que el proyectil emplea en alcanzar la altura  $h/2$ , para ello sustituimos en una de las ecuaciones paramétricas

$$\frac{h}{2} = v \operatorname{sen}\alpha \cdot t_{h/2} - \frac{1}{2}gt_{h/2}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{h/2}^2 - \frac{2v \operatorname{sen}\alpha}{g} t_{h/2} + \frac{h}{g} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$t_{h/2} = \frac{\frac{2v\text{sen}\alpha}{g} - \sqrt{\frac{4v^2\text{sen}^2\alpha}{g^2} - \frac{4h}{g}}}{2} = \frac{\frac{2v\text{sen}\alpha}{g} - \sqrt{\frac{4v^2\text{sen}^2\alpha}{g^2} - \frac{\frac{1}{4}\frac{v^2\text{sen}^2\alpha}{g}}{g}}}{2} \Rightarrow$$

$$t_{h/2} = \frac{\frac{2v\text{sen}\alpha}{g} - \frac{v\text{sen}\alpha}{g}\sqrt{2}}{2} = \frac{v\text{sen}\alpha}{g} \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)$$

Se ha escogido de las dos soluciones la que corresponde al tiempo menor, que es cuando la altura  $h/2$  la alcanza el proyectil antes de llegar a la altura  $h$ . La otra solución es cuando el proyectil llega a la altura  $h/2$  después de alcanzar la máxima altura  $h$ . Sustituimos el tiempo en la expresión de la velocidad  $v_{2y}$ .

$$v_{2y} = v\text{sen}\alpha - g \frac{v\text{sen}\alpha}{g} \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) = v\text{sen}\alpha \left( 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) = v\text{sen}\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$$

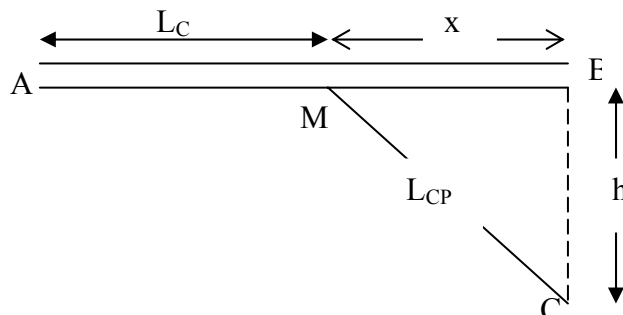
$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{v^2\cos^2\alpha + \frac{v^2\text{sen}^2\alpha}{2}}$$

De acuerdo con el enunciado del problema

$$v_1 = \sqrt{\frac{6}{7}}v_2 \Rightarrow v^2\cos^2\alpha = \frac{6}{7} \left( v^2\cos^2\alpha + \frac{v^2\text{sen}^2\alpha}{2} \right) \Rightarrow v^2\cos^2\alpha = 3v^2\text{sen}^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \text{sen}^2\alpha = 3\text{sen}^2\alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

24.-En la figura inferior  $AB$  es una carretera y el punto  $C$  es un lugar del campo. Un automóvil si se desplaza por la carretera lo hace con una velocidad  $v$  constante y si lo hace por el campo con una velocidad  $\varepsilon$  veces menor que por la carretera. Calcular el valor de  $x$  para que el automóvil que se desplaza de  $A$  a  $C$  lo haga en el tiempo mínimo posible.



El automóvil va de  $A$  a  $M$  por la carretera, recorriendo la distancia  $L_C$  y y de  $M$  a  $C$  por el campo recorriendo la distancia  $L_{CP}$ .

De la figura se deduce que

$$L_C + x = \text{constante} = K$$

El tiempo total del viaje es:

$$t_{\text{total}} = \frac{L_C}{v} + \frac{L_{CP}}{v'} = \frac{L_C}{v} + \frac{L_{CP}}{v} \varepsilon = \frac{K - x + \varepsilon \sqrt{x^2 + h^2}}{v} = \frac{K + (-x + \varepsilon \sqrt{x^2 + h^2})}{v}$$

Como el tiempo total ha de ser mínimo y  $K$  es constante y  $v$  también, el término entre paréntesis ha de ser mínimo

$$-x + \varepsilon \sqrt{x^2 + h^2} = \text{mínimo}$$

Derivamos con respecto a  $x$  e igualamos a cero

$$-1 + \frac{\varepsilon 2x}{2\sqrt{x^2 + h^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + h^2} = \varepsilon x \Rightarrow x^2 + h^2 = \varepsilon^2 x^2 \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$$

**25.-Un automóvil recorre en línea recta una distancia  $L$  con velocidad uniforme  $v$  y a continuación frena hasta pararse con una aceleración a constante. Se pide determinar el valor de  $v$ , el cual determina que el tiempo empleado en el recorrido total del automóvil sea el mínimo posible.**

Una apreciación intuitiva del problema nos dice que si  $v$  es muy grande, la longitud  $L$  la recorrerá en poco tiempo, pero necesitará un tiempo largo para frenar, por el contrario, si  $v$  es pequeña tardará mucho tiempo en recorrer la distancia  $L$  pero poco tiempo en frenar, esto quiere decir que habrá una velocidad  $v$  para la que el tiempo sea mínimo.

El tiempo que tarda en recorrer la distancia  $L$  es:

$$t_1 = \frac{L}{v}$$

El tiempo que tarda en frenar con aceleración a constante

$$v_{\text{final}} = 0 = v - at_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v}{a}$$

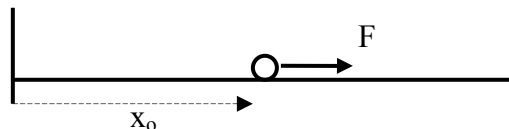
El tiempo total del recorrido:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{v} + \frac{v}{a}$$

Como  $t$  ha de ser mínimo derivamos la expresión anterior respecto de  $v$  e igualamos a cero

$$\frac{dt}{dv} = 0 = \frac{-L}{v^2} + \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{v^2} = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{La}$$

26.- Una partícula de masa  $m$ , se desplaza a lo largo del eje  $X$ . La mencionada partícula se encuentra, en el instante  $t=0$ , en la posición  $x_0$  con velocidad  $v_0$  y está sometida a una fuerza constante  $F$  dirigida como indica la figura.



**Determinar  $v=f(t)$  y  $v=f(x)$**

Hacemos uso de la segunda ecuación de Newton

$$F = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int F dt = \int m dv \Rightarrow Ft = mv + Cte$$

Para hallar la constante recurrimos a las condiciones iniciales, cuando  $t=0$ , la velocidad es  $v_0$ , sustituyendo en la expresión anterior

$$0 = mv_0 + Cte \Rightarrow Cte = -mv_0$$

$$Ft = mv - mv_0 \Rightarrow v = \frac{Ft}{m} + v_0$$

Volviendo a la ecuación de Newton

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} \Rightarrow \int F dx = \int mv dv \Rightarrow Fx = m \frac{v^2}{2} + Cte$$

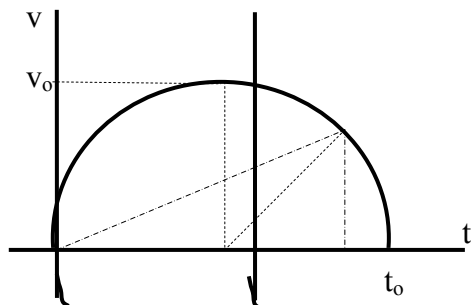
Según las condiciones iniciales cuando  $x = x_0$ ,  $v = v_0$

$$Fx_0 = m \frac{v_0^2}{2} + Cte \Rightarrow Cte = Fx_0 - m \frac{v_0^2}{2}$$

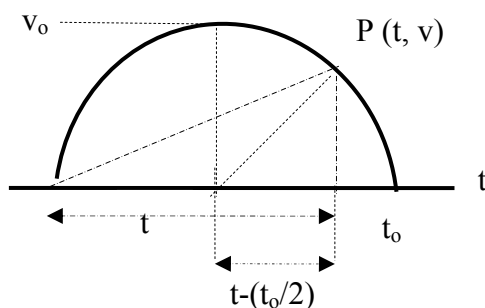
Sustituyendo en la ecuación

$$Fx = m \frac{v^2}{2} + Fx_0 - m \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{2F(x - x_0)}{m} + v_0^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2F(x - x_0)}{m} + v_0^2}$$

27.- Una partícula se desplaza con una velocidad indicada por la semicircunferencia de la gráfica inferior. La máxima velocidad se indica por  $v_0$ . Determinar el desplazamiento efectuado por la partícula en función de  $v_0$  y  $t_0$



Buscamos la relación entre la velocidad y el tiempo  
El centro de la circunferencia tiene por coordenadas  $\left(\frac{t_0}{2}, 0\right)$  y el radio de la circunferencia es  $t_0/2$ .



De la figura se deduce:

$$\left(t - \frac{t_0}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{t_0}{2}\right)^2 \Rightarrow t^2 + \frac{t_0^2}{4} - tt_0 + v^2 = \frac{t_0^2}{4} \Rightarrow v^2 = tt_0 - t^2$$

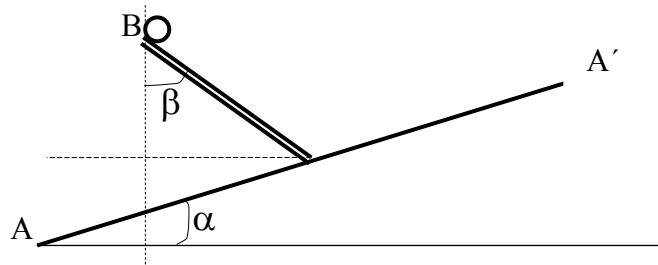
Aplicamos la ecuación anterior cuando  $t = \frac{t_0}{2}$

$$v_0^2 = \frac{t_0}{2} \cdot t_0 - \left(\frac{t_0}{2}\right)^2 = \frac{t_0^2}{4} \Rightarrow t_0 = 2v_0 \quad (1)$$

El desplazamiento que sufre la partícula entre  $t=0$  y  $t=t_0$  es igual al área bajo la curva velocidad tiempo. Esa área vale:

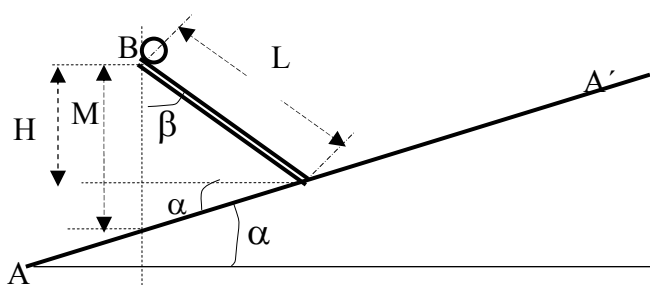
$$\Delta s = \frac{\pi \cdot \frac{t_0^2}{4}}{2} = \frac{\pi t_0 \cdot t_0}{8} = \frac{\pi}{8} \cdot 2v_0 \cdot t_0 = \frac{\pi v_0 t_0}{4}$$

28.- Un plano inclinado  $AA'$  forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Desde un punto  $B$  fijo se pueden construir diversos planos inclinados que lleguen al plano  $AA'$ .



Se pide el ángulo  $\beta$  que forma uno de los planos con la vertical (ver figura superior) en el que se cumpla que un cuerpo que parte, sin velocidad inicial, de  $B$  y desliza por él, llegue al plano  $AA'$  en el tiempo mínimo. Se supone que el cuerpo desliza sin rozamiento

En la figura inferior  $L$  representa la longitud del plano,  $M$  la distancia de  $B$  al plano  $AA'$  en dirección vertical



Conviene observar que si se cambia de plano, cambian  $\beta$ ,  $L$  y  $H$  pero permanecen constantes  $M$  y  $\alpha$ .

$$L = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g \cos\beta t^2 \quad (1)$$

Vamos a poner la variable  $L$  en función de  $\beta$ .

$$\cos\beta = \frac{H}{L} \quad ; \quad \text{tag}\alpha = \frac{M-H}{L \text{ sen}\beta} \quad \Rightarrow L \text{ tag}\alpha \text{ sen}\beta = M - L\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{M}{\text{tag}\alpha \text{ sen}\beta + \cos\beta} \quad (2)$$

Llevando la ecuación (2) a la (1)

$$\frac{M}{\operatorname{tag} \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos \beta} = \frac{1}{2} g \cos \beta t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{\frac{2M}{g}}{\operatorname{tag} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \cos^2 \beta}}$$

Como  $t$  ha de ser un mínimo derivamos la expresión anterior con respecto a  $\beta$ , e igualamos a cero.

$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{\frac{-2M}{g} [\operatorname{tag} \alpha (-\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) - 2 \cos \beta \operatorname{sen} \beta]}{(\operatorname{tag} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \cos^2 \beta)^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2 \sqrt{\frac{\frac{2M}{g}}{\operatorname{tag} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \cos^2 \beta}}$$

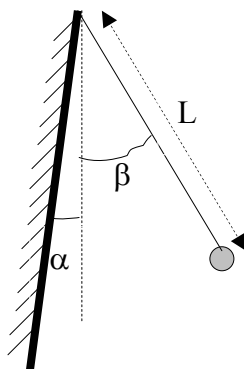
$$\Rightarrow \operatorname{tag} \alpha (-\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) - 2 \cos \beta \operatorname{sen} \beta = 0$$

Hacemos uso de las relaciones trigonométricas:  $\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta = \cos 2\beta$  y

$$2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta = \operatorname{sen} 2\beta$$

$$\operatorname{tag} \alpha \cdot \cos 2\beta - \operatorname{sen} 2\beta = 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{tag} \alpha}{\operatorname{tag} 2\beta} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{tag} \alpha}{\operatorname{tag} 2\beta} = 1 \Rightarrow \alpha = 2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\alpha}{2}$$

29.- Un péndulo simple de longitud  $L$  cuelga de una pared inclinada que forma un ángulo  $\alpha$  con la vertical.



El péndulo se separa de su posición de equilibrio un ángulo  $\beta > \alpha$  y se deja en libertad. Se admite que el choque con la pared es completamente elástico. Se pide calcular el periodo de las oscilaciones. Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son pequeños.

Si los ángulos son pequeños el movimiento del péndulo es un movimiento armónico simple y en principio vamos a referirnos a este movimiento.

Recordemos que a efectos de deducir las ecuaciones del movimiento armónico, éste puede considerarse como la proyección sobre un diámetro de un móvil que con velocidad angular constante recorre una circunferencia

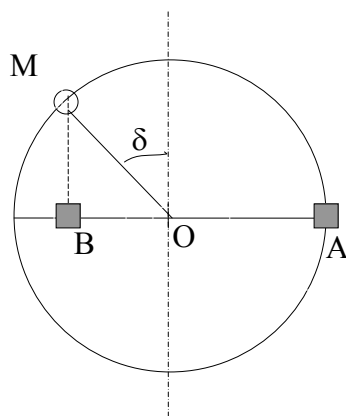


Fig. 1

Supongamos que  $M$  se desplaza por la circunferencia con velocidad angular constante  $\omega$  y que el móvil que efectúa el movimiento armónico está situado sobre el eje  $X$  en la posición  $A$  cuando  $t=0$ . El tiempo que emplea el móvil en ir desde  $A$  hasta  $B$ , es el mismo que  $M$  tarda en describir el ángulo  $\frac{\pi}{2} + \delta$ , y como lo hace a velocidad angular constante, podemos escribir

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\frac{\pi}{2} + \delta}{t} \Rightarrow t = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)T}{2\pi}$$

Siendo  $T$  el periodo del movimiento armónico. Si el móvil fuese de  $A$  a  $B$  y volviese de  $B$  a  $A$  emplearía un tiempo  $2t = T'$

$$T' = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)T}{\pi} \quad (1)$$

Aplicamos estos resultados al movimiento del péndulo del problema.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

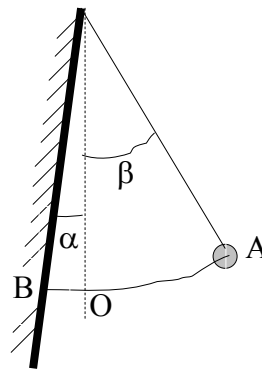


Fig. 2

De la figura 2 se deduce que

$$OA = \beta L \quad ; \quad OB = \alpha L$$

De la figura 1 se deduce que

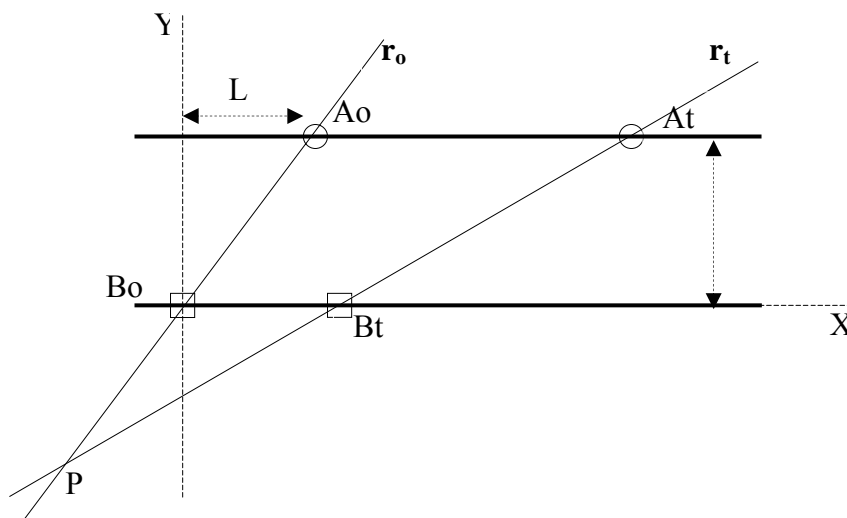
$$\text{sen} \delta = \frac{OB}{OA} = \frac{\alpha L}{\beta L} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Aplicando la ecuación (1) y la igualdad (2):

$$T' = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)T}{\pi} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \text{arco seno} \frac{\alpha}{\beta}\right)2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}{\pi} = \left(\pi + 2 \text{ arco seno} \frac{\alpha}{\beta}\right)\sqrt{\frac{L}{g}}$$

**30.-Un punto material A se desplaza con velocidad constante  $+v_A$  por una recta. Otro punto material B se desplaza con una velocidad constante  $+v_B$  por una recta paralela a la anterior cuya distancia es  $h$ . Demostrar que la recta que une los puntos A y B pasa siempre por un punto fijo P.**

Hacemos en primer lugar un esquema gráfico del problema



En la figura superior el móvil A ocupa una posición cualquiera en el tiempo  $t=0$  y el móvil B una posición cualquiera en el tiempo  $t=0$ . Si tomamos unos ejes coordenados centrados en la posición inicial del móvil B, las coordenadas cartesianas de ambos móviles en el tiempo  $t=0$ , son:

$$\text{Móvil A } (L, h) \quad ; \quad \text{Móvil B } (0, 0)$$

Al cabo de un tiempo  $t$  cualquiera el móvil A se ha desplazado hasta  $A_t$ , siendo las coordenadas de  $A_t(v_A t, h)$ .

En el mismo tiempo  $t$ , el móvil B se ha desplazado hasta  $B_t$ , siendo las coordenadas  $B_t(0, v_B t)$ .

Las rectas  $r_0$  y  $r_t$  se cortan en el punto P. Si lo que se quiere demostrar es que las rectas pasan siempre por P, las coordenadas de este punto deben ser independientes de  $t$ .

Hacemos uso de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

para las rectas  $r_0$  y  $r_t$

$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{h - 0}{L - 0} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{h}{L} x$$

$$\frac{y - 0}{x - v_B t} = \frac{h - 0}{(L + v_A t) - v_B t} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{h(x - v_B t)}{(L + v_A t) - v_B t}$$

Dado que el punto P pertenece a ambas rectas, resolvemos

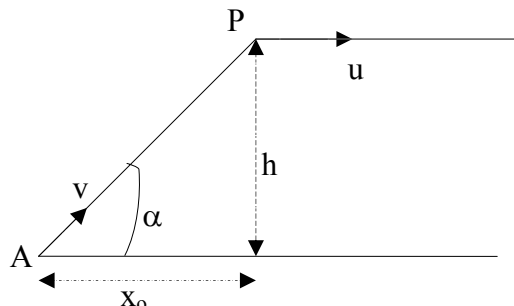
$$\frac{h}{L}x = \frac{h(x - v_B t)}{(L + v_A t) - v_B t} \Rightarrow xL + xv_A t - xv_B t = xL - v_B Lt \Rightarrow xt(v_A - v_B) = v_B Lt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{Lv_B}{v_A - v_B}$$

Sustituimos el valor de x en la ecuación de la recta  $r_0$

$$y = \frac{h}{L} \frac{Lv_B}{v_A - v_B} = \frac{h v_B}{v_A - v_B}$$

31.- Un pato vuela en línea recta con velocidad constante  $u$  y a una altura  $h$  sobre el suelo. Un cazador situado en  $A$  dispara una bala con velocidad  $v$  apuntando en la dirección del pato tal como indica la figura inferior. El pato es alcanzado por la bala y se pide la altura a la que volaba.



Dado que la bala alcanza al pato en un tiempo  $t_i$ , en ese instante las coordenadas del pato y de la bala son las mismas.

Coordenadas del pato en el tiempo  $t_i$  :  $(x_0 + u t_i ; h)$

La bala describe una trayectoria parabólica siendo sus ecuaciones

$$x = v \cos \alpha t; \quad y = v \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

Coordenadas de la bala en el tiempo  $t_i$  :  $(v \cos \alpha t_i, h = v \sin \alpha t_i - \frac{1}{2} g t_i^2)$

$$v \cos \alpha t_i = x_0 + u t_i \Rightarrow t_i = \frac{x_0}{v \cos \alpha - u}$$

$$v \sin \alpha t_i - \frac{1}{2} g t_i^2 = h$$

Sustituyendo el tiempo en la segunda ecuación

$$v \sin \alpha \frac{x_0}{v \cos \alpha - u} - \frac{1}{2} g \left( \frac{x_0}{v \cos \alpha - u} \right)^2 = h \Rightarrow \frac{x_0}{v \cos \alpha - u} \left[ v \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{g x_0}{v \cos \alpha - u} \right] = h$$

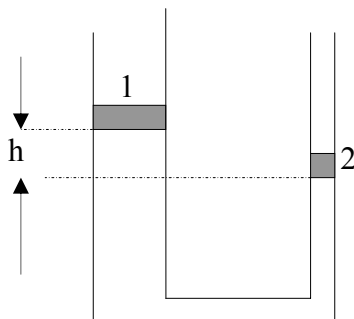
De la figura se deduce:  $\tan \alpha = \frac{h}{x_0} \Rightarrow x_0 = \frac{h}{\tan \alpha}$

$$\frac{h}{\tan \alpha (v \cos \alpha - u)} \left[ v \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{g h}{\tan \alpha (v \cos \alpha - u)} \right] = h \Rightarrow \frac{v \cos \alpha}{v \cos \alpha - u} - \frac{g h}{2 \tan^2 \alpha (v \cos \alpha - u)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g h}{2 \tan^2 \alpha (v \cos \alpha - u)^2} = \frac{v \cos \alpha}{v \cos \alpha - u} - 1 = \frac{u}{v \cos \alpha - u} \Rightarrow \frac{g h}{2 \tan^2 \alpha (v \cos \alpha - u)} = u$$

$$h = \frac{2u \tan^2 \alpha (v \cos \alpha - u)}{g}$$

32.-Dos vasos comunicantes de forma cilíndrica llevan sendos émbolos de masas  $M_1$  y  $M_2$  y áreas  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente. El líquido contenido en el vaso tiene una densidad  $\rho$ . En el equilibrio existe un desnivel  $h$  entre ambos émbolos tal como indica la figura inferior



Si sobre el émbolo 1 se coloca una pesa de masa  $m = M_2 = 2M_1$ , no existe desnivel entre ambos émbolos, pero si se coloca la misma pesa sobre el émbolo 2 se produce un desnivel  $H$ . Determinar el valor de  $H$  en función de  $h$ .

Dos puntos del mismo líquido que están al mismo nivel soportan las mismas presiones, por tanto:

$$\frac{M_1 g}{S_1} + \rho g h = \frac{M_2 g}{S_2} \Rightarrow \rho h = \frac{M_2}{S_2} - \frac{M_1}{S_1}$$

Cuando se coloca la pesa de masa  $m$  sobre el émbolo 1

$$\frac{M_1 g}{S_1} + \frac{m g}{S_1} = \frac{M_2 g}{S_2} \Rightarrow \frac{\frac{m}{2} + m}{S_1} = \frac{m}{S_2} \Rightarrow \frac{3}{2S_1} = \frac{1}{S_2} \Rightarrow S_2 = \frac{2S_1}{3}$$

$$\rho h = \frac{M_2}{S_2} - \frac{M_1}{S_1} = \frac{m}{S_2} - \frac{\frac{m}{2}}{S_1} = \frac{3m}{2S_1} - \frac{m}{2S_1} = \frac{m}{S_1}$$

Cuando la pesa de masa  $m$  se coloca sobre el émbolo 2

$$\frac{M_1 g}{S_1} + \rho g H = \frac{M_2 g}{S_2} + \frac{m g}{S_2} \Rightarrow \frac{\frac{m}{2}}{S_1} + \rho H = \frac{2m}{S_2} \Rightarrow \frac{m}{2S_1} + \rho H = \frac{2m}{\frac{2S_1}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho H = \frac{3m}{S_1} - \frac{m}{2S_1} = \frac{5m}{2S_1} = \frac{5}{2} \rho h \Rightarrow H = \frac{5}{2} h$$

**33.-Una partícula se mueve por el eje X, en sentido negativo, a velocidad constante  $v_1$ . Otra partícula lo hace por el eje Y también en sentido negativo y con una velocidad constante  $v_2$ . En el instante  $t=0$ , las partículas pasan por las posiciones  $x_0$  e  $y_0$  respectivamente. Determinar el tiempo que transcurre para que la distancia entre ellas sea mínima.**

Las ecuaciones del movimiento de las partículas son:

$$x = x_0 - v_1 t \quad ; \quad y = y_0 - v_2 t$$

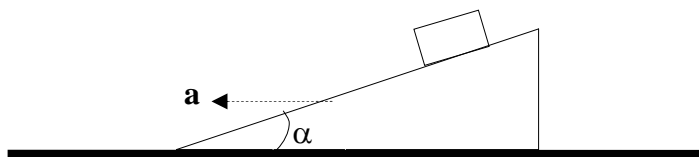
La distancia entre ellas

$$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_0 - v_1 t)^2 + (y_0 - v_2 t)^2}$$

Para hallar la distancia mínima derivamos la función anterior respecto de la variable tiempo e igualamos a cero

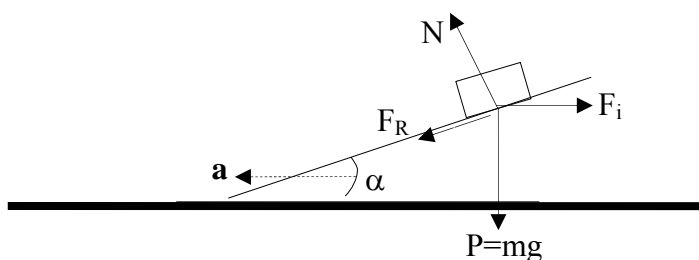
$$\frac{dD}{dt} = \frac{2(x_0 - v_1 t) \cdot (-v_1) + 2(y_0 - v_2 t) \cdot (-v_2)}{2\sqrt{(x_0 - v_1 t)^2 + (y_0 - v_2 t)^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x_0 v_1 + y_0 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

34.-Un prisma cuyo ángulo es  $\alpha$  se mueve por un suelo horizontal sin rozamiento con una aceleración constante paralela al suelo. Sobre él está situado un cuerpo.



Determinar el valor de la aceleración del prisma para la que el cuerpo comience a deslizarse hacia arriba del prisma. El coeficiente de rozamiento entre el prisma y el cuerpo es  $\mu$ .

En la figura inferior está dibujado el diagrama de fuerzas para el cuerpo con inclusión de la fuerza de inercia ya que el sistema elegido está acelerado



$F_i = ma$ , fuerza de inercia

$P = mg$ , peso del cuerpo

$F_R = \mu N$ , fuerza de rozamiento

$N$  = normal, fuerza con que el plano empuja al cuerpo

Descomponiendo las fuerzas sobre dos ejes perpendiculares, X e Y, siendo el X Paralelo al plano y el Y perpendicular al mismo, resulta:

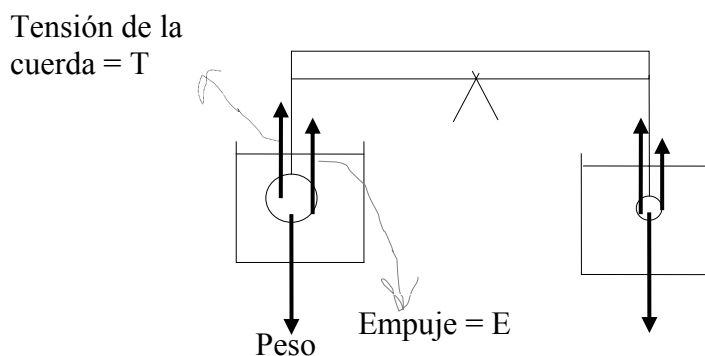
$$\left. \begin{aligned} F_i \cos \alpha &= F_R + mg \operatorname{sen} \alpha \\ N &= mg \cos \alpha + F_i \operatorname{sen} \alpha \\ F_R &= \mu N \end{aligned} \right\}$$

Combinando las tres ecuaciones se llega a:

$$\begin{aligned} F_i \cos \alpha &= \mu mg \cos \alpha + \mu F_i \operatorname{sen} \alpha + mg \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow ma(\cos \alpha - \mu \operatorname{sen} \alpha) &= mg(\mu \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow a(1 - \mu \operatorname{tag} \alpha) &= g(\mu + \operatorname{tag} \alpha) \Rightarrow a = g \frac{\mu + \operatorname{tag} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tag} \alpha} \end{aligned}$$

**35.-En los extremos de una palanca de brazos iguales se cuelgan dos cuerpos de la misma masa. Uno de los cuerpos se introduce en un líquido de densidad  $\rho_1$  y el otro en un líquido de densidad  $\rho_2$ , observándose que la palanca sigue en equilibrio. Calcular la relación de densidades entre ambos cuerpos.**

En la figura inferior se hace un esquema de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos



Sobre cada cuerpo actúan su peso  $P$ , la tensión de la cuerda  $T$  y el empuje del líquido. Para ambos cuerpos el peso es el mismo por lo dicho en el enunciado, la tensión es la misma porque la reacción a cada  $T$  está aplicada en la palanca y ésta se encuentra en equilibrio, finalmente los empujes han de ser iguales y si los líquidos tienen diferentes densidades es que los cuerpos tienen diferentes volúmenes.

$$V_1\rho_1g = V_2\rho_2g \Rightarrow \frac{m}{d_1}\rho_1g = \frac{m}{d_2}\rho_2g \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

**36.-Un cilindro, de densidad  $\rho$  y altura  $h$ , flota en la zona de separación de dos líquidos de densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$  respectivamente, siendo  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ . Determinar la altura  $x$  del cilindro que se encuentra sumergido en el líquido de densidad  $\rho_2$ .**

Al estar el cilindro en equilibrio es porque el peso del mismo se iguala con la suma de los empujes que sufre por parte de los dos líquidos. Designamos con  $x$  a la parte del cilindro sumergida en el líquido de densidad  $\rho_2$ , por tanto, la altura que está en el líquido de densidad  $\rho_1$  es  $h-x$ , por  $m$  a la masa total del cilindro y por  $S$  al área de la base del cilindro.

$$mg = Sh\rho g = Sx\rho_2g + S(h-x)\rho_1g \Rightarrow h\rho = x\rho_2 + (h-x)\rho_1 \Rightarrow$$

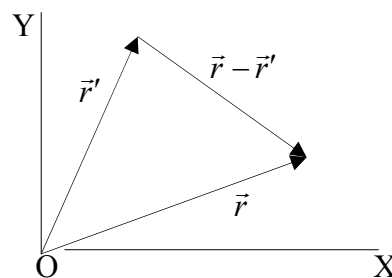
$$\Rightarrow h\rho - h\rho_1 = x\rho_2 + h\rho_1 \Rightarrow x = \frac{h(\rho - \rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}$$

**37.-Desde el mismo lugar y con un intervalo de tiempo  $\tau$  se lanzan dos cuerpos con la misma velocidad  $v$  y el mismo ángulo  $\alpha$  con la horizontal ¿Cuáles son las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo lanzado en primer lugar visto desde un sistema ligado al cuerpo lanzado en segundo lugar?**

Las ecuaciones del movimiento de los dos cuerpos ligados a un sistema inercial que esta sobre el suelo horizontal son:

$$x = v \cos \alpha t \quad ; \quad y = v \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x' = v \cos \alpha (t - \tau) \quad ; \quad y' = v \sin \alpha (t - \tau) - \frac{1}{2} g (t - \tau)^2$$



El vector de posición del primer cuerpo respecto del segundo

$$\vec{r} - \vec{r}' = x_r \vec{i} + y_r \vec{j} = (x - x') \vec{i} + (y - y') \vec{j}$$

Las posiciones vistas desde el segundo cuerpo son:

$$x_r = x - x' = v \cos \alpha \cdot t - v \cos \alpha \cdot (t - \tau) = v \cos \alpha \cdot \tau$$

$$y_r = y - y' = v \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 - v \sin \alpha \cdot (t - \tau) + \frac{1}{2} g (t - \tau)^2 = v \sin \alpha \cdot \tau - \frac{1}{2} g (-\tau^2 + 2t\tau) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_r = v \sin \alpha \cdot \tau + \frac{g\tau^2}{2} - g t \tau$$

Las velocidades relativas son:

$$v_x = \frac{dx_r}{dt} = 0 \quad ; \quad v_y = \frac{dy_r}{dt} = -g\tau$$

**38.-Un tren parte de la estación a las 12 horas según el reloj de la estación y se desplaza con movimiento uniformemente acelerado. Un observador situado en el andén frente a la cabecera del tren observa que su reloj marca las 12 horas cuando pasa por delante de él, el penúltimo vagón. Este penúltimo vagón tarda 10 segundos en pasar por delante del observador mientras que el último vagón emplea 8 segundos. Calcular cuánto se retrasa el reloj del observador respecto del reloj de la estación.**

Designamos con  $\tau$  al tiempo que se retrasa el reloj del observador respecto del de la estación y con  $L$  la longitud de cada vagón del tren.

La velocidad del tren cuando han transcurrido  $\tau$  segundos es  $a\tau$ , siendo  $a$ , la aceleración constante del tren

Para el penúltimo vagón su velocidad cuando pasa por delante del observador es  $a\tau$ , esto es, la velocidad del tren

$$L = a\tau \cdot 10 + \frac{1}{2} a 10^2$$

Cuando pasan los dos vagones, penúltimo y último del tren, por delante del observador, el tiempo total es  $10+8 = 18$  segundos

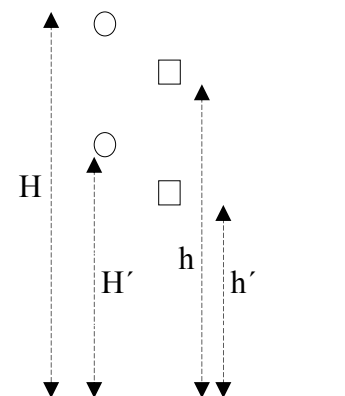
$$2L = a\tau \cdot 18 + \frac{1}{2} a 18^2$$

De ambas ecuaciones se deduce:

$$2\left(a\tau \cdot 10 + \frac{1}{2} a 10^2\right) = a\tau \cdot 18 + \frac{1}{2} a 18^2 \Rightarrow 20\tau + 100 = 18\tau + 162 \Rightarrow \tau = \frac{62}{2} = 31 \text{ s}$$

**39.-Un submarino desciende en vertical con una velocidad constante  $v$ . En un determinado instante emite un sonido que dura un tiempo  $T_0$ . El sonido se refleja en el fondo del mar y llega al submarino y el tiempo que dura el sonido reflejado medido en el submarino es  $T$ . Si la velocidad del sonido en el agua es  $c$ , determinar la velocidad con la que se sumerge el submarino.**

Designamos con  $H$  la altura a la que está el submarino respecto del fondo del mar cuando empieza a emitir el sonido y con  $H'$  la posición cuando termina de emitirse la señal. Con  $h$  designamos la posición del submarino cuando empieza a recibir la señal reflejada en el fondo y  $h'$  cuando termina. La figura inferior aclara estos valores.



en el fondo y  $h'$  cuando termina. La figura inferior aclara estos valores. Las posiciones se han puesto separadas para claridad de la figura. Entre las posiciones  $H$  y  $H'$  el tiempo transcurrido es  $T_0$  y entre  $h$  y  $h'$ ,  $T$ .

$$H - H' = vT_0 \quad (1) \quad ; \quad h - h' = vT \quad (2)$$

El sonido emitido en  $H$  viaja  $H+h$  al llegar al submarino y emplea un tiempo  $\tau_1$  y en ese mismo tiempo el submarino recorre  $H-h$

$$H + h = c\tau_1; H - h = v\tau_1 \Rightarrow \frac{H+h}{c} = \frac{H-h}{v} \Rightarrow H(c-v) = h(c+v) \Rightarrow H = \frac{c+v}{c-v} h$$

El fin de la señal sonora se emite en la posición del submarino  $H'$  y esa señal recorre la distancia  $H'+h'$  cuando llega al submarino empleando un tiempo  $\tau_2$  y en ese mismo tiempo el submarino recorre  $H'-h'$ .

$$H'+h' = c\tau_2; H'-h' = v\tau_2 \Rightarrow \frac{H'+h'}{c} = \frac{H'-h'}{v} \Rightarrow H'(c-v) = h'(c+v) \Rightarrow H' = \frac{c+v}{c-v} h'$$

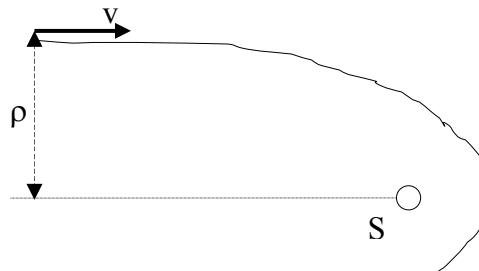
Sustituyendo  $H$  y  $H'$  en la ecuación (1)

$$\frac{c+v}{c-v}h - \frac{c+v}{c-v}h' = vT_o \Rightarrow \frac{c+v}{c-v}(h - h') = vT_o$$

Sustituyendo en la última ecuación  $h-h'$  se tiene:

$$\frac{c+v}{c-v}vT = vT_o \Rightarrow \frac{c+v}{c-v}T = T_o \Rightarrow cT + vT = cT_o - vT_o \Rightarrow v = \frac{T_o - T}{T_o + T}c$$

40.-Una masa  $m$  proveniente del infinito posee una velocidad  $v$  y se acerca al Sol, siendo su parámetro de impacto  $\rho$ , tal como se observa en la figura.



**Hallar la distancia mínima a la que la masa  $m$  se acerca al Sol. Constante de gravitación,  $G$  ; Masa del Sol,  $M_S$**

Designamos con  $d$  a la mínima distancia de la masa al Sol y a  $v_d$  su velocidad en esa posición. La conservación del momento angular nos permite escribir

$$mv \rho = mv_d d \quad \Rightarrow \quad v \rho = v_d d \quad (1)$$

Por la conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_d^2 - G \frac{M_S m}{d} \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_d^2 - 2 \frac{GM_S}{d} \quad \Rightarrow \quad v_d = \sqrt{v^2 + 2 \frac{GM_S}{d}}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

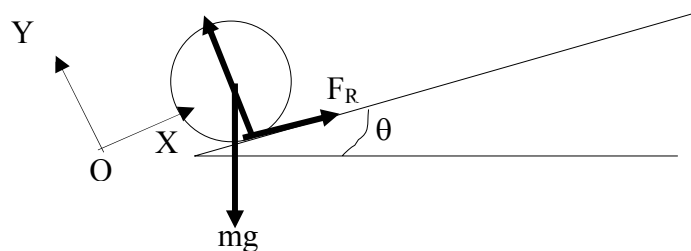
$$v \rho = \left( \sqrt{v^2 + 2 \frac{GM_S}{d}} \right) d \quad \Rightarrow \quad v^2 d^2 + 2GM_S d - v^2 \rho^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d^2 + \frac{2GM_S d}{v^2} - \rho^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$d = \frac{-2 \frac{GM_S}{v^2} + \sqrt{4 \frac{G^2 M_S^2}{v^4} + 4 \rho^2}}{2} = \sqrt{\frac{G^2 M_S^2}{v^4} + \rho^2} - \frac{GM_S}{v^2}$$

**41.-Un cilindro homogéneo de masa  $m$  y radio  $R$  se hace girar hasta alcanzar una velocidad angular  $\omega_0$ , luego se coloca suavemente sobre un plano inclinado de ángulo  $\theta$ . ¿Hasta qué altura ascenderá el cilindro? El coeficiente de rozamiento es  $\mu$ , cumpliéndose que  $\mu > \tan \theta$ .**

Al principio el cilindro tendrá que ir adquiriendo velocidad de traslación del centro de masas al mismo tiempo que su velocidad angular disminuye. El diagrama de fuerzas es el siguiente:



Las ecuaciones del movimiento, respecto de los ejes OXY, son:

$$\left. \begin{aligned} F_R - mg \operatorname{sen}\theta &= ma \\ F_R R &= I\alpha = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \alpha \\ F_R &= \mu N = \mu mg \operatorname{cos}\theta \end{aligned} \right\}$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene

$$a = g(\mu \operatorname{cos}\theta - \operatorname{sen}\theta) \quad ; \quad \alpha = \frac{2F_R}{mR} = \frac{2\mu mg \operatorname{cos}\theta}{mR} = \frac{2\mu g \operatorname{cos}\theta}{R}$$

Para la velocidad lineal del centro de masas

$$v = 0 + g(\mu \operatorname{cos}\theta - \operatorname{sen}\theta)t$$

Para la velocidad angular del cilindro

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - \frac{2\mu g \operatorname{cos}\theta}{R}t$$

La velocidad del centro de masas del cilindro aumenta y la velocidad de rotación disminuye, llegará un momento en el que  $v = \omega R$ , y esto ocurre en un intervalo de tiempo  $t$  y el movimiento del cilindro en el plano pasa de ser de rodadura y deslizamiento a rodadura.

$$v = \omega R \Rightarrow g(\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)t = \left( \omega_0 - \frac{2\mu g \cos\theta}{R} t \right) R \Rightarrow t = \frac{\omega_0 R}{g(\mu \cos\theta - \text{sen}\theta + 2\mu \cos\theta)} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\omega_0 R}{g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}$$

Las velocidad lineal del centro de masas y angular del cilindro son:

$$v = g(\mu \cos\theta - \text{sen}\theta) \cdot \frac{\omega_0 R}{g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)} = \frac{\omega_0 R(\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}{3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta}$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu g \cos\theta}{R} \cdot \frac{\omega_0 R}{g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)} = \omega_0 \left( 1 - \frac{2\mu \cos\theta}{3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta} \right)$$

Desde que el cilindro se colocó sobre el plano hasta el tiempo  $t$ , el cilindro ha ascendido una altura  $H$  y ha recorrido una distancia  $L$  sobre el plano

$$L = \frac{H}{\text{sen}\theta} = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2} \text{sen}\theta \cdot g(\mu \cos\theta - \text{sen}\theta) \cdot \frac{\omega_0^2 R^2}{g^2(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2} \Rightarrow$$

$$H = \frac{\omega_0^2 R^2 \text{sen}\theta \cdot (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}{2g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2}$$

A partir del momento en que se ha llegado a la rodadura sin deslizamiento, admitimos que la energía total del cilindro, que es suma de la de rotación más traslación, se convierte íntegramente en energía potencial

$$\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = mgh \Rightarrow \frac{1}{4} R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} v^2 = gh \Rightarrow \frac{1}{4} v^2 + \frac{1}{2} v^2 = gh \Rightarrow h = \frac{3v^2}{4g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{3\omega_0^2 R^2 (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2}{4g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2}$$

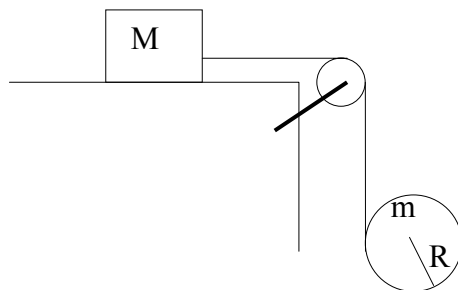
La altura total a la que sube el cilindro es:

$$H_{\text{total}} = H + h = \frac{\omega_0^2 R^2 \text{sen}\theta \cdot (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}{2g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2} + \frac{3\omega_0^2 R^2 (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2}{4g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2} \Rightarrow$$

$$H_{\text{total}} = \frac{[\omega_0^2 R^2 (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)][2\text{sen}\theta + 3\mu \cos\theta - 3\text{sen}\theta]}{4g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2} \Rightarrow$$

$$H_{\text{total}} = \frac{[\omega_0^2 R^2 (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)][3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta]}{4g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)^2} = \frac{\omega_0^2 R^2 (\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}{4g(3\mu \cos\theta - \text{sen}\theta)}$$

42.- En el esquema de la figura  $M = 10 \text{ kg}$  y  $m = 5 \text{ kg}$  y radio  $R = 8 \text{ cm}$ . La polea fija y la cuerda tienen masas despreciables. La cuerda puede desenrollarse por la polea móvil  $m$  sin resbalar.



- a) Calcular el menor coeficiente de rozamiento de  $M$  con la mesa para que cuando el sistema esté en libertad la masa  $M$  permanezca en reposo.
- b) Si el coeficiente de rozamiento entre  $M$  y la mesa es  $0,05$  determinar la tensión de la cuerda y las aceleraciones lineales de  $M$  y  $m$  respecto del suelo.

a) En la figura 1 se indican las fuerzas que actúan sobre  $M$  y  $m$ .

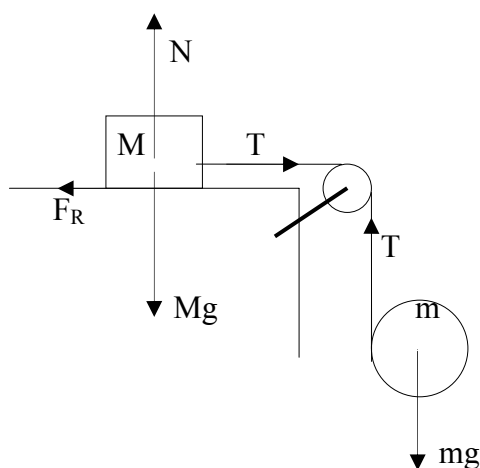


Fig.1

Para la masa  $M$  ,  $T - F_R = Ma_M = 0$

Para la masa  $m$  
$$\left. \begin{aligned} T \cdot R = I\alpha = \frac{1}{2} mR^2\alpha &\Rightarrow T = \frac{1}{2} mR\alpha \\ mg - T = ma_m \\ a_m = \alpha R \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo  $\alpha$  de la tercera ecuación en la primera y  $a_m$  de la segunda resulta

$$T = \frac{1}{2} mR \frac{a_m}{R} = \frac{1}{2} m \left( g - \frac{T}{m} \right) \Rightarrow 2T = mg - T \Rightarrow T = \frac{mg}{3}$$

$$\text{Como } T = F_R = \mu N = \mu Mg = \frac{mg}{3} \Rightarrow \mu = \frac{m}{3M} = \frac{5}{3 \cdot 10} = 0,17$$

Si el coeficiente de rozamiento entre M y la mesa es inferior a 0,17 habrá deslizamiento de la masa M sobre la mesa.

b) Dado que el coeficiente de rozamiento es  $0,05 < 0,17$ , la masa M deslizará sobre la mesa. La polea móvil se moverá hacia abajo al desenrollarse la cuerda y también al avanzar la masa M sobre la mesa, respecto del suelo la aceleración lineal de m es la suma de la aceleración de M más la aceleración producida al desenrollarse la cuerda.

$$T - \mu Mg = Ma_M \Rightarrow a_M = \frac{T}{M} - \mu g$$

$$T \cdot R = I\alpha = \frac{1}{2} mR^2 \alpha \Rightarrow T = \frac{1}{2} mR\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2T}{mR} \Rightarrow \frac{a_m}{R} = \frac{2T}{mR} \Rightarrow a_m = \frac{2T}{m}$$

$$a_m = \alpha R$$

$$mg - T = m(a_M + a_m)$$

Sustituyendo en la última ecuación

$$\begin{aligned} mg - T &= m \left( \frac{T}{M} - \mu g + \frac{2T}{m} \right) \Rightarrow mg - T = T \frac{m}{M} - m\mu g + 2T \Rightarrow T \left( 3 + \frac{m}{M} \right) = mg(1 + \mu) \Rightarrow \\ &\Rightarrow T = \frac{mg(1 + \mu)}{3 + \frac{m}{M}} = \frac{5 \cdot 9,8 \cdot 1,05}{3 + \frac{5}{10}} = 14,7 \text{ N} \end{aligned}$$

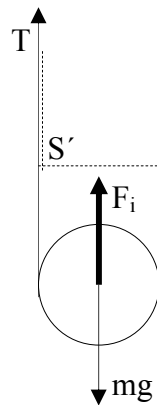
$$a_M = \frac{T}{M} - \mu g = \frac{14,7}{10} - 0,05 \cdot 9,8 = 0,98 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_m = \frac{2T}{m} = \frac{2 \cdot 14,7}{5} = 5,88 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La aceleración lineal de la polea móvil respecto del suelo es:

$$a = a_M + a_m = 0,98 + 5,88 = 6,86 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Podemos calcular la aceleración de la polea móvil de otra manera y es tomando un sistema de referencia no inercial  $S'$ , situado en la cuerda que desciende con aceleración  $a_M$ . En este sistema hemos de introducir una fuerza de inercia contraria a esta aceleración. Calculamos la aceleración relativa  $a_m$  respecto de  $S'$ .



$$F_i = |-ma_M| = ma_M$$

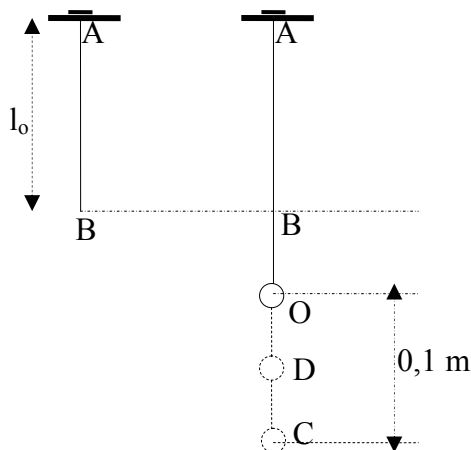
$$mg - T - ma_M = ma_m \Rightarrow a_m = g - \frac{T}{m} - a_M \Rightarrow a_m = g - \frac{T}{m} - \frac{T}{M} + \mu g =$$

$$= g(1 + \mu) - T\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow a_m = 9,8 \cdot 1,05 - 14,7\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) = 5,88 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

De igual modo, para conocer la aceleración absoluta sumariamos a esta aceleración relativa  $a_m$  la de arrastre  $a_M$ .

$$\vec{F} = IB_o \frac{a}{2} \vec{i} + IB_o a \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \vec{j}$$

43.-Una cuerda elástica que tiene una longitud natural  $l_0$ , sigue la ley de Hooke (la fuerza es directamente proporcional al alargamiento). Un extremo de la cuerda está sujeta firmemente en A y en el otro (B) se ha colocado una masa  $m = 0,2 \text{ kg}$  como indica la figura.



La masa  $m$  se lleva suavemente hasta que alcanza la posición de equilibrio en O. Después se estira la cuerda hasta la posición C y desde allí se deja en libertad a la masa  $m$  y se mide el periodo de oscilación que es  $T = 2 \text{ s}$ .

a) Calcular la constante  $k$  de la ley de Hooke para la cuerda

b) La velocidad de la masa  $m$  en el D siendo  $OD = 0,05 \text{ m}$

c) El tiempo que emplea la masa  $m$  en ir desde C a D

d) La máxima energía cinética de  $m$ .

e) Ahora la masa  $m$  se lleva hasta el punto A y se deja caer libremente se pide calcular el tiempo que emplea en retornar por primera vez al punto A.

a) El periodo de oscilación de la masa  $m$  está relacionado con la constante  $k$  y la masa  $m$

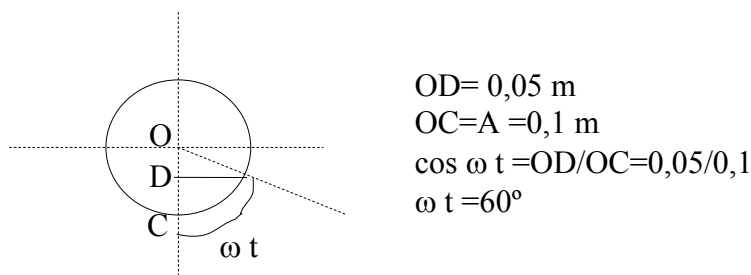
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,2}{2^2} = 1,97 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

b) En la posición C la velocidad de la masa  $m$  es cero y la distancia a O es  $0,1 \text{ m}$ , por tanto, la ecuación del movimiento armónico que describe la masa  $m$  oscilando a uno y otro lado del punto O, es:

$$x = A \cos \omega t = 0,1 \cos \frac{2\pi}{T} t \quad \text{o también} \quad x = 0,1 \sin \left( \frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen} \omega t$$

En la posición D el ángulo  $\omega t$  es:



$$v = -0,1 \cdot \frac{2\pi}{2} \operatorname{sen} 60^\circ = -0,27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c)

$$\omega t = 60^\circ = \frac{60 \cdot \pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{1}{3} \text{ s}$$

d) La máxima energía cinética ocurre cuando la masa  $m$  pase por el punto O de equilibrio y debido a que el sistema es conservativo esa energía cinética es igual a la potencial en el punto C.

$$E_c(O) = E_p(C) = \frac{1}{2} \cdot 1,97 \cdot 0,1^2 = 9,9 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

e) Al llevar la masa  $m$  al punto A, la cuerda se dobla y la masa  $m$  cae libremente desde A hasta el punto B en que la cuerda tienen su longitud natural, a partir de ese lugar la cuerda comienza a estirarse, siguiendo la ley de Hooke, como consecuencia de ello, la masa  $m$  empieza a disminuir su energía cinética que se convierte en potencial elástica en la cuerda, esto ocurre hasta que la velocidad de la masa es cero. Si tomamos como referencia de la energía potencial gravitatoria la posición de la masa  $m$  cuando su velocidad es cero (punto que designamos con Q) resulta que  $m$  en A tiene energía cinética y energía potencial gravitatoria. Designamos con  $\Delta x$  la distancia entre el punto A y la posición en que la masa  $m$  tiene velocidad cero.

$$E_c(A) + E_p(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg \Delta x = \frac{1}{2} m (2gl_0) + mg \Delta x = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2mgl_0 + 2mg \Delta x = k (\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta x^2 - \frac{2mg}{k} \Delta x - \frac{2mgl_0}{k} = 0 \Rightarrow$$

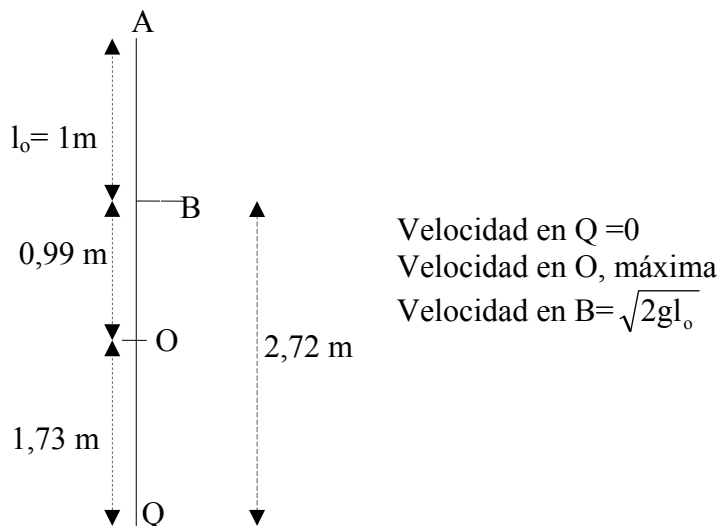
$$\Rightarrow \Delta x^2 - 1,99 \Delta x - 1,99 = 0 \Rightarrow \Delta x = 2,72 \text{ m}$$

La posición del punto O corresponde al lugar en que equilibran el peso de la masa  $m$  y la fuerza elástica que sobre ella ejerce la cuerda.

$$mg = k \overline{OA} \Rightarrow \overline{OA} = \frac{mg}{k} = \frac{0,2 \cdot 9,8}{1,97} = 0,99 \text{ m}$$

La masa  $m$  cae libremente de A hasta B, luego efectúa un movimiento armónico de periodo  $T=2$  segundos y amplitud  $2,72-0,99=1,73$  m entre B y Q, sigue con movimiento armónico entre Q y B y finalmente a partir de B se mueve libremente en el campo gravitatorio. El tiempo total en retornar a A es:

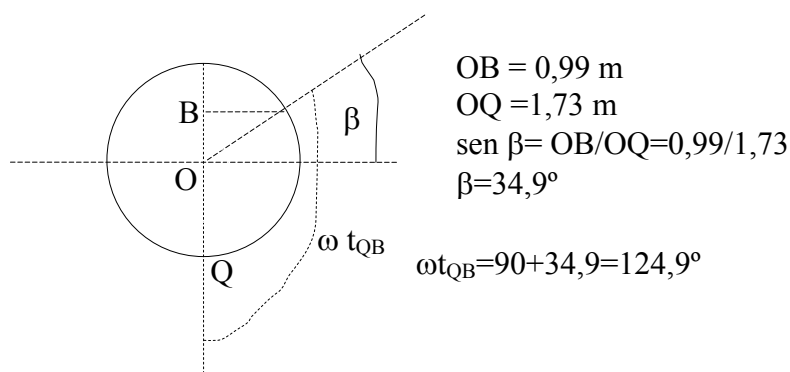
2( tiempo de caída libre desde A a B + tiempo desde B a Q)



Tiempo desde A hasta B  $l_0 = \frac{1}{2}gt_{AB}^2 \Rightarrow t_{AB} = \sqrt{\frac{2l_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9,8}} = 0,45$  s

El tiempo de B a Q es igual al tiempo desde Q a B

Posición de la masa  $m$  en B



$$\omega t_{QB} = 124,9^\circ = 124,9 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 2,18 \text{ rad} \Rightarrow t_{QB} = \frac{2,18}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{2,18}{\pi} = 0,69 \text{ s}$$

Tiempo de retornar a A =  $2 \cdot (0,45 + 0,69) = 2,28$  s

**44.-Desde una altura  $h$  sobre el suelo y en dirección horizontal se lanzan simultáneamente dos cuerpos con velocidades  $v_1$  y  $v_2$ . El primero hacia la derecha y el segundo hacia al izquierda. Calcular la distancia entre ambos cuerpos cuando sus vectores velocidad sean perpendiculares entre sí.**

Tomando los ejes X e Y sobre el suelo, las ecuaciones de los cuerpos son

$$\begin{aligned}x_1 &= v_1 t & y_1 &= h - \frac{1}{2}gt^2 & v(1)_X &= \frac{dx_1}{dt} = v_1 & ; v(2)_Y &= -gt \\x_2 &= -v_2 t & y_2 &= h - \frac{1}{2}gt^2 & v(2)_X &= \frac{dx_2}{dt} = -v_2 & ; v(2)_Y &= -gt\end{aligned}$$

Escribimos los vectores velocidad de cada cuerpo en función de los vectores unitarios sobre los ejes:

$$\vec{v}(1) = v_1 \vec{i} - gt \vec{j} \quad ; \quad \vec{v}(2) = -v_2 \vec{i} - gt \vec{j}$$

Si los vectores velocidad son perpendiculares su producto escalar es nulo, lo que sucederá en un instante  $t_p$ .

$$\vec{v}(1) \cdot \vec{v}(2) = 0 = v_1 v_2 - g^2 t_p^2 \quad \Rightarrow \quad t_p = \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g}$$

Llevamos el instante  $t_p$ , a las ecuaciones de las posiciones en la dirección del eje X de los cuerpos y restándolas calculamos la distancia entre ellos.

$$\Delta x = x_1(t_p) - x_2(t_p) = v_1 \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} - \left( -v_2 \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} \right) = \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} (v_1 + v_2)$$

45.- Supongamos que la energía potencial de un cuerpo está dada por la expresión  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ , siendo  $k$  una constante. Si la amplitud de la oscilación es  $x_0$ , para una distancia  $x$  la velocidad es  $v$ . ¿Cuál sería la velocidad para una amplitud  $nx_0$  y para una distancia  $nx$ ? Demostrar que el periodo de la oscilación no depende de la amplitud.

Teniendo en cuenta que la fuerza es igual a menos el gradiente de la energía potencial y dado que el movimiento es monodimensional, podemos escribir:

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (1)$$

La ecuación (1) es una ecuación diferencial tal que  $x$  es una función que derivada dos veces nos dé de nuevo la función, esta función es una función armónica

$$x = A \operatorname{sen} \omega t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 x \quad (2)$$

Identificando (2) con (1)

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{k}{m} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El periodo es independiente de la amplitud. Se trata de un movimiento armónico simple. Podemos aplicar el principio de conservación de la energía, entre un punto cualquiera del recorrido y el de amplitud.

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{k}{m}(x_0^2 - x^2) = v^2$$

$$\frac{1}{2}k(nx_0)^2 = \frac{1}{2}k(nx^2) + \frac{1}{2}mv'^2 \Rightarrow \frac{k}{m}n^2(x_0^2 - x^2) = v'^2$$

De las dos ecuaciones se deduce:

$$\frac{v'^2}{v^2} = n^2 \Rightarrow v' = nv$$

46.-Un péndulo simple está formado por una cuerda de masa despreciable y longitud  $l$ , y una pequeña esfera de hierro de masa  $m$ . El periodo de este péndulo es  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . Si este péndulo se hace oscilar:

a) en el campo gravitatorio y por encima de un imán, siendo  $F_M$  la fuerza magnética perpendicular que actúa sobre la esfera de hierro el periodo cambia a  $T_1$ .

b) Si se hace oscilar entre los polos de un imán que provoca una fuerza magnética horizontal el periodo es  $T_2$ . Calcular la fuerza magnética en cada caso. Calcular para el caso b) el valor del ángulo que forma el péndulo con la vertical en su posición estable.

a) Las fuerzas que actúan sobre la esfera de hierro son las indicadas en la figura

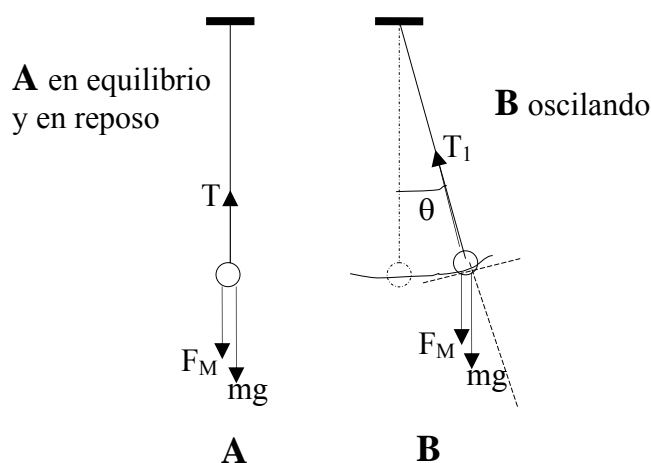


Fig.1

Descomponiendo las fuerzas peso y  $F_M$  en dirección perpendicular a la dirección del hilo y teniendo en cuenta que  $\theta$  sea pequeño,  $\text{sen } \theta \approx \theta$ , y que el valor del arco es igual al valor del ángulo en radianes por el radio, podemos escribir:

$$(F_M + mg)\text{sen } \theta = F \Rightarrow (F_M + mg)\theta = F \Rightarrow (F_M + mg) \frac{x}{l} \Rightarrow F = kx$$

Siendo una constante  $\frac{F_M + mg}{l} = k$  resulta finalmente:  $F = k \cdot x$

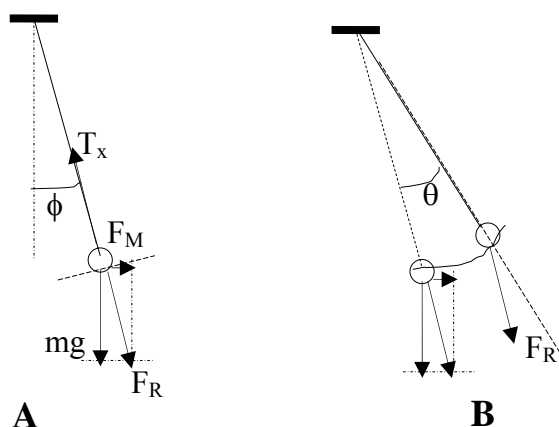
Se trata de un movimiento armónico cuyo periodo es:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{F_M + mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F_M + mg}} \Rightarrow T_1^2 = 4\pi^2 \frac{ml}{F_M + mg}$$

Combinando la última ecuación con la del péndulo simple:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{ml}{F_M + mg} \Rightarrow T_1^2 = T_0^2 \frac{g}{l} \frac{ml}{F_M + mg} \Rightarrow F_M + mg = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2 mg \Rightarrow$$

$$F_M = mg \left[ \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2 - 1 \right]$$



**A** en equilibrio  
y en reposo

**B** oscilando

Fig.2

Ahora actúan dos fuerzas perpendiculares sobre la esfera de hierro que dan lugar a una resultante  $F_R = \sqrt{(mg)^2 + F_M^2}$  y a una posición de equilibrio del péndulo que forma con la dirección vertical un ángulo  $\phi$ . Si ahora el péndulo se separa un ángulo pequeño  $\theta$  de la posición de equilibrio el péndulo oscila.

$$F_R \sin \theta = F \Rightarrow F_R \theta = F \Rightarrow \left( \sqrt{(mg)^2 + F_M^2} \right) \frac{x}{l} = F \Rightarrow F = kx$$

Siendo una constante  $\frac{\sqrt{(mg)^2 + F_M^2}}{l} = k$

Se trata de un movimiento armónico cuyo periodo es:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{\sqrt{(mg)^2 + F_M^2}}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{\sqrt{(mg)^2 + F_M^2}}} \Rightarrow T_2^4 = (2\pi)^4 \frac{m^2 l^2}{(mg)^2 + F_M^2}$$

Para el péndulo simple tenemos:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T_o^4 = (2\pi)^4 \frac{l^2}{g^2}$$

A partir de las dos últimas ecuaciones

$$T_2^4 = (2\pi)^4 \frac{m^2 l^2}{(mg)^2 + F_M^2} = \frac{T_o^4 g^2}{l^2} \frac{m^2 l^2}{(mg)^2 + F_M^2} \Rightarrow (mg)^2 + F_M^2 = \frac{T_o^4 g^2 m^2}{T_2^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_M^2 = (mg)^2 \frac{T_o^4}{T_2^4} - (mg)^2 \Rightarrow F_M = mg \sqrt{\frac{T_o^4}{T_2^4} - 1}$$

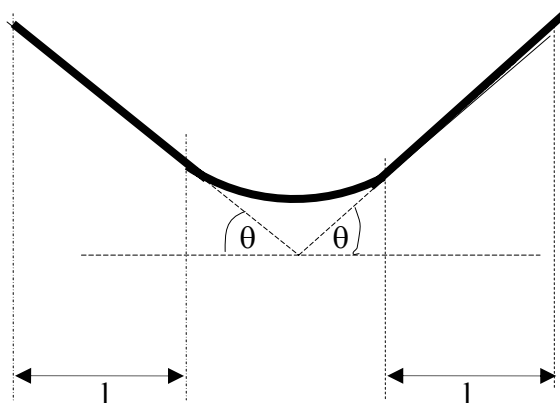
Para calcular el ángulo  $\phi$ , observamos la figura 2.

$$\text{tag } \phi = \frac{F_M}{mg} = \frac{mg \sqrt{\frac{T_o^4}{T_2^4} - 1}}{mg} = \sqrt{\frac{T_o^4}{T_2^4} - 1} = \frac{\sqrt{T_o^4 - T_2^4}}{T_2^2} \Rightarrow \frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{T_o^4 - T_2^4}{T_2^4} \Rightarrow$$

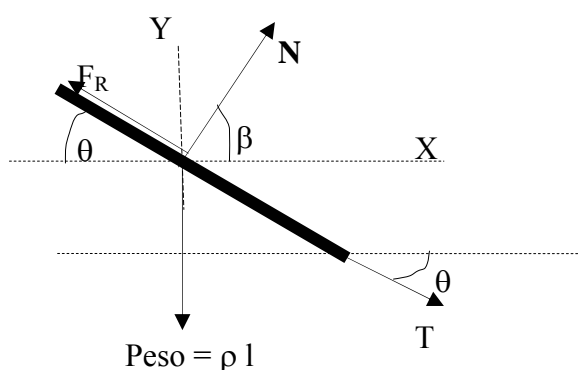
$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \phi} - 1 = \frac{T_o^4}{T_2^4} - 1 \Rightarrow \cos \phi = \left( \frac{T_2}{T_o} \right)^2$$

$$\phi = \text{arc cos} \left( \frac{T_2}{T_o} \right)^2$$

47.-Una cuerda se encuentra en reposo sobre dos planos inclinados que forman con la horizontal el mismo ángulo  $\theta$ . La cuerda tiene una densidad por unidad de longitud uniforme  $\rho$ , y el coeficiente de rozamiento con los planos es la unidad. En la figura se observa que parte de la cuerda (longitud  $L$ ) permanece en el aire y otras dos partes (de longitud cada una  $l$ ), están sobre los planos. El sistema tiene simetría derecha izquierda como indica la figura. Se pide cuál es la mayor fracción de la cuerda ( $\varepsilon = \frac{L}{2l+L}$ ) que está en el aire y para qué ángulo  $\theta$  ocurre que  $\varepsilon$  alcanza su valor máximo y cuál es el valor de  $\varepsilon$



Analizamos las fuerzas que actúan sobre la longitud de cuerda  $l$  que está sobre el plano inclinado de la izquierda.



$N$  es la fuerza con que el plano empuja a la cuerda,  $F_R$  es la fuerza de rozamiento  $= \mu N$ ,  $T$  es la fuerza con que la cuerda que está en el aire tira de  $l$ . La reacción a esta fuerza está aplicada en  $L$ .

Dado que el trozo de cuerda  $l$  está en reposo se cumple.

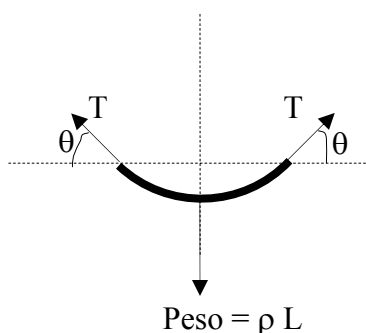
$$\begin{aligned}\sum F_y = 0; & \quad F_R \text{sen}\theta + N \text{sen}\beta - T \text{sen}\theta - \rho l = 0 \\ \sum F_x = 0; & \quad -F_R \text{cos}\theta + N \text{cos}\beta + T \text{cos}\theta = 0\end{aligned}$$

Como  $\theta$  y  $\beta$  son ángulos complementarios:  $\text{sen } \beta = \text{cos } \theta$  y  $\text{cos } \beta = \text{sen } \theta$

$$F_R \text{sen}\theta + N \text{cos}\theta - T \text{sen}\theta = \rho l \Rightarrow \mu N \text{sen}\theta + N \text{cos}\theta - T \text{sen}\theta = \rho l \quad (1)$$

$$\mu N \text{cos}\theta - N \text{sen}\theta = T \text{cos}\theta \Rightarrow T = \frac{\mu N \text{cos}\theta - N \text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} \quad (2)$$

Para la cuerda de longitud  $L$  que está al aire:



Teniendo en cuenta que  $L$  se encuentra en equilibrio

$$2 T \text{sen } \theta = \rho L \quad (3)$$

Sustituimos (2) en (3)

$$2 \frac{\mu N \text{cos}\theta - N \text{sen}\theta}{\rho \text{cos}\theta} \text{sen}\theta = L \quad (4)$$

Sustituimos (2) en (1)

$$\frac{\mu N \text{sen}\theta + N \text{cos}\theta}{\rho} - \frac{\mu N \text{cos}\theta - N \text{sen}\theta}{\rho \text{cos}\theta} \text{sen}\theta = 1 \quad (5)$$

Llevamos  $l$  y  $L$  a  $\varepsilon$  (definido en el enunciado del problema).

$$\varepsilon = \frac{L}{2l + L} = \frac{2 \frac{\mu N \text{cos}\theta - N \text{sen}\theta}{\rho \text{cos}\theta} \text{sen}\theta}{2 \left( \frac{\mu N \text{sen}\theta + N \text{cos}\theta}{\rho} - \frac{\mu N \text{cos}\theta - N \text{sen}\theta}{\rho \text{cos}\theta} \text{sen}\theta \right) + 2 \frac{\mu N \text{cos}\theta - N \text{sen}\theta}{\rho \text{cos}\theta} \text{sen}\theta}$$

Teniendo en cuenta que  $\mu = 1$

$$\varepsilon = \frac{(\text{cos}\theta - \text{sen}\theta) \text{sen}\theta}{\text{sen}\theta + \text{cos}\theta} = \frac{\text{sen}\theta \text{cos}\theta - \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\theta \text{cos}\theta + \text{cos}^2\theta} \quad (6)$$

Como nos piden el valor máximo de  $\varepsilon$ , derivamos la ecuación anterior respecto de  $\theta$  e igualamos a cero.

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = \frac{(\operatorname{sen}\theta \cos\theta + \cos^2\theta)(-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta)}{(\operatorname{sen}\theta \cos\theta + \cos^2\theta)^2} - \frac{(\operatorname{sen}\theta \cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta)}{(\operatorname{sen}\theta \cos\theta + \cos^2\theta)^2} = 0 \Rightarrow$$

Al igualar a cero resulta que en principio son posibles dos soluciones

$$\frac{(-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta)[(\operatorname{sen}\theta \cos\theta + \cos^2\theta) - (\operatorname{sen}\theta \cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta)]}{(\operatorname{sen}\theta \cos\theta + \cos^2\theta)^2} = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta \cos\theta + \cos^2\theta = \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 0$$

Conduce a una relación correcta pero no relacionada con el problema ya que, la solución es  $\theta = 0$  con lo que el suelo es horizontal.

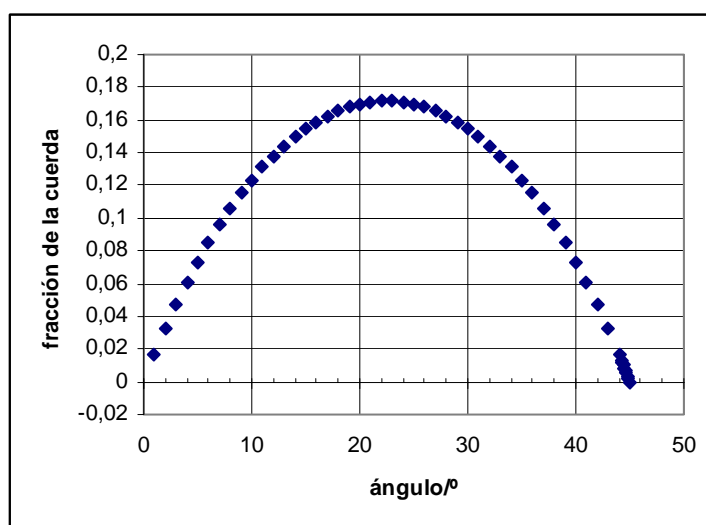
La otra solución posible es:

$$-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta = 0 \Rightarrow 1 - \operatorname{tag} 2\theta = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{tag} 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = 22,5^\circ$$

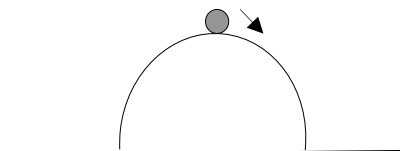
Sustituyendo en la ecuación (6)

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{sen}22,5^\circ \cos22,5^\circ - \operatorname{sen}^2 22,5^\circ}{\operatorname{sen}22,5^\circ \cos22,5^\circ + \cos^2 22,5^\circ} = 0,172$$

Vamos ahora a representar  $\varepsilon$  frente a  $\theta$ .



48.-Una partícula puntual de masa  $m$  está situado en lo alto de un hemisferio de masa  $M$ . La partícula comienza a deslizar hacia la derecha. Se pide el ángulo  $\theta$  para el cual la partícula abandona el hemisferio. El ángulo  $\theta$  se mide desde el centro de la base del hemisferio. Se considera que no existe rozamiento entre el hemisferio y el suelo ni entre la partícula y el hemisferio.



Calcular el valor de  $\theta$  cuando  $m=M$ ,  $m \ll M$ ,  $m=100 M$ .

Este problema es una variante de uno clásico en el que se considera que el hemisferio está fijo. Aquí nos encontramos que si  $m$  se mueve hacia la derecha el hemisferio se desplaza hacia la izquierda.

En la figura 1 se consideran dos sistemas de referencia:  $OXY$  y  $O'X'Y'$ . El primero está ligado al suelo y es un sistema inercial, el segundo está ligado al hemisferio. En el instante  $t=0$  ambos sistemas son coincidentes

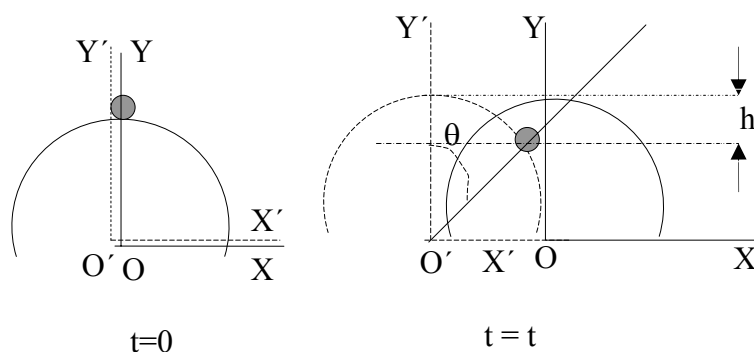


Fig.1

El instante  $t=t$  se considera cuando la masa puntual  $m$ , se desprende del hemisferio. Durante ese intervalo de tiempo el sistema  $O'X'Y'$  es un sistema no inercial ya que el hemisferio se está acelerando por la fuerza de reacción  $N'$ . En la figura 2a se indican las fuerzas que actúan sobre la masa puntual (cuando todavía no se ha separado del hemisferio) y en la 2b las fuerzas que actúan sobre el hemisferio.  $N'$  es la reacción a  $N$  y está aplicada en el hemisferio, mientras que  $N$  lo está en la masa puntual  $m$ . Entre los instantes  $t=0$  y  $t=t$ ,  $N'$  existe y da una componente horizontal que empuja al hemisferio hacia la izquierda produciendo en él una aceleración y por esta razón el sistema  $O'X'Y'$  es un sistema no inercial, pero cuando  $m$  se separa de  $M$  ya no existe  $N'$  y por tanto a partir de ese instante  $O'X'Y'$  se desplaza con velocidad constante constituyendo un sistema inercial.

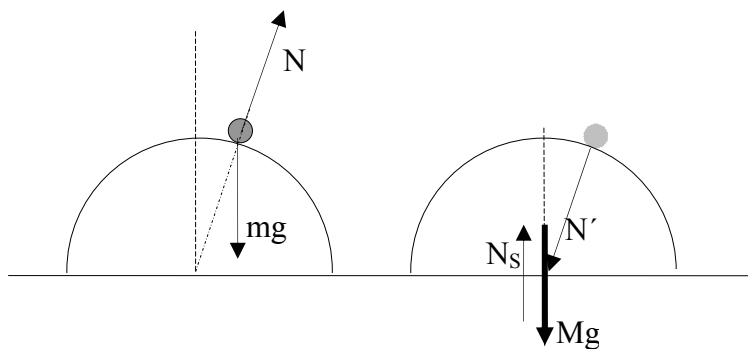


Fig.2a

Fig.2b

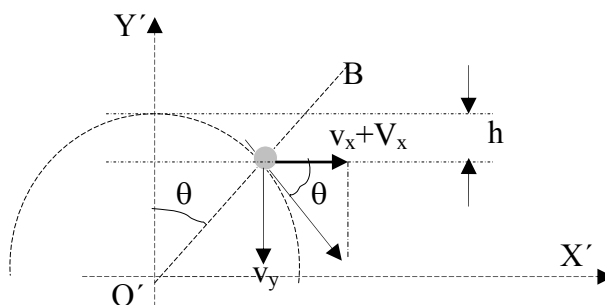
Volviendo a la figura 1, designamos las velocidades respecto del sistema OXYZ con  $V_x$  la velocidad del hemisferio hacia la izquierda en el instante  $t=t$ , y  $v_x$  e  $v_y$  a las componentes de la velocidad de  $m$  justamente en el momento en que se separa de  $M$ , o lo que es lo mismo cuando  $t=t$ .

Respecto del sistema O'X'Y' las componentes de la velocidad de  $m$  son  $(v_x+V_x; v_y)$

Para el sistema OXY, podemos aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento sobre el eje X.

$$mv_x = MV_x \Rightarrow V_x = \frac{m}{M}v_x = \epsilon v_x \quad (1)$$

Desde el sistema O'X'Y', la velocidad de  $m$  es tangente al hemisferio, esto es, perpendicular a la recta O'B, luego:



$$\text{tag}\theta = \frac{v_y}{v_x + V_x} \Rightarrow v_y = \text{tag}\theta(v_x + V_x) \Rightarrow v_y = \text{tag}\theta(v_x + \epsilon v_x) = \text{tag}\theta \cdot v_x(1 + \epsilon) \quad (2)$$

Desde el sistema de referencia OXY aplicamos el principio de conservación de la energía:

$$mgh = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV_x^2$$

Si R es el radio del hemisferio y sustituimos  $V_x$  y  $v_y$ , resulta:

$$mgR(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} m [v_x^2 + v_x^2 \cdot \text{tag}^2\theta \cdot (1 + \varepsilon)^2] + \frac{1}{2} M \varepsilon^2 v_x^2 \Rightarrow$$

$$v_x = \sqrt{\frac{2gR(1 - \cos\theta)}{1 + (1 + \varepsilon)^2 \text{tag}^2\theta + \frac{M}{m} \varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{2gR(1 - \cos\theta)}{1 + (1 + \varepsilon)^2 \text{tag}^2\theta + \varepsilon}} \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que  $V_x$  es la máxima velocidad que puede recibir el hemisferio, ya que a partir del instante  $t=t$  su velocidad no puede aumentar más, puesto que no existe fuerza que lo acelere y teniendo también presente que  $V_x = \varepsilon v_x$ , siendo  $\varepsilon$  una constante, se concluye que  $v_x$  debe tener un valor máximo y por ello derivamos la ecuación (3) respecto de  $\theta$  e igualamos a cero.

$$\frac{dv_x}{d\theta} = \frac{(1 + (1 + \varepsilon)^2 \cdot \text{tag}^2\theta + \varepsilon)(2gR \text{sen}\theta) - 2gR(1 - \cos\theta) \cdot 2 \cdot (1 + \varepsilon)^2 \text{tag}\theta \frac{1}{\cos^2\theta}}{2 \sqrt{\frac{2gR(1 - \cos\theta)}{1 + (1 + \varepsilon)^2 \cdot \text{tag}^2\theta + \varepsilon}} \cdot (1 + (1 + \varepsilon)^2 \cdot \text{tag}^2\theta + \varepsilon)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + (1 + \varepsilon)^2 \cdot \text{tag}^2\theta + \varepsilon)(2gR \text{sen}\theta) = 2gR(1 - \cos\theta) \cdot 2 \cdot (1 + \varepsilon)^2 \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \varepsilon) \left[ 1 + (1 + \varepsilon) \cdot \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \right] = 2 \cdot (1 + \varepsilon)^2 \frac{1 - \cos\theta}{\cos^3\theta} \Rightarrow [\cos^2\theta + (1 + \varepsilon) \cdot \text{sen}^2\theta] =$$

$$= 2 \cdot (1 + \varepsilon) \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta}$$

a) Como  $\frac{m}{M} = \varepsilon$ , cuando  $m = M$ ,  $\varepsilon = 1$ , sustituyendo en la última ecuación resulta:

$$[\cos^2\theta + 2(1 - \cos^2\theta)] = 4 \left( \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta} \right) \Rightarrow 2 - \cos^2\theta = \frac{4}{\cos\theta} - 4 \Rightarrow \cos^2\theta + \frac{4}{\cos\theta} = 6 \quad (4)$$

Para resolver la ecuación (4) recurrimos a un procedimiento de tanteo:

$$\text{Para } \theta = 40^\circ \quad 5,8 < 6 ; \text{ Para } \theta = 42^\circ \quad 5,93 < 6 ; \text{ Para } \theta = 43^\circ \quad 6,20 > 6 ;$$

$$\text{Para } \theta = 42,9^\circ \quad 6 = 6$$

b) Cuando  $m \ll M$ ,  $\varepsilon = 0$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{2 - \cos\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = 2 - \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48,2^\circ$$

Esta es la solución del problema clásico cuando el hemisferio está quieto.

c) Cuando  $m=100M$ ,  $\varepsilon=100$

$$\begin{aligned} \cos^2\theta + 101\sin^2\theta &= \frac{202 - 202\cos\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \cos^2\theta + 101 - 101\cos^2\theta = \frac{202}{\cos\theta} - 202 \Rightarrow \\ \Rightarrow 303 - 100\cos^2\theta &= \frac{202}{\cos\theta} \Rightarrow \cos^2\theta + \frac{2,02}{\cos\theta} = 3,03 \quad (5) \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación (5) por tanteo

Para  $\theta = 15^\circ$ ,  $3,02 < 3,03$ ; Para  $\theta = 16^\circ$ ,  $3,025 < 3,03$ , Para  $\theta = 17^\circ$ ,  $3,027 < 3,03$

Para  $\theta = 18^\circ$ ,  $3,028 < 3,03$ ; Para  $\theta = 19^\circ$ ,  $3,03 = 3,03$

**49.-Un cilindro hueco tiene un radio  $R$ , en el interior del mismo descansa otro cilindro macizo de radio  $r$ , siendo  $r$  mucho menor que  $R$ . El cilindro de radio  $r$  se separa un ángulo pequeño de su posición de equilibrio y se deja en libertad. Calcular el periodo de oscilación en los dos casos siguientes: I) No hay rozamiento entre ambos cilindros, II) existe el suficiente rozamiento para que el cilindro pequeño ruede sin deslizar por el interior del grande.**

I) En el primer caso al no haber rozamiento, el cilindro pequeño de radio  $r$  desliza y el movimiento de éste, es como el de un péndulo simple con la masa concentrada en el centro de masas. El centro de masas de ese cilindro describe al oscilar un arco de radio  $R-r$ , tal como se indica en la figura 1.

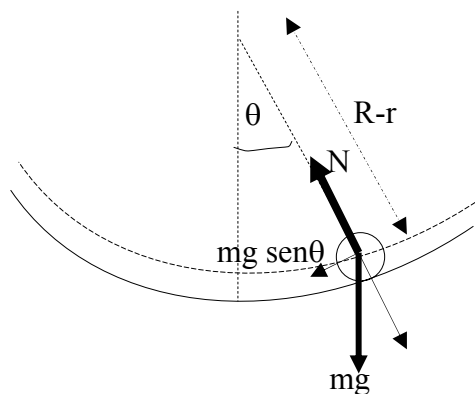


Fig.1

Sobre el cilindro de radio  $r$  actúan dos fuerzas el peso  $mg$  y la fuerza normal  $N$  con que el cilindro de radio  $R$  empuja al otro cilindro. El peso se puede decomponer en dos fuerzas, una  $mg \sin \theta$  y otra  $mg \cos \theta$ . La fuerza que hace oscilar al cilindro es  $mg \sin \theta$ , pero para ángulos pequeños podemos aproximar el seno  $\theta$  al ángulo  $\theta$  expresado en radianes y así poder escribir:

$$mg \theta = -ma = -m \alpha (R - r) = -m \frac{d^2 \theta}{dt^2} (R - r) \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{R - r} \theta = 0$$

La ecuación diferencial representa un movimiento armónico simple cuya pulsación vale.

$$\omega^2 = \frac{g}{R - r} \Rightarrow \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{g}{R - r} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R - r}{g}}$$

II) Las fuerzas que actúan sobre el cilindro pequeño son tres: peso  $=mg$ , empuje  $N$  y fuerza de rozamiento  $F_R$  que al no pasar por el centro de masas produce un momento.

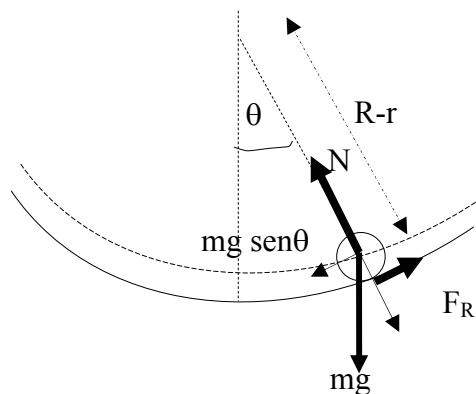


Fig.2

Las fuerzas que hacen oscilar al cilindro y provocan aceleración sobre él son:  $mg \sen\theta$  y  $F_R$ . Además el cilindro rueda sin deslizar debido al momento de la fuerza de rozamiento respecto del centro de masa del cilindro. Las ecuaciones del movimiento admitiendo que el ángulo  $\theta$  es pequeño son las siguientes:

$$\begin{aligned} mg\theta - F_R &= ma_{CM} \\ F_R r &= I\alpha = \frac{1}{2}mr^2\alpha \Rightarrow F_R = \frac{mr\alpha}{2} \\ a_{CM} &= \alpha r \end{aligned}$$

Llevando las ecuaciones segunda y tercera a la primera resulta:

$$mg\theta - \frac{mr\alpha}{2} = m\alpha r \Rightarrow g\theta = \frac{3}{2}r\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\frac{g\theta}{r} \quad (1)$$

Cuando el cilindro pequeño da una vuelta completa su centro de masas describe un arco de longitud  $2\pi (R-r)$  al cual corresponde un ángulo que designamos con  $\beta$ .

Supongamos que el cilindro pequeño describe al rodar un ángulo  $d\beta$  con lo que su centro de mas avanza un trozo de arco  $dL$ , al cual corresponde un ángulo  $d\theta$ .

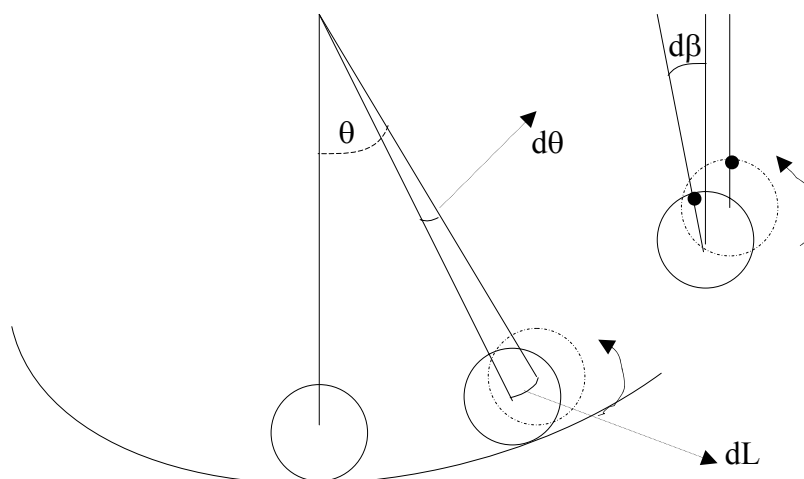


Fig.3

En la figura 3 se observa que  $dL = d\theta(R - r)$ . Si nos fijamos en el cilindro que rueda (para ello se ha dibujado una figura aparte) éste ha girado un ángulo  $d\beta$  al mismo tiempo que el centro de masas describe un arco de longitud  $dL$ . Si el cilindro diese una vuelta completa ( $2\pi$  radianes) el centro de masa hubiese avanzado  $2\pi r$  metros, por tanto:

$$\frac{2\pi \text{ radianes}}{2\pi r \text{ metros}} = -\frac{d\beta}{dL} \Rightarrow d\beta = \frac{dL}{r} = -\frac{d\theta(R-r)}{r}$$

Si derivamos la última ecuación con respecto del tiempo obtenemos

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{R-r}{r}$$

Como  $\frac{d^2\beta}{dt^2}$  es la aceleración angular  $\alpha$  que según la ecuación (1)

$$\alpha = -\frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{R-r}{r} \Rightarrow \frac{2g\theta}{3r} = -\frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{R-r}{r} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{3} \frac{g}{R-r} \theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{R-r} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{R-r} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

**50.-Un cohete posee una masa inicial  $m_0$  constituida por el armazón del cohete y el combustible. Se dispara en posición vertical. El combustible se consume de forma constante a razón de  $\rho = dm/dt$  y se expele con una velocidad constante  $u$  con relación al cohete. Si se desprecia la resistencia del aire encontrar la expresión de la velocidad del cohete en un tiempo  $t$  después de la salida.**

El problema se resuelve mediante la aplicación del principio según el cual, el impulso mecánico es igual a la variación de la cantidad de movimiento.

En un tiempo  $t$  después de la salida del cohete la masa del cohete es:  $m_0 - \rho t$  y posee una velocidad  $v$ . Transcurrido un incremento de tiempo  $\Delta t$  se expulsa una masa de combustible  $\Delta m$  con velocidad  $u$  respecto del cohete. El cohete tiene ahora una masa  $m_0 - \rho t - \rho \Delta t$  y adquiere una velocidad  $v + \Delta v$

1) Cantidad de movimiento del cohete:  $(m_0 - \rho t)v$

2) Impulso de la fuerza peso sobre el cohete:  $-(m_0 - \rho t)g \Delta t$

3) Cantidad de movimiento del cohete inmediatamente después de la expulsión

$$(m_0 - \rho t - \rho \Delta t)(v + \Delta v)$$

4) Cantidad de movimiento de la masa expulsada:  $-\Delta m v_e = -\rho \Delta t(u - v)$

Como sobre el sistema cohete-combustible las fuerzas que se producen en la combustión de los gases son interiores al sistema, entonces el momento lineal total del mismo permanece constante.

$$(m_0 - \rho t)v - (m_0 - \rho t)g \Delta t = (m_0 - \rho t - \rho \Delta t)(v + \Delta v) - \rho \Delta t(u - v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_0 - \rho t)v - (m_0 - \rho t)g \Delta t = (m_0 - \rho t)v + (m_0 - \rho t)\Delta v - \rho \Delta t v - \rho \Delta t \Delta v - \rho \Delta t u + \rho \Delta t v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(m_0 - \rho t)g \Delta t = (m_0 - \rho t)\Delta v - \rho \Delta t u \Rightarrow -g = \frac{\Delta v}{\Delta t} - \frac{\rho u}{m_0 - \rho t}$$

Si  $\Delta t$  tiende a cero, separamos variables e integramos

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left( -g + \frac{\rho u}{m_0 - \rho t} \right) dt = -gt + \frac{\rho u}{-\rho} [\ln(m_0 - \rho t) - \ln m_0] \Rightarrow v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \rho t} - gt$$

La manera anterior resulta tediosa de realizar, por lo que resulta más rápido utilizar la ecuación general para un sistema de masa variable.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt}$$

Si la aplicamos al caso del cohete y consideramos la vertical dirigida hacia arriba como positiva, tenemos que la masa al cabo de un tiempo  $t$  es:

$m_0 - \rho t$ ,  $\vec{F}$  es la fuerza exterior  $F = -(m_0 - \rho t)g$ , la velocidad  $\vec{u}$  es  $-u$  y  $\frac{dm}{dt} = -\rho$

el signo menos de este cociente es debido a que el sistema pierde masa, en el caso de que la ganase sería positivo.

$$(m_0 - \rho t) \frac{dv}{dt} = -(m_0 - \rho t)g + u\rho \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t \left[ -g + \frac{u\rho}{m_0 - \rho t} \right] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \rho t} - gt$$

**51.-Un vagón cargado de arena tiene una masa total  $M$  en el instante inicial, y se desplaza por una vía mediante la acción de una fuerza constante  $F$  con dirección horizontal. El vagón suelta arena debido a un orificio que existe en el fondo del mismo, siendo  $\Delta m$  la cantidad evacuada por unidad de tiempo. En el instante  $t=0$ , la velocidad del vagón es nula. Hállese la velocidad y aceleración del vagón en función del tiempo.**

Utilizamos la ecuación para un sistema de masa variable.  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt}$ . Al cabo de

un tiempo  $t$  de iniciado el movimiento, la masa del vagón es  $M - \Delta m t$ , la fuerza exterior es  $F$  y  $u$ , la velocidad de la arena respecto del vagón, es nula, por ir en él.

$$(M - \Delta m t) \frac{dv}{dt} = F \Rightarrow \int dv = \int \frac{F}{M - \Delta m t} dt \Rightarrow v = -\frac{F}{\Delta m} \ln(M - \Delta m t) + Cte$$

Cuando  $t=0$ ,  $v=0$

$$0 = -\frac{F}{\Delta m} \ln M + cte \Leftarrow Cte = \frac{F}{\Delta m} \ln M$$

$$v = -\frac{F}{\Delta m} \ln(M - \Delta m t) + \frac{F}{\Delta m} \ln M \Rightarrow v = \frac{F}{\Delta m} \ln \frac{M}{M - \Delta m t}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{\Delta m} \left[ \frac{1}{M - \Delta m t} \cdot \left( \frac{-M(-\Delta m)}{(M - \Delta m t)^2} \right) \right] = F \left( \frac{1}{M - \Delta m t} \right)$$

**52.-Una pequeña masa comienza a deslizarse por un plano inclinado de ángulo  $\alpha$ . El coeficiente de rozamiento es directamente proporcional al camino recorrido por la masa ( $\mu = ks$ ). Calcular el camino recorrido por la masa hasta que se para y la velocidad máxima que ha alcanzado en dicho recorrido.**

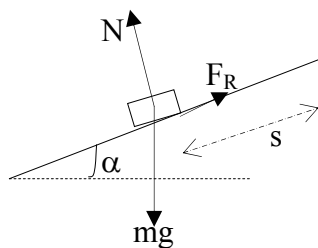
La masa cuando inicia su movimiento tiene una cierta energía potencial y carece de cinética. Cuando se para no tiene ni energía cinética ni potencial. La energía potencial perdida se ha empleado en el trabajo de rozamiento efectuado a lo largo del camino recorrido.

$$W_{Fr} = \int_0^{s_f} k s m g \cos \alpha ds = k m g \cos \alpha \frac{s_f^2}{2}$$

Designamos con  $h$ , la altura que desciende la masa desde que inicia el movimiento hasta que se para, teniendo en cuenta que el camino recorrido sobre el plano es  $s$ , se deduce que:  $\text{sen} \alpha = \frac{h}{s_f} \Rightarrow h = s_f \text{sen} \alpha$ , y la pérdida de energía potencial es:  $m g s_f \text{sen} \alpha$ . Igualando el trabajo de rozamiento con la pérdida de energía potencial

$$k m g \cos \alpha \frac{s_f^2}{2} = m g s_f \text{sen} \alpha \Rightarrow s_f = \frac{2 \text{tag} \alpha}{k}$$

El diagrama de fuerzas sobre el cuerpo nos conduce a



$$m g \text{sen} \alpha - F_R = m a \Rightarrow m g \text{sen} \alpha - k s m g \cos \alpha = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = m \frac{dv}{ds} v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int (g \text{sen} \alpha - k s g \cos \alpha) ds = \int v dv \Rightarrow g s \text{sen} \alpha - k g \cos \alpha \frac{s^2}{2} = \frac{v^2}{2} + \text{Cte}$$

Cuando se inicia el movimiento  $s = 0$  y la velocidad es nula, luego  $\text{Cte} = 0$ .

Para buscar la velocidad máxima derivamos la ecuación de la velocidad con respecto a la variable  $s$  e igualamos a cero

$$v = \sqrt{2 g s \sin \alpha - 2 k g \cos \alpha \frac{s^2}{2}} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{2 g \sin \alpha - 2 k g s \cos \alpha}{2 \sqrt{2 g s \sin \alpha - 2 k g \cos \alpha \frac{s^2}{2}}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{\operatorname{tag} \alpha}{k}$$

Llevando el valor de s a la ecuación de la velocidad

$$v = \sqrt{2 g \frac{\operatorname{tag} \alpha}{k} \cdot \sin \alpha - k g \cos \alpha \cdot \frac{\operatorname{tag}^2 \alpha}{k^2}} = \sqrt{2 g \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{k \cos \alpha} - g \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{k \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{g \operatorname{tag} \alpha \operatorname{sen} \alpha}{k}}$$

53.- Un río tiene sus orillas paralelas y la distancia entre ambas es  $L$ . La velocidad de la corriente es constante y de módulo  $u$ .

a) Con una lancha se desea ir desde  $A$  en una orilla, hasta  $B$  en la otra orilla con la condición de que la velocidad de la lancha sea la mínima posible (fig. 1a).

a) Determinar el valor de  $v_{\text{mínima}}$ .

b) Admitiendo que  $u > v$  ( $v$ , velocidad de la lancha), se parte del punto  $A$  y se desea llegar a la orilla opuesta con una deriva mínima, esto es, con un valor de  $s_{\text{mínimo}}$ , (fig 1b). Determinar el valor de la velocidad.

a)

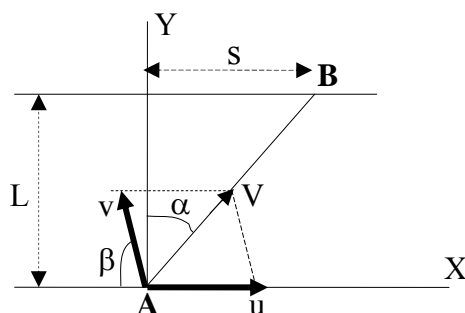


Fig.1a

En la figura 1a,  $v$  es la velocidad de la lancha,  $V$  es la velocidad resultante de la velocidad del agua y de la lancha. La dirección de  $V$  es la recta  $AB$ , puesto que se pretende salir de  $A$  y llegar a  $B$ . En la mencionada figura  $v$  es una velocidad cualquiera y no la mínima que es lo que pide el problema. Observe que son invariables  $u$  y  $s$ .

Proyectamos las velocidades sobre los ejes  $X$  e  $Y$ .

$$V \sin \alpha = u - v \cos \beta ; V \cos \alpha = v \sin \beta \Rightarrow \tan \alpha = \frac{u - v \cos \beta}{v \sin \beta} = \frac{s}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Lu - Lv \cos \beta = s v \sin \beta \Rightarrow v = \frac{Lu}{L \cos \beta + s \sin \beta}$$

Como el problema nos pide la velocidad mínima derivamos  $v$  respecto de  $\beta$  e igualamos a cero.

$$\frac{dv}{d\beta} = \frac{-Lu(-L \sin \beta + s \cos \beta)}{(L \cos \beta + s \sin \beta)^2} = 0 \Rightarrow -L \sin \beta + s \cos \beta = 0 \Rightarrow \tan \beta = \frac{s}{L} = \tan \alpha$$

A la vista de este resultado:

$$v_{\min} = \frac{Lu}{L \cos \alpha + s \operatorname{sen} \alpha} = \frac{Lu}{L \frac{L}{AB} + s \frac{s}{AB}} = \frac{Lu \sqrt{L^2 + s^2}}{L^2 + s^2} = \frac{Lu}{\sqrt{L^2 + s^2}}$$

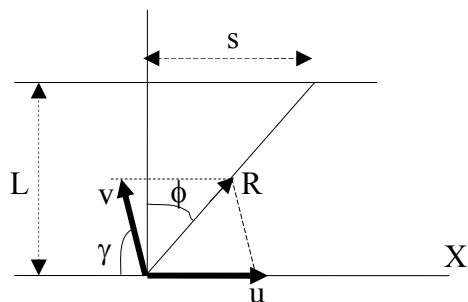


Fig.1b

En la figura 1b se ha representado un valor cualquiera de  $s$ , que no es el mínimo pedido por el problema.  $R$  representa la velocidad resultante que corresponde a  $s$ .

$$\begin{aligned} R \operatorname{sen} \phi &= u - v \cos \gamma ; R \cos \phi = v \operatorname{sen} \gamma \Rightarrow \operatorname{tag} \phi = \frac{u - v \cos \gamma}{v \operatorname{sen} \gamma} = \frac{s}{L} \Rightarrow \\ &\Rightarrow s = L \frac{u - v \cos \gamma}{v \operatorname{sen} \gamma} \quad (1) \end{aligned}$$

Si  $s$  ha de ser mínimo, derivamos  $s$  con respecto a  $\gamma$ , e igualamos a cero.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\gamma} &= L \frac{v \operatorname{sen} \gamma \cdot v \operatorname{sen} \gamma - (u - v \cos \gamma) \cdot v \cos \gamma}{v^2 \operatorname{sen}^2 \gamma} = 0 \Rightarrow v^2 \operatorname{sen}^2 \gamma - u v \cos \gamma + v^2 \cos^2 \gamma = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \gamma = \frac{v}{u} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor del coseno en (1), resulta:

$$s_{\min} = L \frac{u - v \frac{v}{u}}{v \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}} = L \frac{\frac{u^2 - v^2}{u}}{\frac{v}{u} \sqrt{u^2 - v^2}} = \frac{L}{v} \sqrt{u^2 - v^2}$$

**54.- Una partícula P describe una trayectoria circular de radio R, con velocidad angular  $\omega$  y aceleración angular  $\alpha$ .**

**$\vec{R}$  es el vector de posición de la partícula respecto del centro de la circunferencia. Determinar la velocidad y aceleración de la partícula para un observador en reposo, e identificar las componentes intrínsecas de la aceleración absoluta**

El vector de posición de P en un instante t, respecto de los ejes inerciales en O es:

$$\vec{R} = R \cos \varphi \vec{i} + R \sin \varphi \vec{j} \quad \text{con } \varphi = \varphi(t)$$

El vector velocidad es su derivada respecto del tiempo:

$$\vec{v} = -\dot{\varphi} R \sin \varphi \vec{i} + \dot{\varphi} R \cos \varphi \vec{j} = \omega R (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) \quad [1]$$

El vector contenido en el paréntesis es un vector unitario situado en una dirección perpendicular al vector  $\vec{R}$  y como la trayectoria es una circunferencia tiene la misma dirección que la tangente, recibiendo el nombre de vector unitario tangente  $\vec{\tau}$ . La ecuación anterior [1] se puede también escribir.

$$\vec{v} = \omega R \vec{\tau}$$

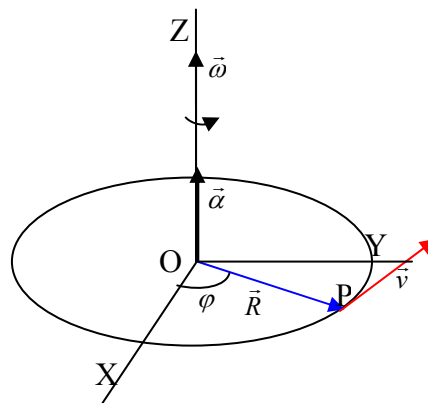
Ahora bien, si definimos el vector velocidad angular  $\vec{\omega}$  como un vector en la dirección del eje de rotación Z, cuyo sentido lo proporciona la regla del sacacorchos, entonces  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$  y si establecemos y verificamos el producto vectorial  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$  [2]

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R \cos \varphi & R \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \omega R (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})$$

Resultado que al coincidir con [1] confirma la ecuación [2].

Para calcular la aceleración respecto de O, vamos a derivar el vector velocidad respecto del tiempo.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \dot{\omega} R (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) + \omega R (-\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{i} - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{j}) = \\ &= \dot{\omega} R (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) - \omega^2 R (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) \end{aligned}$$



Cambiando  $\dot{\omega} = \alpha$  módulo de la aceleración angular resulta:

$$\vec{a} = \alpha R(-\text{sen } \varphi \vec{i} + \text{cos } \varphi \vec{j}) - \omega^2 R(\text{cos } \varphi \vec{i} + \text{sen } \varphi \vec{j}) = \alpha R \vec{\tau} - \omega^2 \vec{R} \quad [3]$$

El primer vector de [3] es tangente a la trayectoria, se conoce como aceleración tangencial, mientras que el segundo tiene dirección radial con sentido hacia O como indica el signo menos, se conoce como aceleración radial o centrípeta.

Si derivamos la ecuación vectorial [2] respecto del tiempo inmediatamente obtenemos también la aceleración.

$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad [4]$$

Estando por definición el vector aceleración angular  $\vec{\alpha}$  en la dirección del eje de rotación y su sentido coincide con el de  $\vec{\omega}$ , en el presente caso. En consecuencia  $\vec{\alpha} = \alpha \vec{k}$

El primer sumando de [4] es la aceleración tangencial y el segundo en la aceleración centrípeta. Verifíquese que sale igual que en [3]; efectuando los productos vectoriales que aparecen en los dos sumandos de [4].

Una alternativa inmediata y breve es la siguiente:

Utilizando coordenadas polares el vector de posición es  $\vec{R} = R\vec{u}_r$ ; derivando respecto del tiempo y considerando que la derivada de un vector giratorio de módulo constante (demostración obvia que está en cualquier texto) es  $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_r$

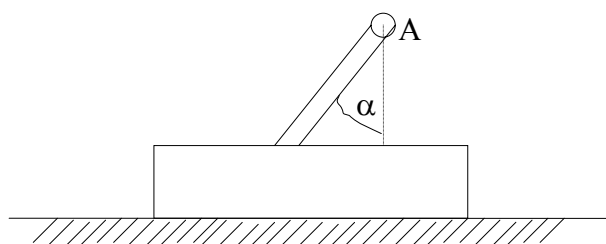
$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = R \frac{d\vec{u}_r}{dt} = R\vec{\omega} \times \vec{u}_r$$

Volviendo a derivar.

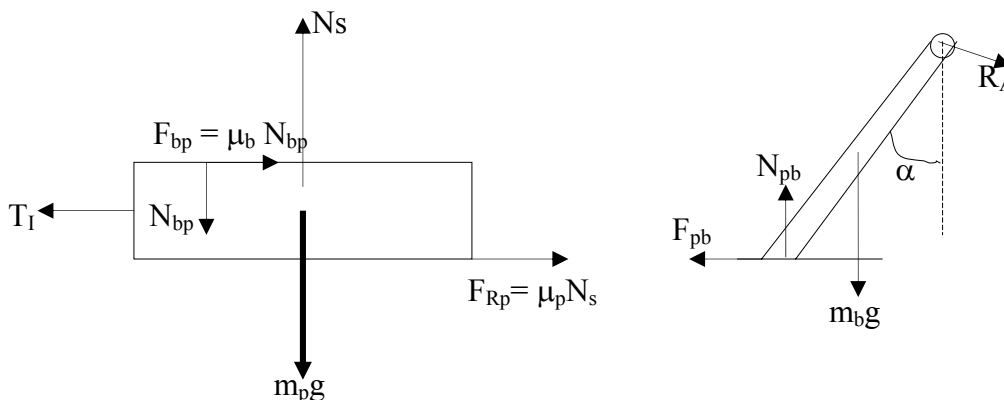
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{u}_r + R\vec{\omega} \times \frac{d\vec{u}_r}{dt} = R \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{u}_r + R\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{u}_r$$

55.-Una plancha de masa  $m_p$  está situada sobre un suelo horizontal, siendo  $\mu_p$  el coeficiente de rozamiento. Una barra de masa  $m_b$  y longitud  $L$  se apoya por un extremo sobre la plancha y forma con la vertical un ángulo  $\alpha$ , por el otro extremo está articulada en  $A$  que permanece fijo (ver la figura inferior). El coeficiente de rozamiento entre la plancha y la barra es  $\mu_b$ .

a) Mediante una fuerza horizontal  $T_1$  aplicada en la plancha se desea que ésta se deslice hacia la izquierda a velocidad constante, determinar  $T_1$ . b) Realizar el mismo caso pero para que la plancha deslice hacia la derecha.



a) Cuando la plancha deslice hacia la izquierda los diagramas de fuerzas sobre la plancha y la barra son los siguientes:



*Fuerzas sobre la plancha:*

Peso de la plancha =  $m_p g$  ; Fuerza que el suelo ejerce sobre la plancha =  $N_s$

Fuerza con que la barra empuja a la plancha =  $N_{bp}$

Fuerza de rozamiento entre la plancha y el suelo =  $F_{Rp}$

Fuerza de rozamiento entre la plancha y la barra =  $F_{bp}$

Fuerza aplicada en la plancha para que deslice hacia la izquierda con velocidad constante= $T_1$

*Fuerzas sobre la barra:*

Peso de la barra =  $m_b g$  ; Fuerza con que la plancha empuja a la barra =  $N_{pb}$  : Las fuerzas  $N_{bp}$  y  $N_{pb}$  son acción y reacción y por tanto tienen el mismo módulo.

Fuerza de rozamiento entre la barra y la plancha =  $F_{pb}$  Las fuerzas  $F_{bp}$  y  $N_{bp}$  son acción y reacción y por tanto tienen el mismo módulo.

Reacción en la articulación A =  $R_A$ . En la figura se ha dibujado en una dirección cualquiera, pues a priori no puede saberse cómo esta dirigida.

Como la plancha desliza a velocidad constante se cumple: que la suma de todas las

fuerzas aplicadas debe ser nula:  $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$

$$T_1 - \mu_p N_s - \mu_b N_{bp} = 0 \quad ; \quad N_s = m_p g + N_{bp} \Rightarrow T_1 - \mu_p (m_p g + N_{bp}) - \mu_b N_{bp} = 0 \quad (1)$$

La barra se encuentra en reposo, si empleamos la condición de que la suma de los momentos respecto de la articulación A es cero, evitamos introducir la reacción en la articulación  $R_A$  y así calculamos directamente la reacción  $N_{bp}$ . Los momentos que sean perpendiculares a la barra y dirigidos según el dibujo hacia fuera del papel, se tomarán positivos y en sentido contrario negativos.

$$m_b g \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \alpha - N_{pb} \cdot L \cdot \sin \alpha - F_{pb} \cdot L \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha - N_{bp} \sin \alpha - F_{bp} \cos \alpha = 0$$

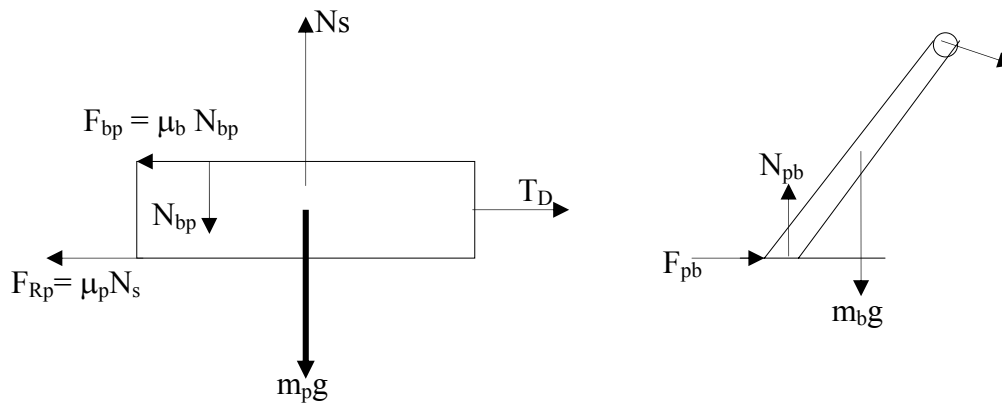
$$\Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha - N_{bp} \sin \alpha - \mu_b N_{bp} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{bp} = \frac{\frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu_b \cos \alpha}$$

Sustituyendo  $N_{bp}$  en la ecuación (1)

$$T_1 - \mu_p m_p g - (\mu_p + \mu_b) \cdot \frac{m_b g \sin \alpha}{2(\sin \alpha + \mu_b \cos \alpha)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = \mu_p m_p g + (\mu_p + \mu_b) \cdot \frac{m_b g \sin \alpha}{2(\sin \alpha + \mu_b \cos \alpha)} \quad (2)$$

b) El diagrama de fuerzas cuando la plancha desliza hacia la derecha



Aplicando de nuevo las condiciones  $\sum \vec{F} = 0$  a la plancha y  $\sum \vec{M} = 0$  a la barra, resulta:

$$T_D - \mu_p (m_p g + N_{bp}) - \mu_b N_{bp} = 0 \quad (1)$$

$$m_b g \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \alpha - N_{pb} \cdot L \cdot \sin \alpha + F_{pb} \cdot L \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha - N_{pb} \sin \alpha + F_{pb} \cos \alpha = 0$$

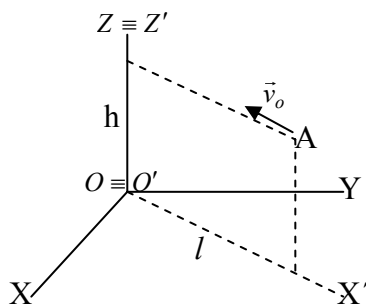
$$\Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha - N_{pb} \sin \alpha + \mu_b N_{pb} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{pb} = \frac{\frac{m_b g}{2} \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha - \mu_b \cos \alpha}$$

Si se compara con las ecuaciones anteriores resulta que la única diferencia es cambiar un signo más por uno menos.

$$T_D = \mu_p m_p g + (\mu_p + \mu_b) \cdot \frac{m_b g \sin \alpha}{2(\sin \alpha - \mu_b \cos \alpha)} \quad (3)$$

Si se compara  $T_I$  con  $T_D$  resulta que siempre  $T_D > T_I$ , además puede ocurrir que  $T_D$  sea infinito si se cumple que  $\sin \alpha = \mu_b \cos \alpha \Rightarrow \mu_b = \tan \alpha$ , con lo cual es imposible deslizar la plancha hacia la derecha si  $\mu_b \geq \tan \alpha$ .

56.- Una partícula se encuentra inicialmente en la esquina superior (punto A) de una puerta rígida que gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante  $\omega'$ . La partícula se mueve por el borde superior de la puerta con velocidad constante  $v_o$ . Determinar, expresando los resultados en el sistema móvil  $S'$ , que gira solidario con la puerta: a) velocidad relativa de arrastre y absoluta de la partícula en función del tiempo, b) aceleración relativa, de arrastre, complementaria y absoluta en función del tiempo



La ecuación cinemática de velocidades es:  $\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}'$

a) La velocidad relativa, es decir definida desde los ejes móviles en  $O'$  vale:

$$\vec{v}' = -v_o \vec{i}'$$

En este problema, la velocidad de arrastre debida al movimiento de los ejes móviles resulta:

Por no efectuar traslación  $\vec{v}_{O'} = 0$

Debido a la rotación vale:  $\vec{\omega} \times \vec{r}' = \omega \vec{k}' \times (h\vec{k}' + (1 - v_o t)\vec{i}') = \omega(1 - v_o t)\vec{j}'$

La velocidad absoluta  $\vec{v} = -v_o \vec{i}' + \omega(1 - v_o t)\vec{j}'$

c) La ecuación cinemática de aceleraciones es:

$$d) \quad \vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'$$

La aceleración respecto de los ejes móviles  $\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(-v_o \vec{i}') = 0$

Las aceleraciones de arrastre:

$$\vec{a}_{O'} = 0$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \omega \vec{k}' \times \omega(1 - v_o t)\vec{j}' = -\omega^2(1 - v_o t)\vec{i}'$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' = 0; \text{ pues } \vec{\omega} = \text{cte}$$

La aceleración de arrastre vale:  $\vec{a}_{\text{arrastre}} = -\omega^2(1 - v_o t)\vec{i}'$

La aceleración complementaria o de Coriolis:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v} = 2\omega \vec{k}' \times v_o (-\vec{i}') = -2\omega v_o \vec{j}'$$

La aceleración absoluta:  $\vec{a} = -\omega^2(1 - v_o t)\vec{i}' - 2\omega v_o \vec{j}'$

57.-Un satélite de la Luna se encuentra a una altura  $h$  de su centro. Va provisto de una cámara fotográfica de distancia focal 500 mm. En la Tierra existe una cámara igual a la anterior. Se realizan al mismo tiempo dos fotografías de la Luna, una desde la Tierra y otra desde el satélite. Los diámetros de la imagen de la Luna obtenidos en cada caso son  $d_1 = 4,5$  mm y  $d_2 = 250$  mm. Determinar el periodo de rotación del satélite.

La intensidad del campo gravitatorio en la Luna es  $1/6$  del de la Tierra. La distancia Tierra Luna es  $D = 380000$  km.

La distancia Tierra-Luna es tan grande que en la cámara fotográfica situada en la Tierra se obtendrá una fotografía completa de la Luna y la imagen está situada en el plano focal.

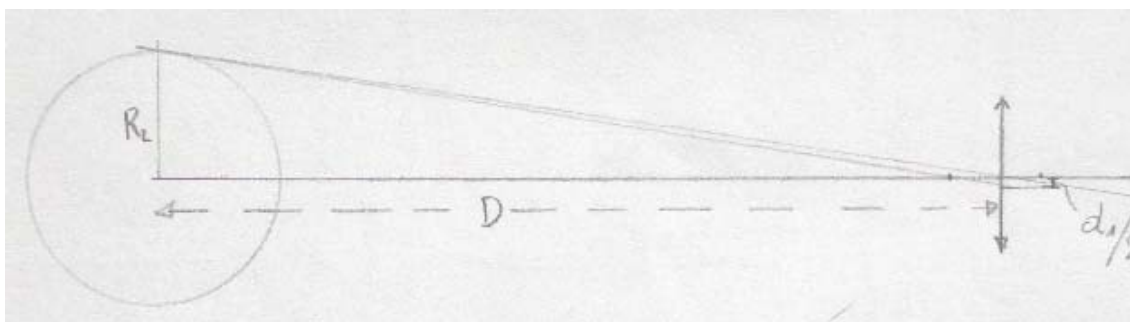


Fig.1

La figura 1 es un dibujo (no a escala) cuando la fotografía se hace desde la Tierra. De los triángulos se deduce:

$$\frac{D}{R_L} = \frac{f}{\frac{d_1}{2}} \Rightarrow R_L = \frac{D d_1}{2f} = \frac{380000 \text{ km} \cdot 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2 \cdot 500 \cdot 10^{-3}} = 1710 \text{ km}$$

Cuando la fotografía se hace desde el satélite no se puede abarcar toda la Luna sino una parte de ella, como indica la figura 2 (no está a escala).

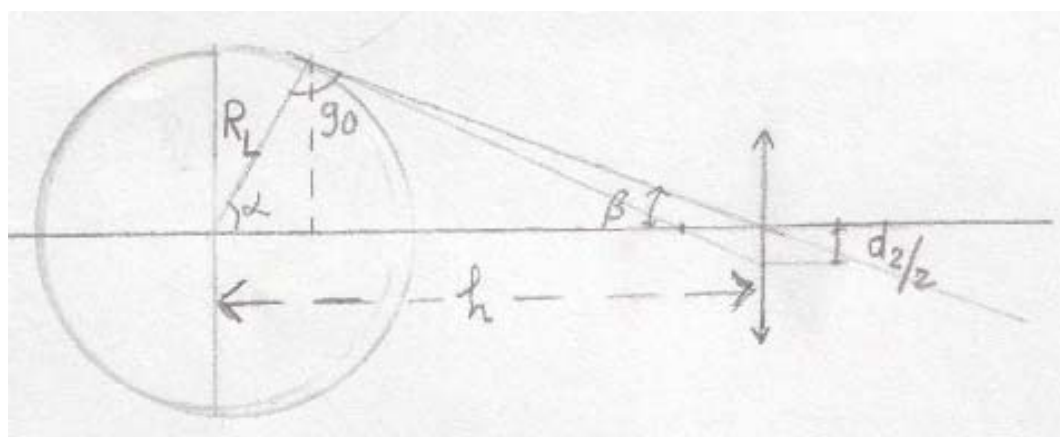


Fig.2

El ángulo  $\alpha$  es complementario del  $\beta$ . De la figura 2 se deduce:  $\text{sen}\beta = \frac{R_L}{h}$

$$\frac{h - R_L \text{sen}\beta}{R_L \text{cos}\beta} = \frac{f}{\frac{d_2}{2}} = \frac{2f}{d_2} \Rightarrow \frac{h - R_L \cdot \frac{R_L}{h}}{R_L \sqrt{1 - \frac{R_L^2}{h^2}}} = \frac{2f}{d_2} \Rightarrow \frac{\frac{h^2 - R_L^2}{h}}{\frac{R_L}{h} \sqrt{h^2 - R_L^2}} = \frac{2f}{d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{h^2 - R_L^2}}{R_L} = \frac{2f}{d_2} \Rightarrow h^2 - R_L^2 = \frac{4f^2}{d_2^2} R_L^2 \Rightarrow h = R_L \sqrt{1 + \frac{4f^2}{d_2^2}} = 1710\text{km} \sqrt{1 + \frac{4 \cdot (500 \cdot 10^3)^2}{(250 \cdot 10^3)^2}}$$

$$h = 1710\text{km} \cdot \sqrt{17} = 7051\text{km}$$

La fuerza de atracción gravitatoria entre la Luna y el satélite, de masa  $m'$ , proporciona la fuerza centrípeta de éste.

$$G \frac{M_L m'}{h^2} = \frac{m' v^2}{h} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_L}{h}} = \frac{2\pi h}{T} \Rightarrow T = 2\pi h \sqrt{\frac{h}{GM_L}}$$

La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna es:

$$g_L = \frac{GM_L}{R_L^2} \Rightarrow GM_L = g_L R_L^2$$

El periodo de rotación del satélite vale:

$$T = 2\pi h \sqrt{\frac{h}{g_L R_L^2}} = \frac{2\pi h}{R_L} \sqrt{\frac{h}{g_L}} = \frac{2\pi 7051}{1710} \sqrt{\frac{7051 \cdot 10^3}{\frac{9,8}{6}}} = 5,4 \cdot 10^4 \text{s} \approx 15 \text{ horas}$$

58.- Se lanza un cuerpo de masa  $m$ , considerado puntual, con una velocidad inicial vertical  $v_0$ . La resistencia que opone el medio es directamente proporcional a la velocidad  $R = kv$ .

a) Determinar la ecuación que relaciona la velocidad con el tiempo

b) Dibujar juntas las gráficas de la velocidad en el caso indicado y si no hubiese resistencia del medio.

c) Calcular para ambos casos la altura alcanzada por la masa  $m$ .

Datos  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $k=0,4 \text{ Ns/m}$ ,  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ,  $m= 1 \text{ kg}$

a) Al ascender el cuerpo existen dos fuerzas verticales dirigidas hacia abajo. Si  $\vec{k}$  es el vector unitario en dirección vertical y hacia arriba, escribimos de acuerdo con la segunda ley de Newton

a)

$$(mg + kv)(-\vec{k}) = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow -(mg + kv) = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = -\frac{dv}{\left(g + \frac{k}{m}v\right)}$$

Para resolver la ecuación diferencial hacemos el siguiente cambio de variable:  $g + \frac{k}{m}v = \rho$  y

de aquí

$$\frac{k}{m}dv = d\rho$$

Sustituyendo

$$\int dt = -\int \frac{\frac{m}{k}d\rho}{\rho} \Rightarrow t = -\frac{m}{k} \ln \rho + \text{Cte} = -\frac{m}{k} \ln \left(g + \frac{k}{m}v\right) + \text{cte}$$

Según las condiciones iniciales, cuando  $t=0$ ,  $v = \text{velocidad inicial} = v_0$

$$\text{cte} = \frac{m}{k} \ln \left(g + \frac{k}{m}v_0\right)$$

La ecuación del tiempo

$$t = \frac{m}{k} \ln \frac{g + \frac{k}{m}v_0}{g + \frac{k}{m}v} \Rightarrow e^{\frac{kt}{m}} = \frac{g + \frac{k}{m}v_0}{g + \frac{k}{m}v} \Rightarrow g + \frac{k}{m}v = \left(g + \frac{k}{m}v_0\right) e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow$$

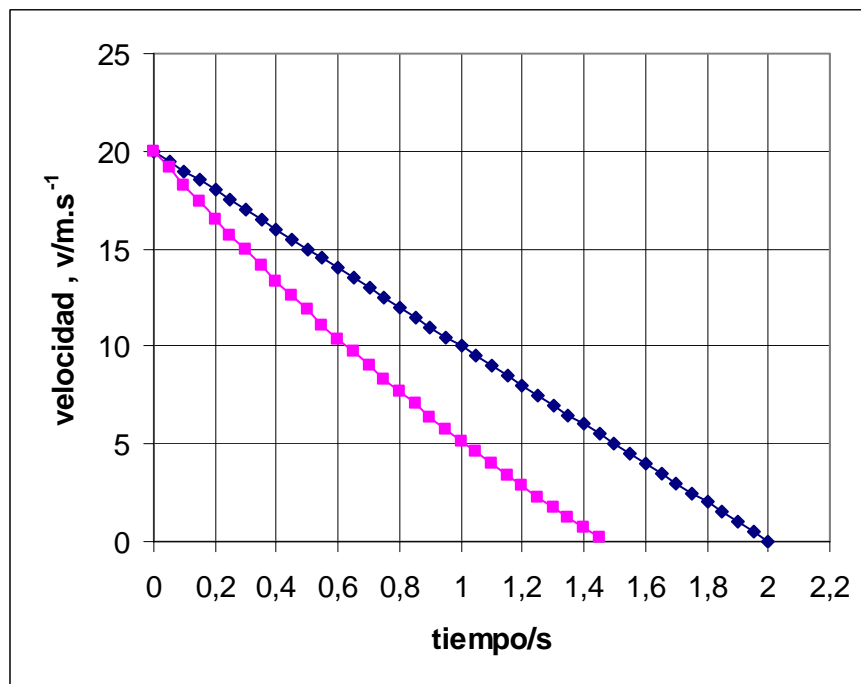
$$v = \frac{m}{k} \left(g + \frac{k}{m}v_0\right) e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} \quad (1)$$

b) Sustituimos los datos del problema en la ecuación (1)

$$v = \frac{1}{0,4} \left( 10 + \frac{0,4}{1} \cdot 20 \right) e^{-\frac{0,4}{1}t} - \frac{1}{0,4} \cdot 10 = 45 \cdot e^{-0,4t} - 25$$

Si no hubiese fuerza resistente, el movimiento de subida es uniformemente retardado

$$v = 20 - 10t$$



c) La altura alcanzada cuando no existe fuerza resistente es:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20 \text{ m}$$

Cuando existe fuerza resistente:

$$h' = \int_0^{\tau} v dt = \int_0^{\tau} (45 \cdot e^{-0,4t} - 25) dt = 45 \cdot e^{-0,4t} \left( -\frac{1}{0,4} \right) - 25t \Big|_0^{\tau} \Rightarrow$$

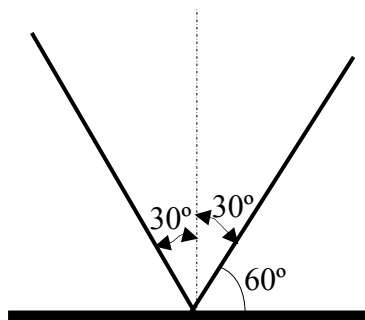
$$h' = -112,5 \cdot e^{-0,4\tau} + 112,5 - 25\tau$$

En la ecuación de  $h'$ ,  $\tau$  significa el tiempo de subida, es decir, el tiempo que tarda en anularse la velocidad.

$$0 = 45 \cdot e^{-0,4\tau} - 25 \Rightarrow \ln \frac{25}{45} = -0,4\tau \Rightarrow \tau = 1,469 \text{ s}$$

$$h' = -112,5 \cdot e^{-0,4 \cdot 1,469} + 112,5 - 25 \cdot 1,469 = 14,2 \text{ m}$$

59.- Dos planos forman entre sí un ángulo  $\alpha = 60^\circ$  y se disponen sobre un suelo horizontal en la forma que indica la figura inferior



**Sobre estos planos se sitúa un cubo de arista  $a$ . Si no existe rozamiento entre el cubo y los planos, determinar cómo han de colocarse el cubo entre los planos para que se encuentre en equilibrio.**

Para que el cubo se encuentre en equilibrio las fuerzas que actúen sobre él deben cumplir dos condiciones: una que la suma de esas fuerzas sea nula, otra que el momento resultante de las fuerzas respecto del centro de masas del cubo sea nulo.

Sobre el cubo actúan tres fuerzas, las dos reacciones de los planos y su peso. En la figura 1 se ha colocado el cubo en una determinada posición y se han dibujado las dos reacciones de los planos.

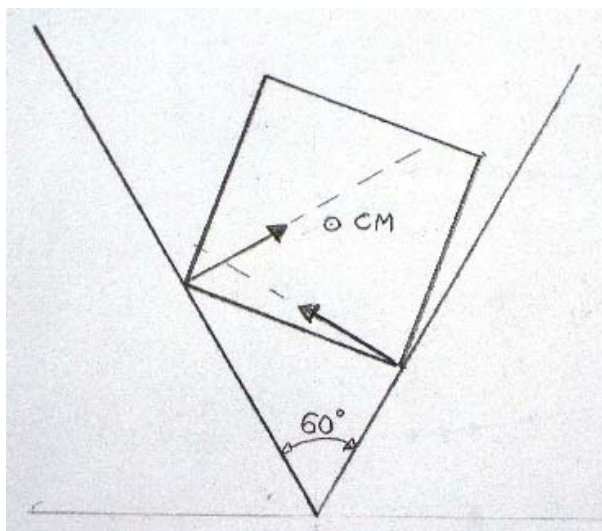


Fig.1

Las fuerzas de reacción de los planos sobre el cubo son perpendiculares a las respectivas paredes, ya que no existe rozamiento. En la figura 1 se observa que dichas fuerzas crean momentos respecto del centro de masas del cubo. Se infiere que solamente existen dos posiciones para las que los momentos sean nulos y ambas se encuentran dibujadas en la figura 2.

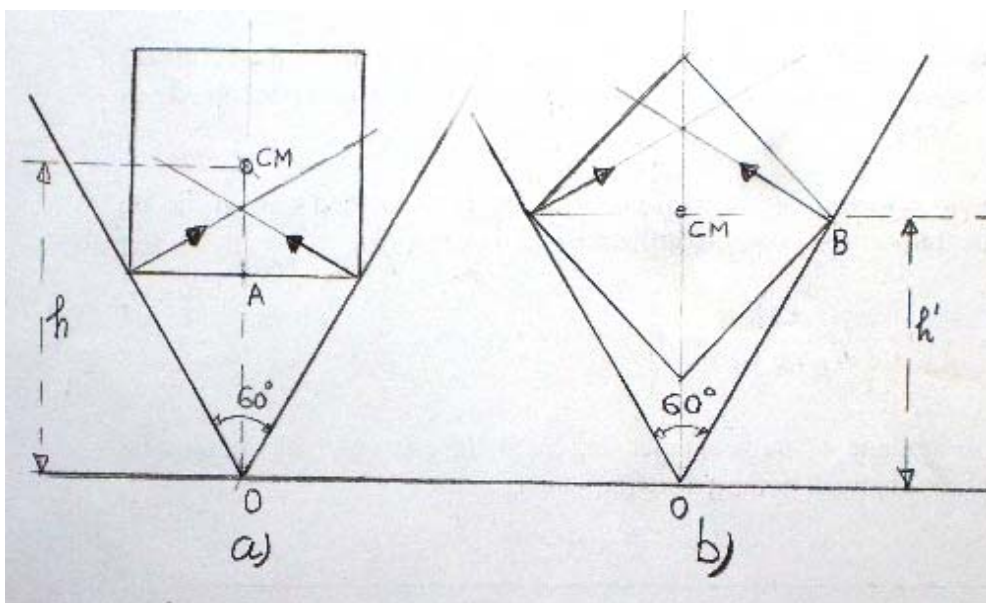


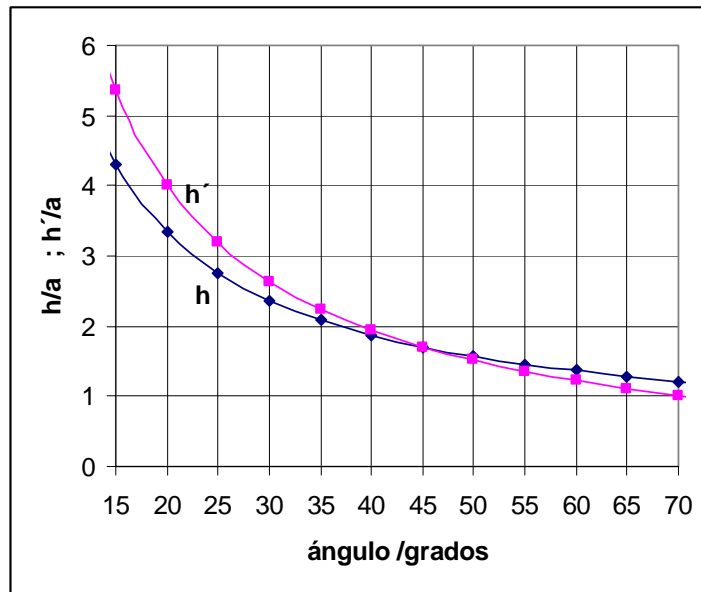
Fig.2

De las dos posiciones de equilibrio será estable la que tenga el centro de masa más bajo respecto del suelo horizontal. De la figura 2, dibujada a escala, se observa que es más estable la posición b). Calculamos las alturas del centro de masas (CM) en cada caso. Llamando  $\alpha$  al ángulo que forman los planos entre sí.

$$h = OA + A \overline{CM} = \frac{\frac{a}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{1}{\tan 30} \right) = 1,366 a$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{CMB}}{h'} = \frac{a\sqrt{2}}{2h'} \Rightarrow h' = \frac{a\sqrt{2}}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \frac{\sqrt{2}}{\tan 30} = 1,225 a$$

No siempre la posición b) tiene el centro de masas más bajo que la posición a). En la gráfica inferior se han representado los valores de  $h$  y  $h'$  en función del ángulo alfa.



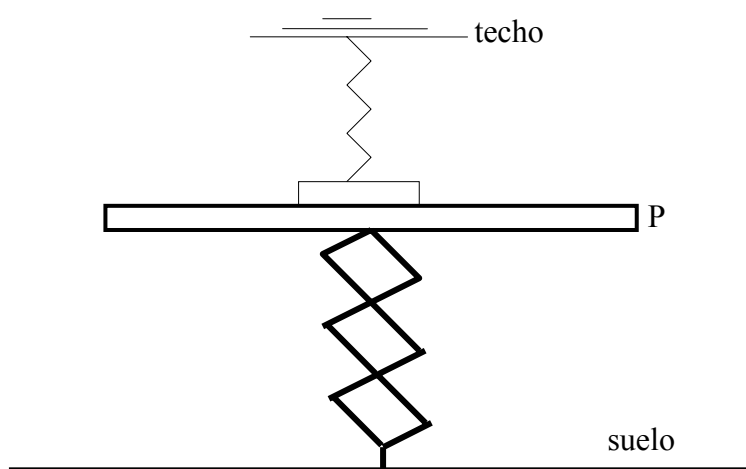
60.- En la figura inferior  $P$  es una plataforma que puede deslizarse verticalmente hacia abajo. Encima de ella está situado un cuerpo de masa  $m$ , unido a un muelle con uno de sus extremos fijo en el techo. Inicialmente el muelle no está estirado ni comprimido.

Si la plataforma comienza a moverse verticalmente hacia abajo con una aceleración  $a$ .

1) Determinar el alargamiento del muelle cuando el cuerpo se separe de la plataforma y el tiempo que transcurre.

2) El alargamiento máximo que experimenta el muelle.

3) Estudiar el movimiento del cuerpo a partir del alargamiento máximo del muelle.



1) En la figura 1 se representa el proceso:

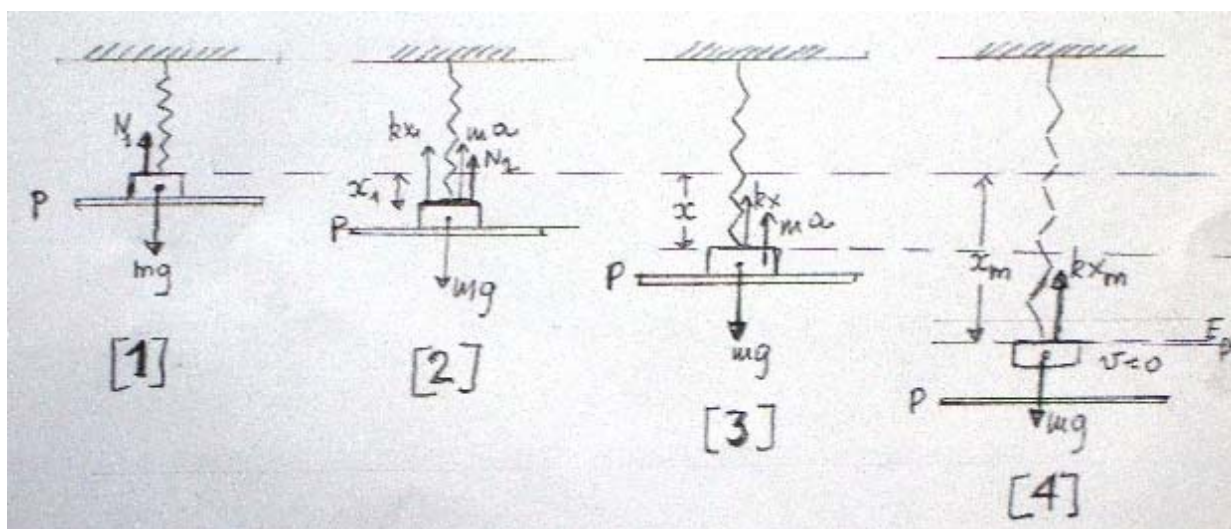


Fig.1

- 1) Estado inicial, tiempo  $t=0$
- 2) La plataforma se ha desplazado hacia abajo una distancia  $x_1$ , todavía el cuerpo  $m$  está en contacto con la plataforma
- 3) Cuando el alargamiento del muelle es  $x$ , el cuerpo y la plataforma se separan, en ese instante la plataforma y el cuerpo poseen la velocidad  $v$  hacia abajo
- 4) Una vez separados plataforma y cuerpo, como éste tiene velocidad  $v$  hacia abajo se seguirá alargando el muelle hasta que la velocidad del cuerpo sea cero.

En (1) actúan sobre el cuerpo dos fuerzas el peso  $mg$  y la reacción  $N_1$  que es la fuerza que ejerce la plataforma sobre el cuerpo,  $N_1=mg$

En (2) situamos un sistema de referencia sobre el cuerpo, por tanto este referencial es no inercial. Sobre el cuerpo actúa el peso,  $mg$  vertical hacia abajo, la fuerza elástica del muelle,  $kx_1$ , la fuerza con que la plataforma empuja al cuerpo,  $N_2$ , y la fuerza inercial,  $ma$ . Estas tres fuerzas actúan en dirección vertical y hacia arriba. Para el observador no inercial, se cumple:

$$mg = kx_1 + N_2 + ma$$

En (3) el cuerpo está justamente desprendiéndose de la plataforma y en ese instante cesa la fuerza entre el cuerpo y la plataforma, y se cumple:

$$mg = kx + ma \Rightarrow x = \frac{m(g-a)}{k}$$

En ese mismo instante la plataforma y el cuerpo poseen la velocidad  $v = at$ . Ambos se han movido con movimiento uniformemente acelerado y ha recorrido la distancia  $x$

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ka}}$$

2) En (4) el cuerpo alcanza el máximo desplazamiento  $x_m$  y su velocidad es cero. Tomamos como nivel de referencia de la energía potencial la posición que ahora ocupa el cuerpo e igualamos las energías en (3) y (4). En tres existe energía elástica del muelle, energía potencial gravitatoria y energía cinética, en (4) energía elástica

$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}kx^2 + mg(x_m - x) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow x_m^2 = x^2 + \frac{2mg}{k}(x_m - x) + \frac{mv^2}{k}$$

Sustituimos  $x$  y  $v$  por sus respectivos valores:

$$x_m^2 - \frac{2mg}{k}x_m = \frac{m^2(g-a)^2}{k^2} - \frac{2mg}{k} \left[ \frac{m(g-a)}{k} \right] + \frac{m}{k}a^2 \left( \frac{2m(g-a)}{ka} \right) =$$

$$= \frac{m^2}{k^2} [(g-a)^2 - 2g(g-a) + 2a(g-a)] = \frac{m^2}{k^2} (g-a)(g-a-2g+2a) \Rightarrow$$

$$x_m^2 - \frac{2mg}{k}x_m = \frac{m^2}{k^2}(g-a)(-g+a) \Rightarrow x_m^2 - \frac{2mg}{k}x_m - \frac{m^2}{k^2}(-g^2 - a^2 + 2ag) = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$x_m = \frac{\frac{2mg}{k} \pm \sqrt{\frac{4m^2g^2}{k^2} + \frac{4m^2}{k^2}(-g^2 - a^2 + 2ag)}}{2} = \frac{mg}{k} \pm \frac{m}{k} \sqrt{a(2g-a)} \Rightarrow$$

$$x_m = \frac{m}{k} (g \pm \sqrt{a(2g-a)})$$

De las dos soluciones de la ecuación debemos escoger aquella que haga  $x_m > x$

Si  $\sqrt{a(2g-a)} > a$  debemos elegir el valor positivo

$$a(2g-a) > a^2 \Rightarrow 2ga - a^2 > a^2 \Rightarrow 2g - a > a \Rightarrow 2g > 2a \Rightarrow g > a$$

Como es cierto que  $g$  es mayor que  $a$ , elegimos la raíz positiva

$$x_m = \frac{m}{k} (g + \sqrt{a(2g-a)})$$

3) A partir de la posición de máxima elongación el cuerpo efectuará un movimiento vibratorio armónico, siendo su posición de equilibrio cuando el peso iguale a la fuerza elástica

$$mg = kx_o \Rightarrow x_o = \frac{mg}{k}$$

$x_o$  es el alargamiento del muelle respecto de la posición (1) de la figura 1. Si  $L$  es la longitud natural del muelle la posición de equilibrio dista del techo  $L+x_o$ .

La amplitud del movimiento es:

$$A = x_m - x_o = \frac{m}{k} \sqrt{a(2g-a)}$$

El periodo del movimiento:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

**61.-Se considera a la Tierra y a la Luna en un mismo plano respecto del Sol. Dibujar el movimiento de ambos tal como los ve un observador situado en el Sol.**

**Distancia Tierra –Sol  $1,49 \cdot 10^9$  km , distancia tierra Luna  $3,8 \cdot 10^5$  km**

La Tierra describe aproximadamente una circunferencia respecto del Sol a lo largo de un año. La Luna describe alrededor de la Tierra una circunferencia a lo largo de un mes. Sobre el Sol tomamos unos ejes coordenados fijos tal como indica la figura 1.

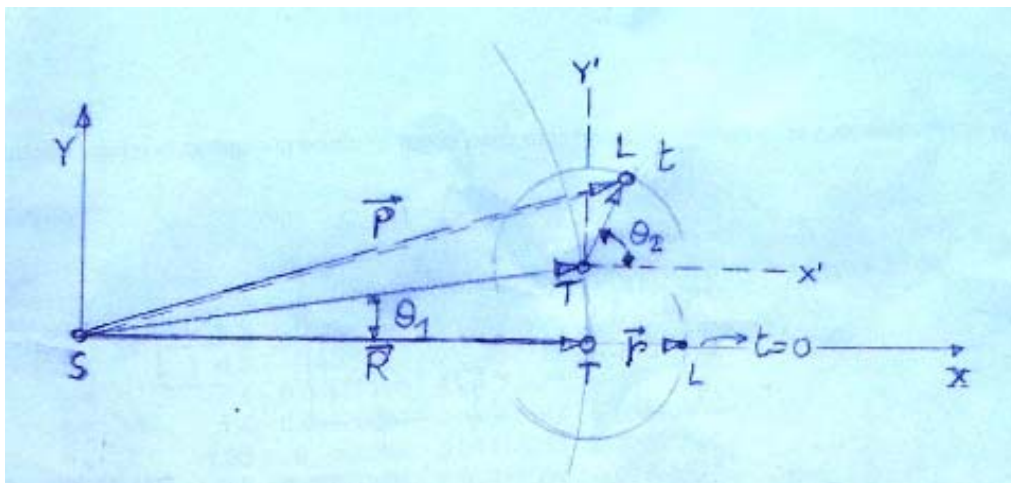


Fig.1

Suponemos que en el tiempo  $t=0$  la situación de la Tierra y de la Luna es la indicada en la figura.. Un tiempo después  $t$  , La Tierra ha descrito el ángulo  $\theta_1$  y la Luna un ángulo  $\theta_2$ .

$$\theta_1 = \omega_1 t$$

Teniendo en cuenta que la Tierra tarda 12 meses en describir una circunferencia, se deduce que

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ rad/mes}$$

Las coordenadas de la Tierra respecto de los ejes XY son las siguientes:

$$X_T = R \cos \theta_1 = R \cos \omega_1 t = R \cos \frac{\pi}{6} t$$

$$Y_T = R \sin \theta_1 = R \sin \omega_1 t = R \sin \frac{\pi}{6} t$$

La Luna describe respecto de la Tierra una circunferencia al cabo de un mes, su velocidad angular es.

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/mes}$$

Las coordenadas de la Luna respecto de los ejes X'Y' son:

$$X_L = r \cos \theta_2 = R \cos \omega_2 t = R \cos 2\pi t$$

$$Y_L = r \sin \theta_2 = R \sin \omega_2 t = R \sin 2\pi t$$

El vector  $\vec{P} = \vec{R} + \vec{r}$  y sus coordenadas respecto de los ejes XY son:

$$X = R \cos \frac{\pi}{6} t + r \cos 2\pi t = 1,49 \cdot 10^9 \cos \frac{\pi}{6} t + 3,8 \cdot 10^5 \cos 2\pi t$$

$$Y = R \sin \frac{\pi}{6} t + r \sin 2\pi t = 1,49 \cdot 10^9 \sin \frac{\pi}{6} t + 3,8 \cdot 10^5 \sin 2\pi t$$

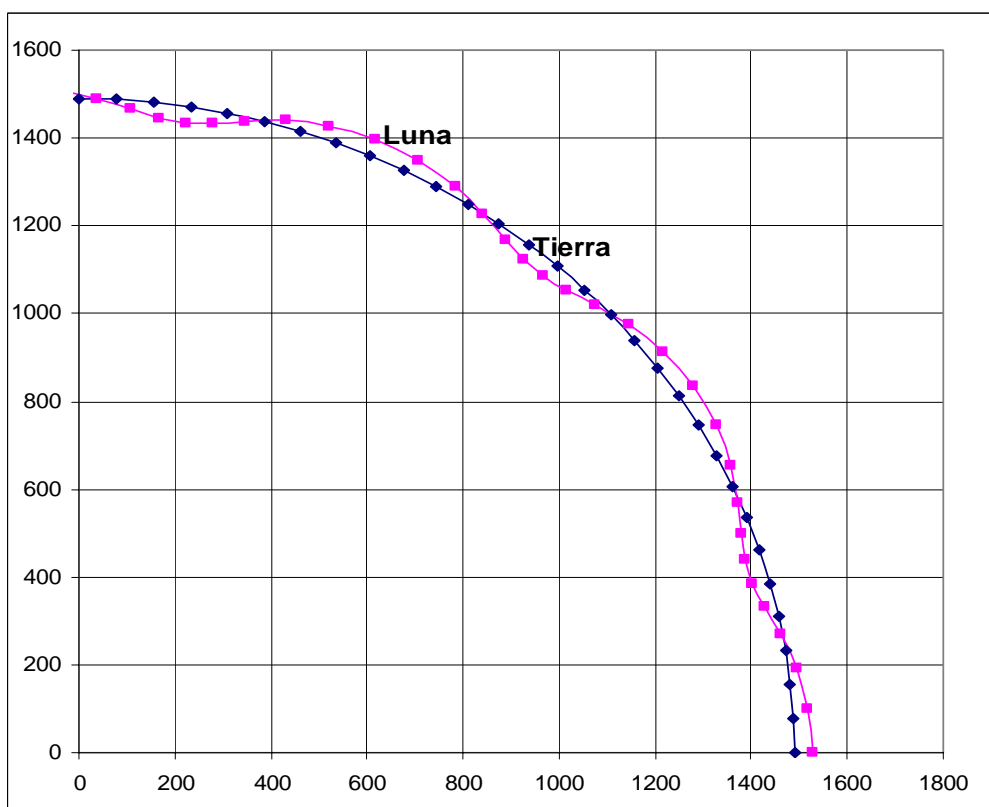
En un mismo gráfico representamos la trayectoria de la Tierra que es una circunferencia y la de la Luna. Dado que el coeficiente del primer término de las ecuaciones anteriores es mucho mayor que el segundo y lo que se pretende es comparar las formas de las trayectorias de la Tierra y de la Luna vistas desde el Sol, lo que hacemos es representar las ecuaciones siguientes

$$A = 1490 \cdot \cos \frac{\pi}{6} t + 38 \cdot \cos 2\pi t$$

$$B = 1490 \sin \frac{\pi}{6} t + 38 \cdot 10^5 \sin 2\pi t$$

La representación se ha hecho durante un periodo de tres meses.

De esta forma es posible apreciar el movimiento de la Luna, que unas veces se encuentra más lejos del Sol y otras más cerca, y además se observa cómo corta a la órbita de la Tierra



**62.-Una partícula efectúa un movimiento vibratorio armónico a la largo del eje  $x$ , siendo la posición de equilibrio  $x=0$ . En un determinado instante la posición de la partícula es  $x_0=25,0$  cm y su velocidad  $v_{ox}=100$  cm/s. Determinar su posición y velocidad cuando hayan transcurridos  $t=2,40$  segundos después del instante anterior y la longitud recorrida por la partícula en ese tiempo. Dato  $\omega=4$  s<sup>-1</sup>.**

Las ecuaciones generales del movimiento armónico son:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Designamos con  $t=0$  el instante en que la partícula posee la velocidad  $v_{ox}$  y la posición  $x_0$ .

Las ecuaciones anteriores para  $t=0$  son:

$$x_0 = A \operatorname{sen} \varphi ; v_{ox} = A \omega \cos \varphi \Rightarrow x_0^2 = A^2 \operatorname{sen}^2 \varphi ; \frac{v_{ox}^2}{\omega^2} = A^2 \cos^2 \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2 + \frac{v_{ox}^2}{\omega^2} = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{ox}^2}{\omega^2}} = \sqrt{25^2 + \frac{100^2}{25^2}} = 25\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\frac{x_0 \omega}{v_{ox}} = \operatorname{tag} = \frac{25 \cdot 4}{100} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones generales resulta:

$$x = 25\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) = 25\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(4 \cdot 2,4 + \frac{\pi}{4}\right) = -29 \text{ cm}$$

$$v = 25\sqrt{2} \cdot 4 \cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) = 100\sqrt{2} \cos\left(4 \cdot 2,4 + \frac{\pi}{4}\right) = -81 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

63.-Una plataforma se desplaza en dirección vertical según la ecuación  $y=A(1-\cos \omega t)$ , siendo  $A = 0,5 \text{ m}$  y  $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$ . Sobre la plataforma está situado un cuerpo de masa  $m= 1 \text{ kg}$ .

a) Determinar la trayectoria, velocidad y aceleración de la plataforma.

b) Calcular la fuerza  $N$  con que la plataforma empuja a la masa  $m$ .

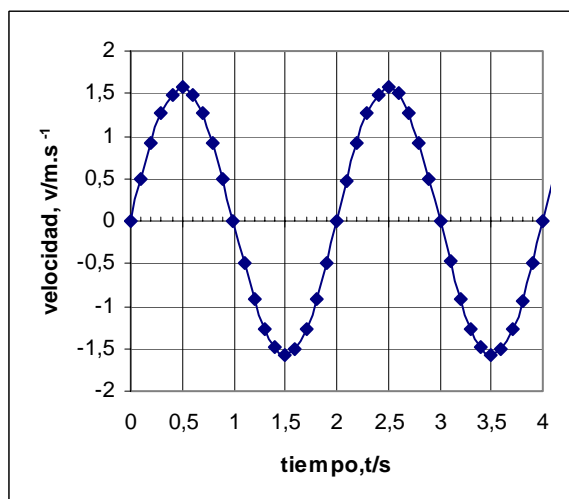
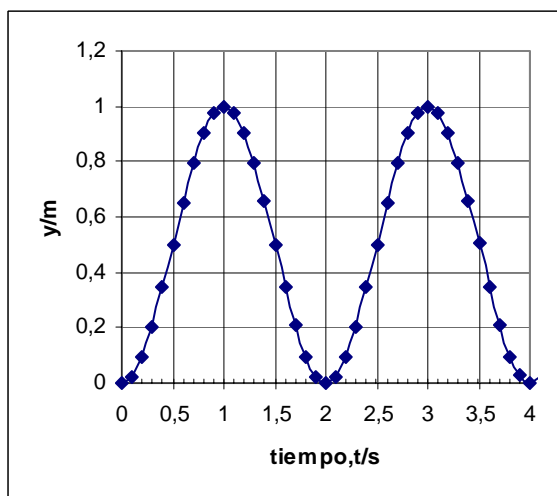
c) Calcular el valor de  $A$  mínimo para que desaparezca el contacto entre  $m$  y la plataforma.

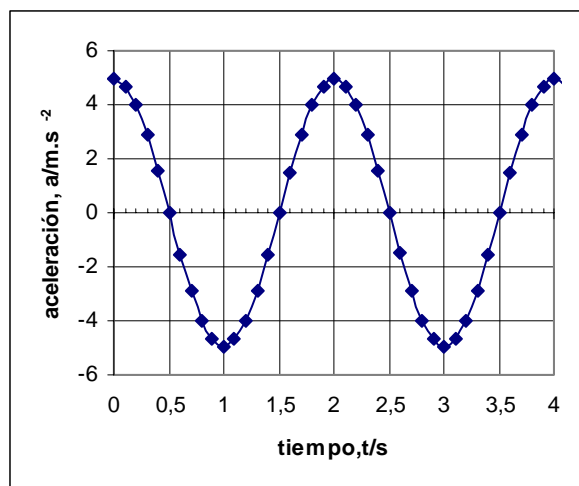
d) Si  $A = 1,8 \text{ m}$ , calcular en qué lugar de la trayectoria de la plataforma cesa el contacto de  $m$  con ella.

Si tenemos en cuenta las relaciones de la velocidad  $v$  y aceleración con  $y$

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \sin \omega t \quad ; \quad a = \frac{d^2y}{dt^2} = A\omega^2 \cos \omega t$$

Ahora representamos los valores de  $y$ ,  $v$  y  $a$  frente al tiempo





Al analizar las gráficas deducimos que la plataforma se desplaza hacia arriba y hacia abajo siguiendo un movimiento periódico  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\text{ s}$

siendo la distancia máxima 1 m. La velocidad es nula en los extremos de la trayectoria y máxima en el centro y la aceleración es máxima en los extremos y nula en el centro. En el esquema de la figura 1 se indica los sentidos de la velocidad y aceleración.

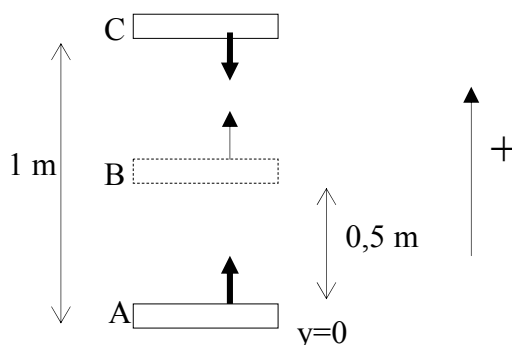


Fig.1

En la posición A la velocidad es nula y la aceleración máxima en sentido positivo. De A a B la velocidad aumenta y la aceleración disminuye en módulo y su sentido es positivo.

En B la velocidad alcanza su máximo valor y la aceleración es nula.

Entre B y C la velocidad disminuye (siendo positiva) y la aceleración aumenta en sentido negativo. En C la aceleración es máxima y de sentido negativo y la velocidad es nula.

Entre C y B la velocidad aumenta (siendo negativa) y es máxima en B, de B a C disminuye hasta anularse en A. La aceleración entre C y B es negativa y disminuye haciéndose nula en B, luego entre B y A aumenta en sentido positivo y es máxima en A a partir de 2 segundos el ciclo se repite.

b) Si escogemos una situación de la plataforma entre A y B cuando se desplaza en sentido positivo, las fuerzas que actúan sobre la masa  $m$  están representadas en la figura 2.

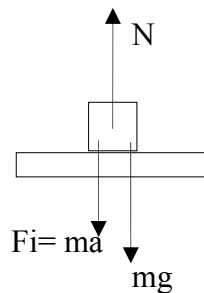
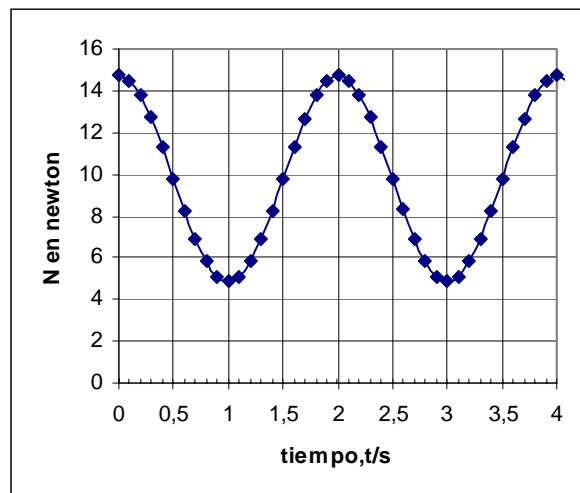


Fig.2

Se considera un sistema de referencia ligado a la masa  $m$  y por tanto no inercial, por esta razón se incluye una fuerza de inercia.

$$N = mg + F_i = mg + mA\omega^2 \cos \omega t = g + A\omega^2 \cos \omega t = 9,8 + 0,5 \cdot 3,14^2 \cdot \cos 3,14 \cdot t$$

Si en la ecuación anterior damos valores a  $t$  y hacemos la representación gráfica obtenemos la gráfica siguiente



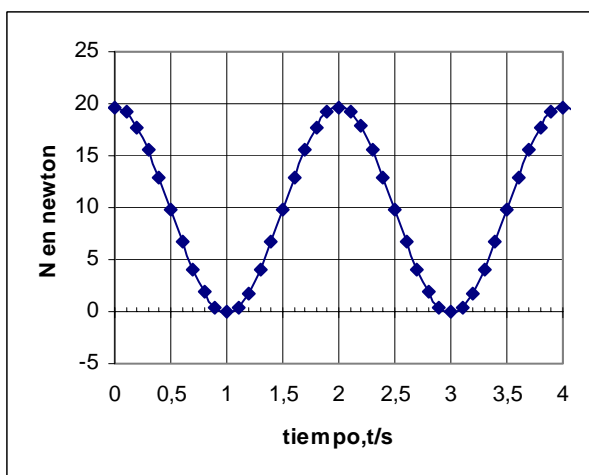
Teniendo en cuenta que  $N$  siempre es positivo se deduce que la masa  $m$  siempre permanece sobre la plataforma.

c) Si desaparece el contacto entre  $m$  y la plataforma el valor de  $N$  es nulo. Fijándonos en la gráfica de  $N$  frente a  $t$  se deduce que este hecho tiene lugar en la posición superior ya que entonces la fuerza de inercia y el peso tienen la misma dirección y sentidos contrarios.

$$N=0=mg+Fi \Rightarrow mg=Fi \Rightarrow -mg=mA\omega^2 \cos \omega t \Rightarrow A = \frac{-g}{\omega^2 \cos \omega t} = \frac{-g}{\omega^2 \cos \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9,8}{\pi^2} = 1\text{m}$$

La representación gráfica de N frente a t para esta situación es la siguiente



d) Utilizamos la ecuación

$$N = mg + Fi = 0 \Rightarrow -g = A\omega^2 \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = -\frac{g}{A\omega^2} = -\frac{9,8}{1,8 \cdot \pi^2} = -0,55$$

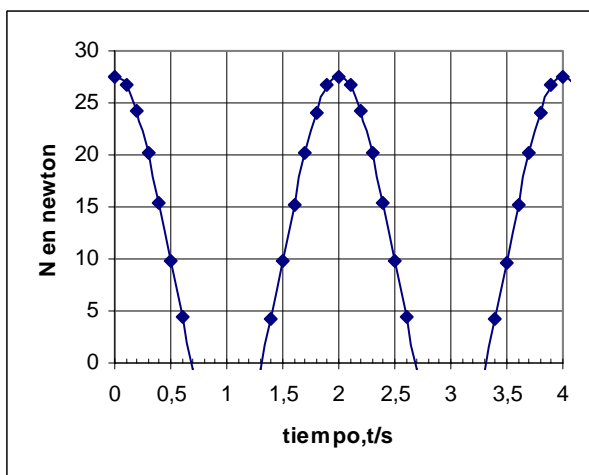
Llevando el valor del coseno a la ecuación de la posición resulta:

$$y = A(1 - \cos \omega t) = 1,8(1 + 0,55) = 2,79 \text{ m}$$

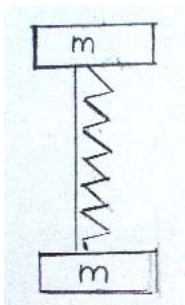
El tiempo para que ocurra el suceso anterior es:

$$\cos \omega t = -0,55 \Rightarrow \omega t = 2,15 \Rightarrow t = \frac{2,15}{\pi} = 0,68 \text{ s}$$

La gráfica de N frente a t es la siguiente:



64. En el sistema de la figura inferior las masas son iguales y el muelle está comprimido una distancia  $x$  respecto de su longitud natural en posición vertical. Ambas masas están unidas mediante una cuerda. Si se rompe la cuerda, determinar a partir de qué valores de  $x$  la masa inferior que está apoyada sobre el suelo salta de éste. La constante elástica del muelle es  $k$ .



En la figura 1 indicamos una marcha del proceso. En 1 el hilo que mantiene unidas a las masas se rompe, el muelle comienza a estirarse y en 2 adquiere su longitud natural, en 3 el muelle se estira más que su longitud natural, la masa  $m$  inferior sigue pegada al suelo y la masa  $m$  superior tiene una cierta velocidad vertical dirigida hacia arriba

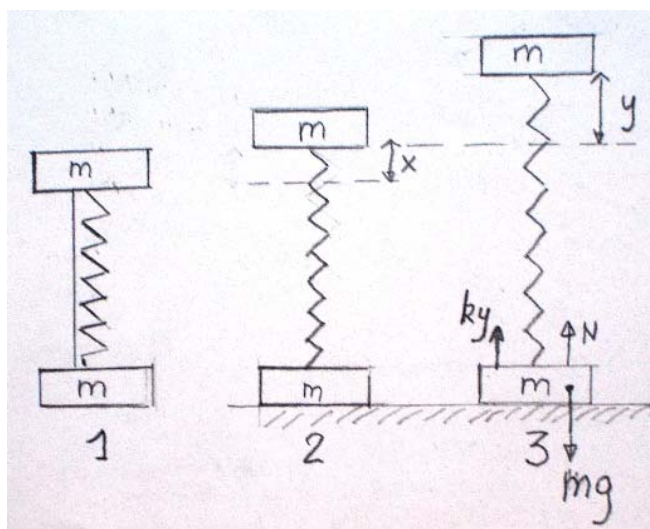


Fig.1

La energía almacenada en 1 vale  $\frac{1}{2}kx^2$

La energía en 3 es: potencial respecto del suelo  $mg(y + x)$  + energía elástica almacenada en el muelle estirado  $= \frac{1}{2}ky^2$  + energía cinética de la masa  $m$  superior  $= \frac{1}{2}mv^2$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mg(y + x) + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

En la figura 3, las fuerzas que actúan sobre la masa  $m$  inferior son: su peso (vertical y hacia abajo), la fuerza  $N$  con que el suelo empuja a la masa (vertical y hacia arriba) y la fuerza elástica del muelle  $ky$  (vertical y hacia arriba).

La masa  $m$  inferior se separará del suelo cuando  $N=0$ , entonces

$$mg = ky \Rightarrow y = \frac{mg}{k}$$

Llevando el valor de  $y$  a la ecuación (1) resulta:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{m^2g^2}{k} + mgx + \frac{1}{2}k \frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow x^2 - 2\frac{mgx}{k} - 3\frac{m^2g^2}{k^2} - \frac{mv^2}{k} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

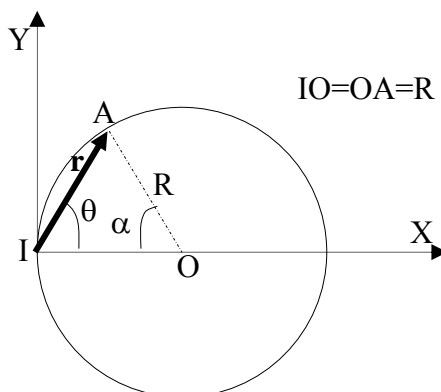
$$x = \frac{2\frac{mg}{k} \pm \sqrt{4\frac{m^2g^2}{k^2} + 4\left(\frac{3m^2g^2}{k^2} \cdot \frac{mv^2}{k}\right)}}{2}$$

Si en la solución anterior establecemos un valor de  $v$  al resolverla obtendríamos el correspondiente valor de  $x$ , el cual es tanto mayor cuanto mayor es  $v$ . El valor mínimo de  $x$  corresponde a  $v=0$ -

$$x = \frac{2\frac{mg}{k} \pm \sqrt{4\frac{m^2g^2}{k^2} + 4\left(\frac{3m^2g^2}{k^2}\right)}}{2} = \frac{2\frac{mg}{k} \pm 4\frac{mg}{k}}{2} = \frac{3mg}{k}$$

Cuando  $x > \frac{3mg}{k}$  la masa  $m$  podrá separarse del suelo.

65.-Una partícula puntual  $A$  describe la circunferencia de radio  $R = 50$  m. El radio vector  $\vec{r}$  gira respecto al eje  $X$  con una velocidad angular constante  $\omega = 0,40$  rad/s.



**Determinar las componentes de la velocidad y aceleración sobre los ejes coordenados. Calcular los módulos de la velocidad y aceleración. Representar las correspondientes gráficas utilizando el eje de abscisas como eje de tiempos.**

El triángulo IOA es isósceles; el ángulo  $\angle IAO$  vale  $\theta$ , luego  $\alpha + 2\theta = \pi \Rightarrow \alpha = \pi - 2\theta$   
Si en dicho triángulo aplicamos el teorema del seno resulta:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{r} = \frac{\text{sen } \theta}{R} \Rightarrow r = R \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \theta}$$

Consideremos el tiempo  $t=0$  cuando la partícula  $A$  pasa por el punto  $I$  y  $t$  cuando la partícula forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $X$ . Cuando  $t=0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y cuando  $t$ , el ángulo con el eje  $X$  es  $\theta$ .

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \omega t$$

$$\text{Resulta que: } r = R \frac{\text{sen}(\pi - 2\theta)}{\text{sen } \theta} = R \frac{\text{sen } \pi \cdot \cos 2\theta - \cos \pi \cdot \text{sen } 2\theta}{\text{sen } \theta} = R \frac{\text{sen } 2\theta}{\text{sen } \theta} = 2R \cos \theta$$

Las proyecciones de  $r$  sobre los ejes  $X$  e  $Y$  son:

$$r_x = r \cos \theta = 2R \cos^2 \theta = 2R \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \omega t \right)$$

$$r_y = r \text{sen } \theta = 2R \text{sen } \theta \cos \theta = R \text{sen } 2\theta = R \text{sen}(\pi - 2\omega t)$$

Las componentes de la velocidad sobre los ejes son:

$$v_x = \frac{dr_x}{dt} = -4R\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \cdot (-\omega) = 2R\omega \sin(\pi - 2\omega t)$$

$$v_y = \frac{dr_y}{dt} = R\cos(\pi - 2\omega t) \cdot (-2\omega) = -2R\omega \cos(\pi - 2\omega t)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4R^2\omega^2 [\sin^2(\pi - 2\omega t) + \cos^2(\pi - 2\omega t)]} = 2R\omega$$

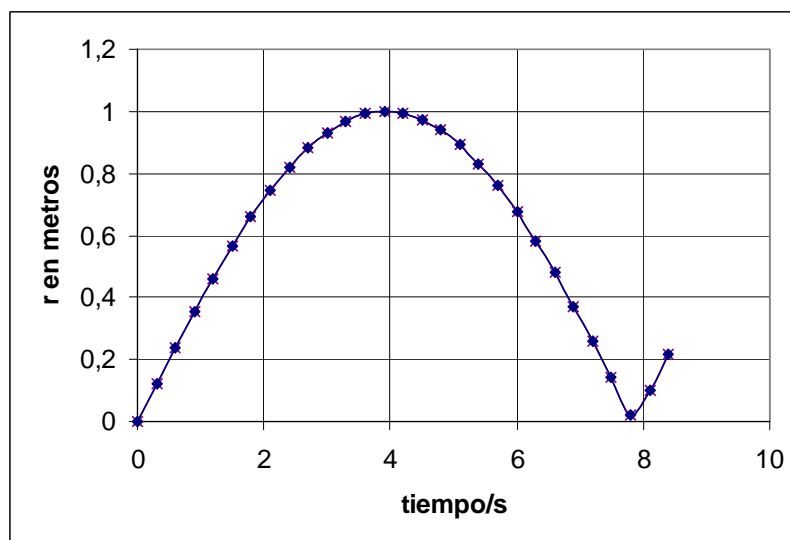
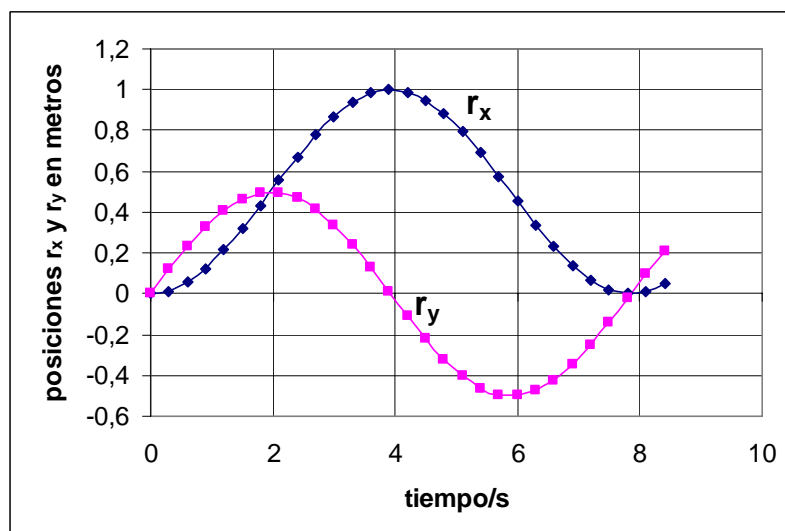
Las componentes de la aceleración sobre los ejes son:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2R\omega \cos(\pi - 2\omega t) \cdot (-2\omega) = -4\omega^2 R \cos(\pi - 2\omega t)$$

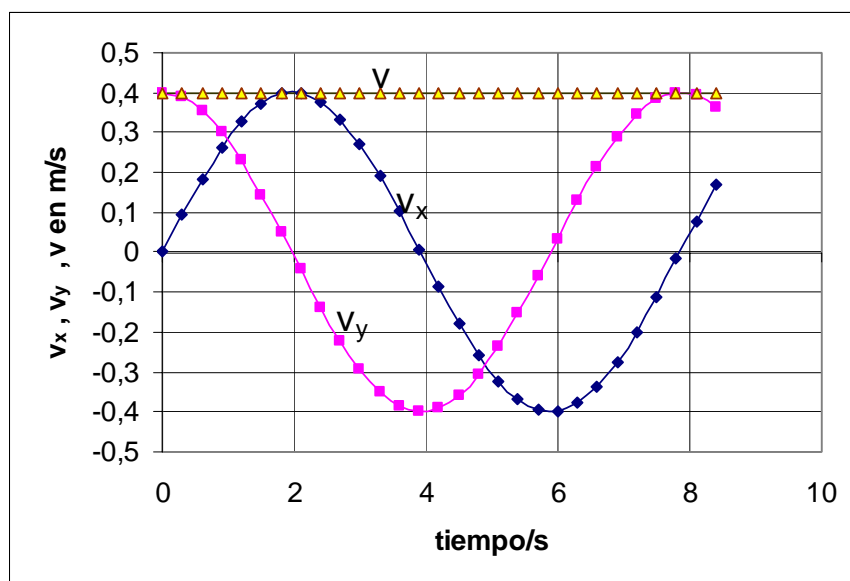
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2R\omega \sin(\pi - 2\omega t) \cdot (-2\omega) = -4\omega^2 R \sin(\pi - 2\omega t)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{16\omega^4 R^2 [\sin^2(\pi - 2\omega t) + \cos^2(\pi - 2\omega t)]} = 4R\omega^2$$

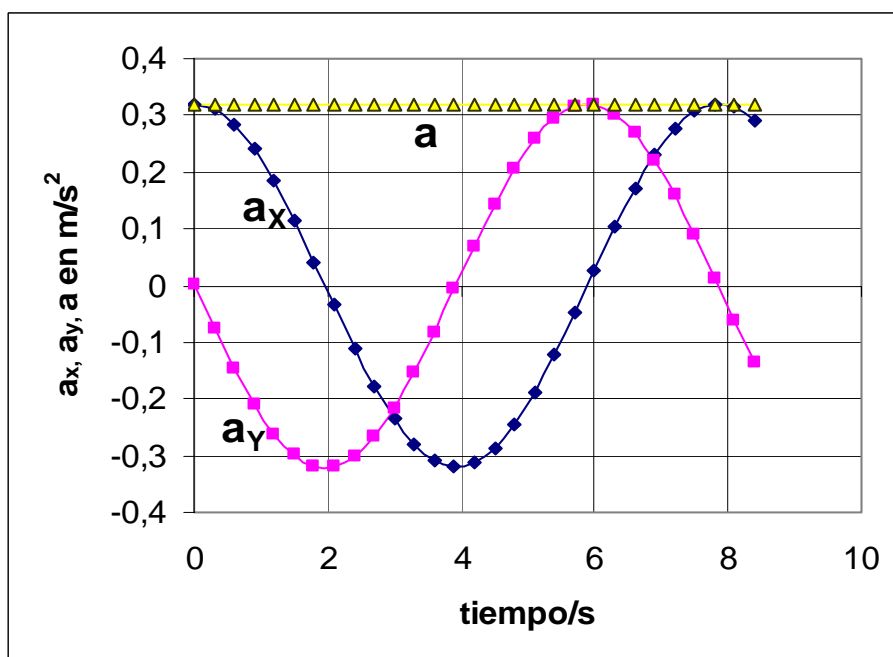
Las gráficas de las componentes de la posición y r frente al tiempo son:



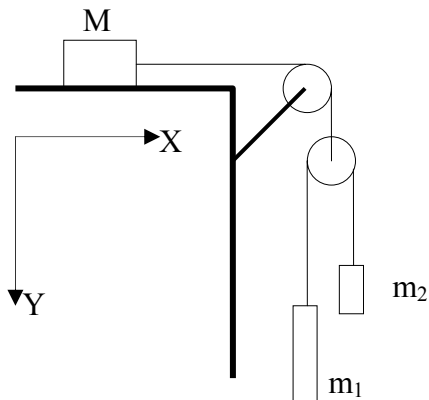
Gráfica de las velocidades



Gráfica de las aceleraciones



66.- a) *Calcular la aceleración de la masa  $m_1$  en el sistema de poleas de la figura. Se supone que no existen rozamientos, que las masas de las poleas y de las cuerdas son despreciables y que las cuerdas no varían su longitud cuando se someten a tensión.*



b) *Representar las aceleraciones para  $M=1\text{kg}$ ,  $m_1=1\text{kg}$  y  $m_2$  variable.*

c) *Representar las aceleraciones para  $m_1=2\text{kg}$ ,  $m_2=1\text{kg}$  y  $M$  variable.*

a) En la figura 1 se representan las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas

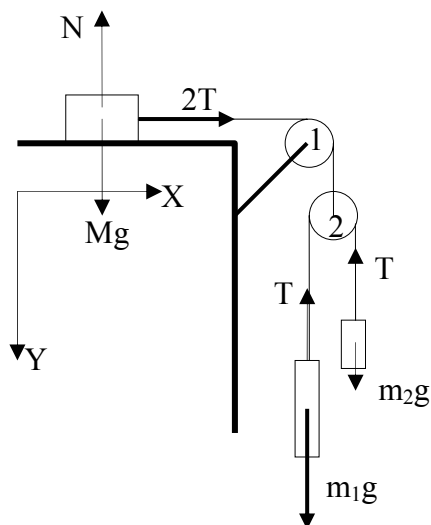


Fig.1

Las ecuaciones derivadas de la ley de Newton para cada masa son:

$$2T = Ma_x \quad (1)$$

$$m_1g - T = m_1a_{1y} \quad (2)$$

$$m_2g - T = m_2a_{2y} \quad (3)$$

Como la polea 2 está unida a la masa M por una cuerda inextensible, la aceleración de la polea 2 es igual numéricamente a la de la masa M y a partir de ahora designamos  $a = a_x$

Supongamos que M se desplaza de izquierda a derecha una distancia  $\Delta x$  en un tiempo  $\Delta t$ , en ese mismo tiempo la masa  $m_1$  se desplaza hacia abajo una distancia Y, respecto de la polea 2, y la polea 2 se desplaza hacia abajo una distancia y, que numéricamente es igual a  $\Delta x$ . El desplazamiento total de  $m_1$  respecto de los ejes fijos es:  $Y + \Delta x$ . La masa  $m_2$  se desplaza  $-Y$  hacia arriba respecto de la polea 2, y  $+\Delta x$  hacia abajo en total  $-Y + \Delta x$ .

Las aceleraciones son proporcionales a los desplazamientos

$$a = k\Delta x \quad , \quad a_1 = k(Y + \Delta x) \quad , \quad a_2 = k(-Y + \Delta x)$$

De las relaciones anteriores se deduce:

$$a_1 + a_2 = k(Y + \Delta x - Y + \Delta x) = 2k\Delta x = 2a \quad (4)$$

Multiplicamos la ecuación (2) por 2 y la sumamos a la (1). Cambiamos de signo a la (3) y la sumamos con la (2)

$$2m_1g = Ma + 2m_1a_1 \quad (5) \quad ; \quad g(m_1 - m_2) = m_1a_1 - m_2a_2 \quad (6)$$

En la ecuación (5) sustituimos a de la ecuación (4), y en la ecuación (6) despejamos  $a_2$ .

$$2m_1g = M \frac{a_1 + a_2}{2} + 2m_1a_1 \quad (7) \quad ; \quad a_2 = -\frac{g(m_1 - m_2)}{m_2} + \frac{m_1}{m_2}a_1 \quad (8)$$

Sustituimos el valor de  $a_2$  en (7)

$$2m_1g = \frac{M}{2}a_1 + \frac{M}{2} \left[ \frac{m_1a_1}{m_2} - \frac{m_1g}{m_2} + g \right] + 2m_1a_1 \quad \Rightarrow$$

$$4m_1g = Ma_1 + \frac{Mm_1}{m_2}a_1 - \frac{Mm_1}{m_2}g + Mg + 4m_1a_1 \quad \Rightarrow$$

$$4m_1m_2g + Mm_1g - Mm_2g = a_1(Mm_2 + Mm_1 + 4m_1m_2) \Rightarrow a_1 = \frac{4m_1m_2 + M(m_1 - m_2)}{4m_1m_2 + M(m_1 + m_2)}g$$

b)

$$a_1 = \frac{4m_2 + 1 - m_2}{4m_2 + 1 + m_2}g = \frac{3m_2 + 1}{5m_2 + 1}g$$

$$a_2 = \frac{a_1 - g(1 - m_2)}{m_2}$$

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Las gráficas corresponden a la figura 1.

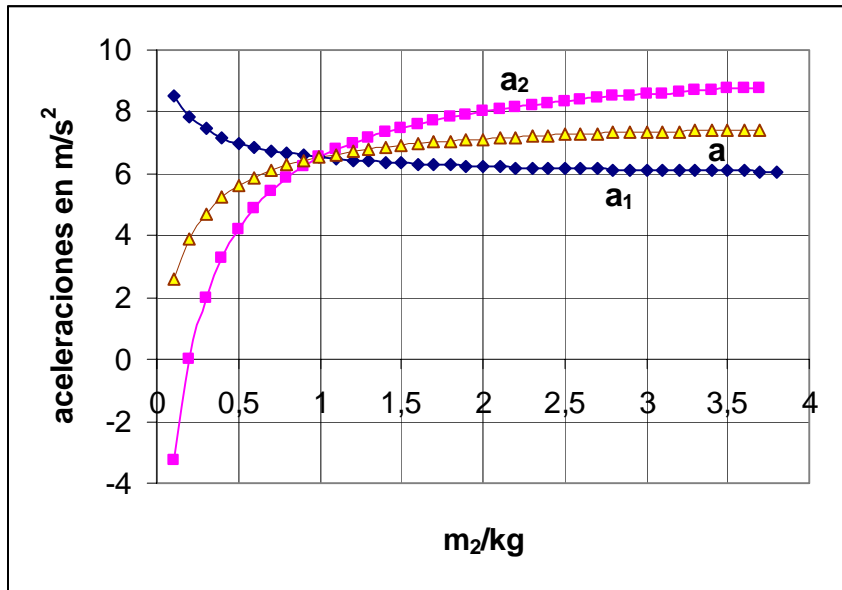


Fig.1

c)

$$a_1 = \frac{8+M}{8+3M}g, \quad a_2 = 2a_1 - g, \quad a = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Las graficas de las aceleraciones corresponden a la figura 2.

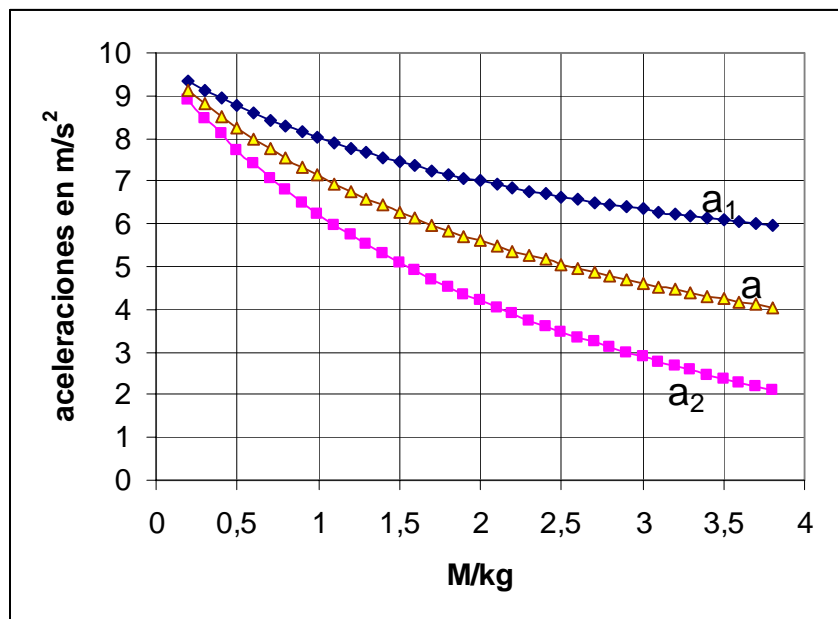
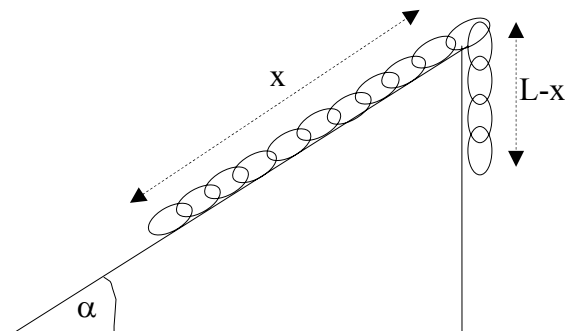


Fig.2

67.-Una cadena uniforme de longitud  $L$  está colocada sobre un plano inclinado  $\alpha$  en la forma que indica la figura.



Se sabe que cuando  $x=(2/3)L$ , la velocidad de la cadena es cero. El coeficiente de rozamiento de la cadena con el plano es  $\mu$ . a) Determinar la ecuación de la velocidad de la cadena cuando se mueva hacia abajo del plano inclinado. b) Calcular la velocidad en el instante en que toda la cadena está apoyada sobre el plano. c) Determinar para qué valores de  $\mu$  la cadena puede resbalar por el plano inclinado.

Designamos con  $\lambda$  al peso de la cadena por unidad de longitud..

$P_1 = \lambda x$ , el peso de la parte de la cadena que está en contacto con el plano inclinado.

$P_2 = \lambda(L - x)$ , el peso de la parte de la cadena que está en posición vertical.

$N$ , la fuerza que ejerce el plano sobre el trozo  $x$  de cadena.

$F_R = \mu N = \mu P_2 \cos \alpha$ , la fuerza de rozamiento paralela al plano

Si  $M$  es la masa total de la cadena, podemos escribir:

$$P_1 \operatorname{sen} \alpha - \mu P_1 \cos \alpha - P_2 = Ma = M \frac{dv}{dt} = M \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = M v \frac{dv}{dx} \Rightarrow$$

$$\lambda x \operatorname{sen} \alpha - \mu \lambda x \cos \alpha - \lambda(L - x) = \frac{\lambda L}{g} v \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{g}{L} \int [x \operatorname{sen} \alpha - \mu x \cos \alpha - (L - x)] dx = \int v dv \Rightarrow$$

$$\frac{g}{L} \left( \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} \alpha - \mu \frac{x^2}{2} \cos \alpha - Lx + \frac{x^2}{2} \right) = \frac{v^2}{2} + \text{Cte} \Rightarrow \frac{g x^2}{L} (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha + 1) - 2gx = v^2 + \text{Cte}'$$

Para determinar el valor de la constante tenemos en cuenta que cuando  $x$  es igual a  $(2/3)L$  la velocidad es cero.

$$\frac{g}{L} \frac{4}{9} L^2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha + 1) - 2g \frac{2L}{3} = 0 + Cte' \Rightarrow Cte' = \frac{4gL}{9} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha + 1) - \frac{4gL}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{gx^2}{L} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha + 1) - 2gx = v^2 + \frac{4gL}{9} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha + 1) - \frac{4gL}{3} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha + 1) \left( \frac{x^2}{L} - \frac{4L}{9} \right) + \frac{4gL}{3} - 2gx}$$

b) En el instante en que toda la cadena esté sobre el plano se cumple que  $x=L$

$$v_L = \sqrt{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha + 1) \left( \frac{5}{9} \right) - \frac{2g}{3}}$$

c) Para que la cadena resbale por el plano inclinado debe cumplirse que  $v_L$  tenga un valor positivo.

$$\frac{5g}{9} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha + 1) > \frac{2}{3} g \Rightarrow (\sin \alpha - \mu \cos \alpha + 1) > \frac{18}{15} \Rightarrow \sin \alpha - \mu \cos \alpha > \frac{18}{15} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha > \mu \cos \alpha + \frac{3}{15} \Rightarrow \sin \alpha - \frac{1}{5} > \mu \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tag} \alpha - \frac{1}{5 \cos \alpha} > \mu$$

68.- Un cohete está provisto de dos motores que pueden comunicarle aceleraciones constantes  $a_1$  y  $a_2$  respecto de Tierra y en sentido vertical ascendente, siendo  $a_1 > a_2$ . El primer motor puede funcionar durante un tiempo  $t_1$  y el segundo motor durante  $t_2$ , con  $t_2 > t_1$ . Los motores pueden funcionar simultáneamente o uno a continuación del otro. Razonar de qué modo se han de encender los motores para que la altura alcanzada por el cohete sea la mayor posible.

Teniendo en cuenta que las aceleraciones son constantes las velocidades que puede adquirir el cohete son lineales. En la figura 1 se representan las siguientes velocidades

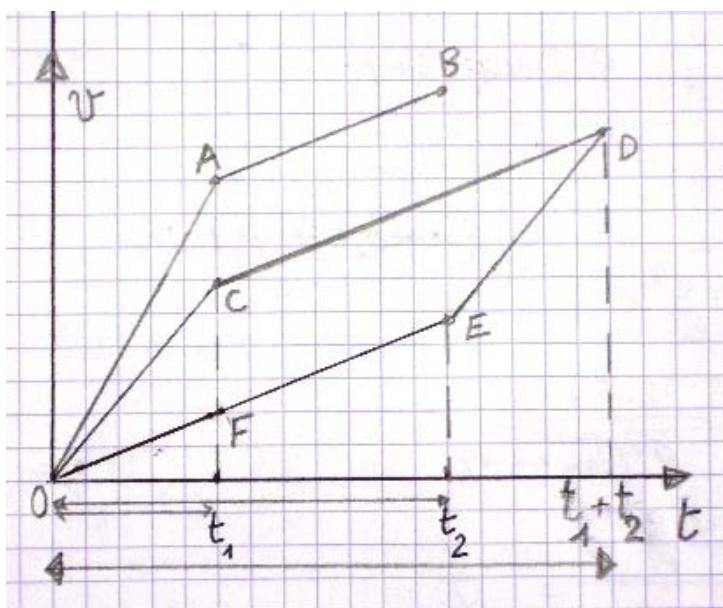


Fig.1

OC es la velocidad que proporciona el motor 1 y la pendiente de la recta es numéricamente igual a  $a_1$ .

OE es la velocidad que proporciona el motor 2 y la pendiente de la recta es numéricamente igual a  $a_2$ .

OC+CD es la velocidad proporcionada por los dos motores encendiendo en primer lugar el 1. La pendiente de la recta CD es  $a_1$ .

OE+ED es la velocidad proporcionada por los dos motores encendiendo en primer lugar el 2 y a continuación el 1. La pendiente de la recta ED es  $a_2$ .

OA es la velocidad proporcionada por los dos motores encendidos simultáneamente, la pendiente de la recta es numéricamente igual a  $a_1+a_2$ . Al tiempo  $t_1$  el motor 1 deja de funcionar y solamente lo hace el 2 hasta el tiempo  $t_2$ , por tanto, la pendiente de la recta AB es  $a_2$ .

El valor numérico del área comprendida entre las rectas y el eje de tiempos mide el desplazamiento del cohete.

De la simple observación de la figura 1 nos indica que el área  $OCD(t_1+t_2)$  es mayor que el área  $OED(t_1+t_2)$ . En consecuencia se descarta la opción de encender primero el motor 2 y luego el 1.

Para comprar las otras dos opciones debemos calcular las correspondientes áreas y la de mayor valor es la opción pedida en el problema.

Calculamos las distintas velocidades

$$v_A = (a_1 + a_2)t_1 \quad ; \quad v_B = v_A + a_1(t_2 - t_1) = (a_1 + a_2)t_1 + a_2(t_2 - t_1)$$

$$v_C = a_1 t_1 \quad ; \quad v_D = v_C + a_2 t_2 = a_1 t_1 + a_2 t_2$$

El área  $OABt_2$  es numéricamente igual a la altura  $h$  alcanzada por el cohete encendiendo los dos motores simultáneamente

$$\begin{aligned} h &= \frac{t_1 \cdot v_A}{2} + \frac{v_A + v_B}{2} \cdot (t_2 - t_1) = \frac{(a_1 + a_2) \cdot t_1^2}{2} + \frac{2(a_1 + a_2) \cdot t_1 + a_2(t_2 - t_1)}{2} \cdot (t_2 - t_1) = \\ &= \frac{a_1 t_1^2}{2} + \frac{a_2 t_1^2}{2} + a_1 t_1(t_2 - t_1) + a_2 t_1(t_2 - t_1) + \frac{a_2}{2}(t_2 - t_1)^2 = \\ &= -\frac{a_1 t_1^2}{2} + a_1 t_1 t_2 - \frac{a_2 t_1^2}{2} + a_2 t_1 t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2} + \frac{a_2 t_1^2}{2} - a_2 t_1 t_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2} + a_1 t_1 t_2 - \frac{a_1 t_1^2}{2} \end{aligned}$$

El área  $OCD t_1+t_2$  es numéricamente igual a la altura  $h'$  alcanzada por el cohete encendiendo primero el motor que produce la aceleración  $a_1$  y a continuación el 2.

$$h' = \frac{v_C t_1}{2} + \frac{v_C + v_D}{2} \cdot t_2 = \frac{a_1 t_1^2}{2} + \frac{2a_1 t_1 + a_2 t_2}{2} \cdot t_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2} + a_1 t_1 t_2 + \frac{a_1 t_1^2}{2}$$

La simple inspección de  $h$  y  $h'$  nos dice que  $h' > h$ , por consiguiente, se debe encender primero el motor 1 y a continuación el 2.

**69.-Un móvil 1 se desplaza en sentido negativo por el eje X con velocidad constante  $v_1$ , otro móvil lo hace en sentido negativo por el eje Y con velocidad constante  $v_2$ . En el tiempo  $t=0$  el primer móvil ocupa la posición  $+x_0$  y el segundo  $+y_0$ . Determinar el tiempo que transcurre hasta que ambos móviles se encuentren a la mínima distancia y calcular el valor de esa distancia mínima.**

Las ecuaciones de movimiento de los móviles son:

$$x = x_0 - v_1 t ; y = y_0 - v_2 t$$

La distancia entre ellos es:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_0 - v_1 t)^2 + (y_0 - v_2 t)^2} \quad (1)$$

Para hallar el tiempo mínimo derivamos D con respecto al tiempo e igualamos a cero

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \frac{2(x_0 - v_1 t)(-v_1) + 2(y_0 - v_2 t)(-v_2)}{2\sqrt{(x_0 - v_1 t)^2 + (y_0 - v_2 t)^2}} = 0 \Rightarrow -x_0 v_1 - y_0 v_2 + t_m (v_1^2 + v_2^2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_m = \frac{x_0 v_1 + y_0 v_2}{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned}$$

Para hallar la distancia mínima sustituimos el tiempo mínimo  $t_m$  en (1)

$$D_m = \sqrt{\left(x_0 - v_1 \frac{x_0 v_1 + y_0 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + \left(y_0 - v_2 \frac{x_0 v_1 + y_0 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$D_m = \sqrt{\left[\frac{x_0 v_1^2 + x_0 v_2^2 - x_0 v_1^2 - y_0 v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\right]^2 + \left[\frac{y_0 v_1^2 + y_0 v_2^2 - x_0 v_1 v_2 - y_0 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}\right]^2} \Rightarrow$$

$$D_m = \sqrt{\left[\frac{x_0 v_2^2 - y_0 v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\right]^2 + \left[\frac{y_0 v_1^2 - x_0 v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\right]^2} \Rightarrow$$

$$D_m = \sqrt{\left[\frac{v_2(x_0 v_2 - y_0 v_1)}{v_1^2 + v_2^2}\right]^2 + \left[\frac{-v_1(x_0 v_2 - y_0 v_1)}{v_1^2 + v_2^2}\right]^2} = \sqrt{\frac{(x_0 v_2 - y_0 v_1)^2 (v_1^2 + v_2^2)}{(v_1^2 + v_2^2)^2}} \Rightarrow$$

$$D_m = \frac{|x_0 v_2 - y_0 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Se utiliza el valor absoluto de  $x_0 v_2 - y_0 v_1$  ya que este término puede ser positivo o negativo.

En la figura 1 se representa D en función del tiempo, siendo

$$x_0 v_2 - y_0 v_1 = 30 \cdot 10 - 20 \cdot 8 > 0$$

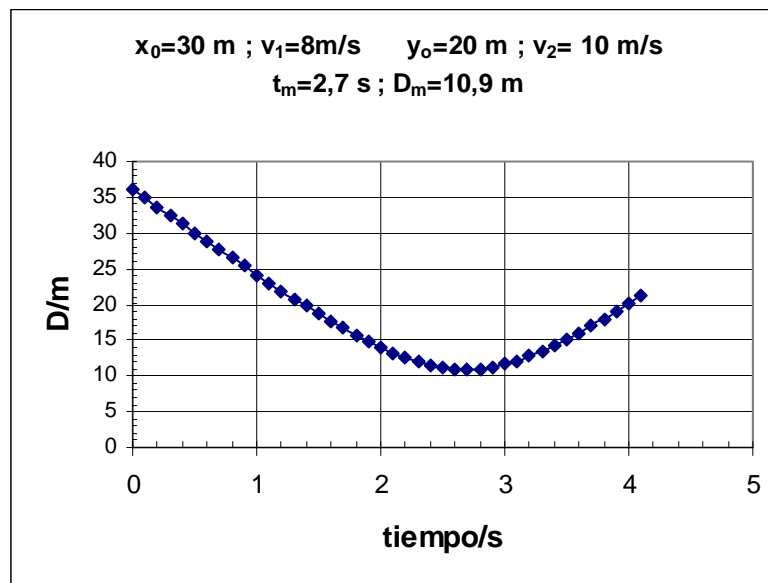
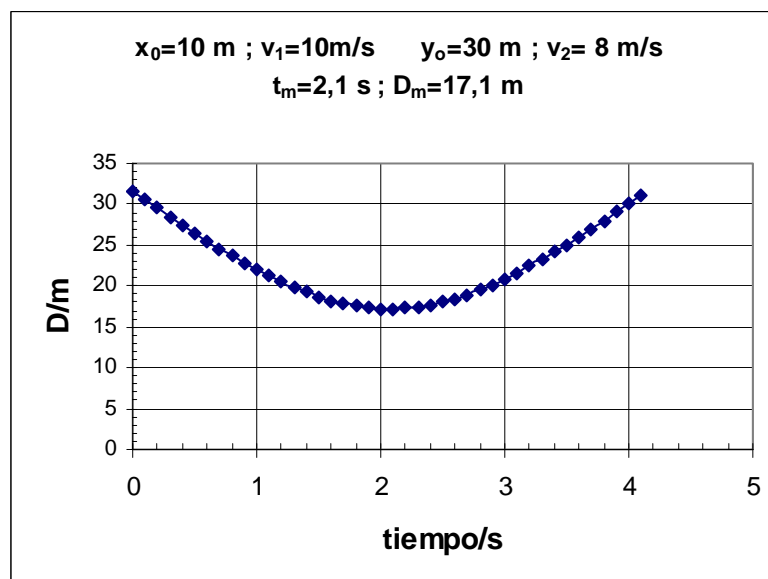


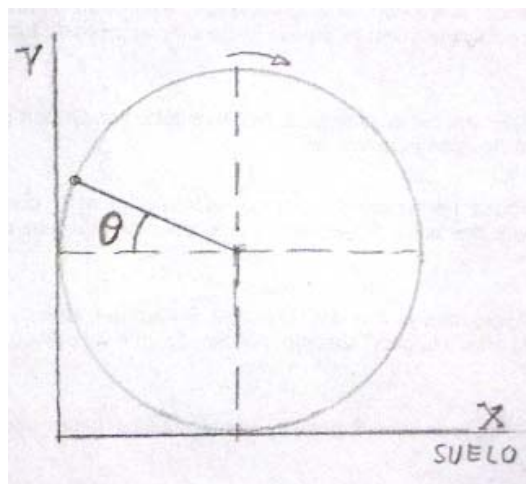
Fig.1

En la figura 2 se representa D en función del tiempo, siendo

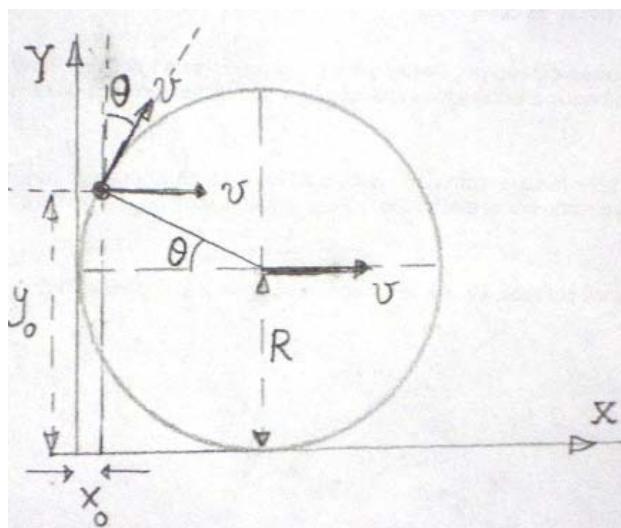
$$x_0 v_2 - y_0 v_1 = 10 \cdot 8 - 30 \cdot 10 < 0$$



70.-Una rueda de radio  $R=0,5$  m, rueda sin deslizar por una zona húmeda con velocidad constante  $v=20$  m/s. Como consecuencia de ello la periferia de la rueda suelta gotas de agua a) Determinar para qué ángulo,  $\theta$ , la altura alcanzada por la gota respecto del suelo es la máxima posible b) Dibujar la trayectoria de la gota respecto del suelo para el ángulo máximo y para  $30^\circ$  y  $45^\circ$ .



La gota que está en la periferia tiene la velocidad  $v$  del centro de masas de la rueda más la velocidad tangencial cuyo módulo es  $v$ . Una gota que abandona la periferia de la rueda tiene como coordenadas iniciales  $(x_0; y_0)$ .



La velocidad inicial sobre el eje X es:  $v + v \sin\theta$ .

La velocidad inicial sobre el eje Y es:  $v \cos\theta$ .

Las ecuaciones paramétricas respecto de los ejes coordenados son.

$$x = x_0 + v(1 + \operatorname{sen} \theta)t = R - R \cos \theta + v(1 + \operatorname{sen} \theta)t = R(1 - \cos \theta) + v(1 + \operatorname{sen} \theta)t \quad (1)$$

$$y = y_0 + v \cos \theta t - \frac{1}{2}gt^2 = R + R \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$$

$$y = R(1 + \operatorname{sen} \theta) + v \cos \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

La altura máxima que alcanza la gota ocurre cuando la velocidad  $v_y$  se anule

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v \cos \theta - gt \Rightarrow t = \frac{v \cos \theta}{g}$$

Sustituyendo en (2)

$$y_m = R(1 + \operatorname{sen} \theta) + v \cos \theta \cdot \frac{v \cos \theta}{g} - \frac{1}{2}g \left( \frac{v \cos \theta}{g} \right)^2 = R(1 + \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{2} \frac{v^2 \cos^2 \theta}{g} \quad (3)$$

En la ecuación (3) se observa que la  $y_{\text{máxima}}$  de cada gota es función del ángulo  $\theta$ , por tanto, como se pide la mayor de esas alturas, procedemos a derivar la ecuación (3) con respecto a  $\theta$  e igualar a cero.

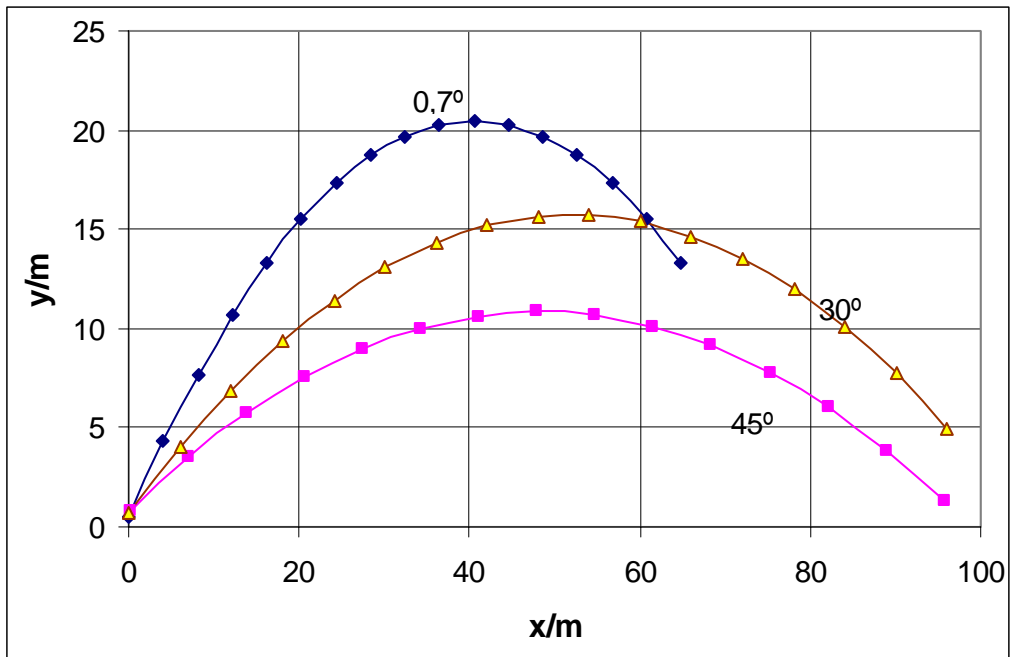
$$\frac{dy_m}{d\theta} = R \cos \theta + \frac{v^2}{2g} \cdot 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta = 0 \Rightarrow R = \frac{v^2}{g} \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{Rg}{v^2}$$

Se debe cumplir que  $v^2 > Rg$ .

Con los datos del problema resulta:  $\operatorname{sen} \theta = \frac{0,5 \cdot 10}{400} \Rightarrow \theta = 0,72^\circ$  y la altura máxima de todas

$$Y_{\max} = 0,5(1 + \operatorname{sen} 0,7) + \frac{1}{2} \frac{20^2 \cdot \cos^2 0,7}{10} = 40,5 \text{ m}$$

En la figura 2 se han dibujado las trayectorias de las gotas para tres ángulos diferentes.



71.-Un cuerpo de masa  $m$  se encuentra en reposo en la posición  $s_0=0$ . Sobre él comienza a actuar una fuerza definida por la ecuación

$$F = F_0 \left[ 1 - \frac{(t-T)^2}{T^2} \right]$$

a) Calcular las ecuaciones de la posición y velocidad del móvil en función del tiempo

b) Calcular los tiempos para los cuales la fuerza, la velocidad y la posición tienen los valores máximos.

c) Si  $F_0=1 \text{ N}$ ,  $m=1 \text{ kg}$  y  $T=5 \text{ s}$ , dibujar las gráficas frente al tiempo de  $F$ ,  $s$  y  $v$  en el intervalo entre  $t=0 \text{ s}$  y  $t=20 \text{ s}$ .

d) Determinar la distancia recorrida por el cuerpo en el intervalo de  $t=0 \text{ s}$  a  $t=20 \text{ s}$

a) De la segunda ley de Newton se deduce

$$F = F_0 \left[ 1 - \frac{t^2 + T^2 - 2tT}{T^2} \right] = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \frac{F_0}{m} \int \left( \frac{2t}{T} - \frac{t^2}{T^2} \right) dt \Rightarrow$$

$$v = \frac{F_0}{mT} \left( t^2 - \frac{t^3}{3T} \right) + \text{Cte} \Rightarrow v = \frac{F_0}{mT} \left( t^2 - \frac{t^3}{3T} \right)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \int \frac{F_0}{mT} \left( t^2 - \frac{t^3}{3T} \right) dt \Rightarrow s = \frac{F_0}{mT} \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{12T} \right)$$

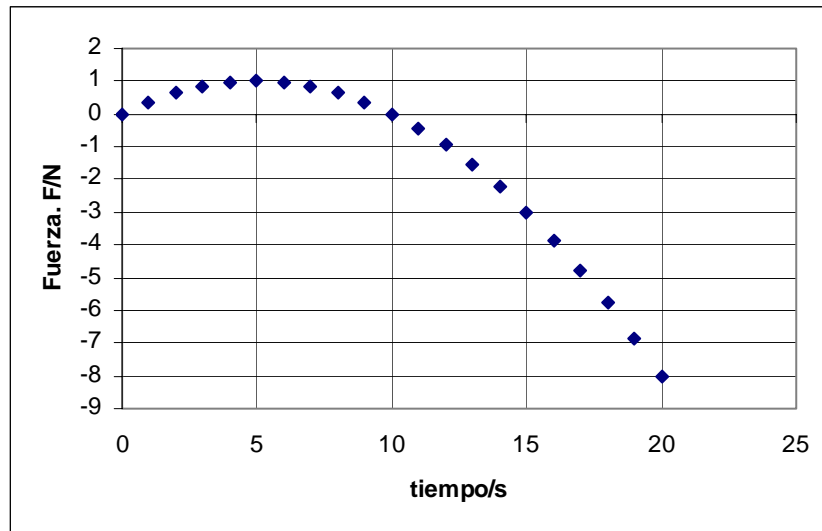
b) Para calcular los valores máximos derivamos las correspondientes ecuaciones respecto del tiempo e igualamos a cero.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{F_0}{T^2} (-2t + 2T) = 0 \Rightarrow t = T$$

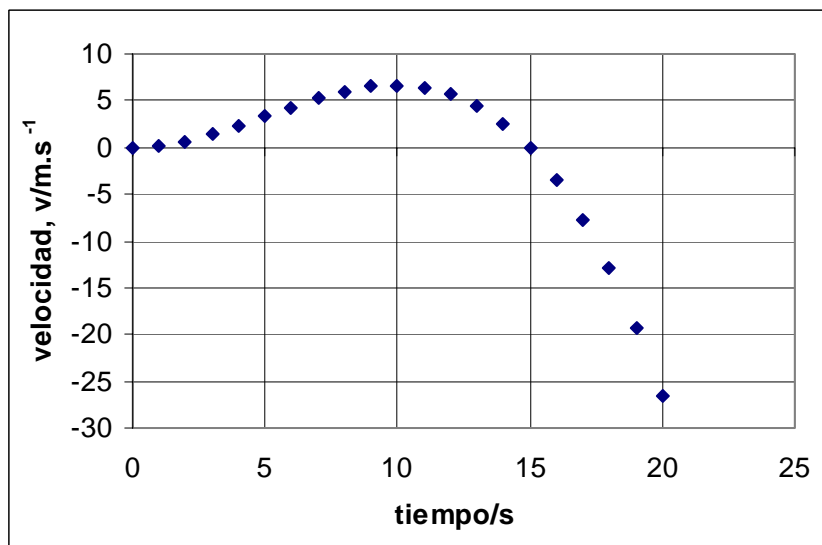
$$\frac{ds}{dt} = \frac{F_0}{mT} \left( t^2 - \frac{t^3}{3T} \right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{t}{3T} = 0 \Rightarrow t = 3T$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{mT} \left( 2t - \frac{t^2}{T} \right) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{t}{T} = 0 \Rightarrow t = 2T$$

c)



c)



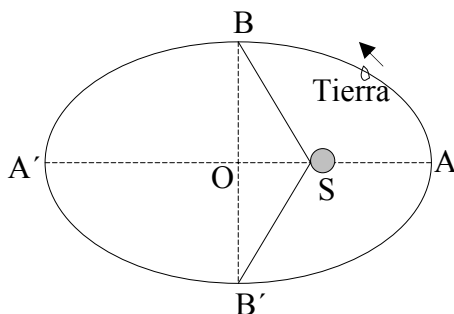
d) Según el apartado anterior el máximo en la posición del cuerpo ocurre cuando  $t=3T=3\cdot 5=15$  s. Para calcular el valor de esa posición sustituimos el valor 15 en la ecuación de s:

$$s = \frac{F_0}{mT} \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{12T} \right) = \frac{1}{1 \cdot 5} \left( \frac{15^3}{3} - \frac{15^4}{12 \cdot 5} \right) = 56,25 \text{ m}$$

El cuerpo recorre 56,25 m hacia la derecha, luego retrocede hasta el punto de partida recorriendo los mismos metros, por tanto, en total ha recorrido

$$56,25 + 56,25 = 112,5 \text{ m}$$

72.- La Tierra describe una órbita elíptica, de excentricidad  $\varepsilon=0,0167$ , ocupando el Sol uno de los focos. Dividimos la órbita de la Tierra en dos mitades iguales en longitud, una  $BA'B'$  y otra  $B'AB$ , esto es, media órbita más lejos del Sol que la otra. Se pide la diferencia de tiempos, expresada en días, que tarda la Tierra en recorrer ambas semiórbitas.



$$\begin{aligned} OS &= c \\ OA &= a \\ OB &= b \\ \varepsilon &= c/a = 0,0167 \\ \text{Área de la elipse} &= \pi a b \end{aligned}$$

La Tierra está sometida a una fuerza central; es la fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y la Tierra. Por el hecho de ser una fuerza central el momento angular de la Tierra respecto del Sol es constante. La velocidad lineal de la Tierra no es constante en su órbita, en cambio si es constante la velocidad areolar, esto es, el área barrida por el radio vector que une el Sol con la Tierra.

Esto último es en definitiva la expresión de la segunda ley de Kepler.

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \text{Cte} \Rightarrow A = \text{Cte} \int dt = \text{Cte} \cdot t$$

Aplicamos la ecuación anterior para ambos recorridos

$$\text{Área}(BA'B'S) = A_G = \text{Cte} \cdot t_1 \quad ; \quad \text{Área}(B'ABS) = A_P = \text{Cte} \cdot t_2$$

$A_G$  es el área de media elipse más el área del triángulo  $BB'S$

$$A_G = \frac{\pi ab}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot c = \frac{\pi ab}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot \varepsilon a = \frac{\pi ab}{2} + \varepsilon ba = \text{Cte} t_1 \quad (1)$$

$A_P$  es el área de media elipse menos el área del triángulo  $BB'S$

$$A_P = \frac{\pi ab}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot c = \frac{\pi ab}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot \varepsilon a = \frac{\pi ab}{2} - \varepsilon ba = \text{Cte} t_2 \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2)

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{\pi ab}{2} + \varepsilon ab}{\frac{\pi ab}{2} - \varepsilon ab} = \frac{\frac{\pi}{2} + \varepsilon}{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \Rightarrow t_1 = t_2 \cdot 1,021 \quad (3)$$

Como  $t_1 + t_2 = 365$  días

$$1,021t_2 + t_2 = 365 \Rightarrow t_2 = 180,6 \Rightarrow t_1 = 184,4 \Rightarrow t_1 - t_2 = 3,8 \text{ días}$$

73.-Un satélite de masa  $m$  describe una órbita circular de radio  $r_0$  alrededor de la Tierra de masa  $M$ . a) Determinar la energía total del satélite. b) Suponer que el satélite al moverse dentro en la atmosfera de la Tierra está sometido a una fuerza de fricción  $f$ , por lo que el satélite describirá una espiral hacia la Tierra;  $f$  se considera una fuerza pequeña por lo que la disminución del radio es tal que puede suponerse que en cada instante la órbita es circular con un radio promedio  $r$ . Encontrar aproximadamente la variación del radio  $\Delta r$ , en cada revolución. c) Calcular aproximadamente la variación de la energía cinética del satélite en cada revolución.

a) La energía del satélite es la suma de su energía cinética y potencial gravitatoria.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r_0}\right)$$

Dado que el satélite describe una órbita circular, la fuerza centrípeta necesaria es la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y el satélite

$$\frac{mv^2}{r_0} = G \frac{Mm}{r_0^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2}m \frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0}$$

b) Supongamos que el satélite esta describiendo una órbita de radio  $r$ , su energía es:  $E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$  y la variación con relación al tiempo de su energía debido a la fricción es  $-\frac{dE}{dt}$ , que es la potencia pérdida y como  $f$  es constante vale  $fv$ , siendo  $v$  la velocidad del satélite en esa órbita.

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{d\left(-\frac{1}{2} \frac{GMm}{r}\right)}{dt} = \frac{1}{2}GMm \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} = \frac{1}{2}GMm \left(\frac{-\frac{dr}{dt}}{r^2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r^2} \frac{dr}{dt} = fv$$

$$-\frac{1}{2} \frac{GMm}{r^2} \frac{dr}{dt} = f \frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{r}} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{2f}{m\sqrt{GM}} r^{\frac{3}{2}}$$

$\frac{dr}{dt}$ , representa la variación del radio de la órbita respecto del tiempo. Designamos con  $T$  al periodo de revolución

$$\frac{\Delta r}{T} = -\frac{2f r^{\frac{3}{2}}}{m\sqrt{GM}} \Rightarrow \Delta r = -\frac{2f r^{\frac{3}{2}}}{m\sqrt{GM}} T$$

c)

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\frac{GM}{r}\right)}{dt} = \frac{1}{2}GMm \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} = -\frac{1}{2}GMm \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}GMm \frac{2fr^{\frac{3}{2}}}{r^2} = \frac{\sqrt{GMf}}{r^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_c = \frac{\sqrt{GMf}}{r^{\frac{1}{2}}} T$$

Observe que los cálculos son aproximados ya que T no es constante sino que disminuye a medida que disminuye el radio de la órbita

**74.-Se construye un modelo del sistema Sol –Tierra reduciendo todas las distancias lineales en un factor  $k$ . En dicho modelo las densidades, tanto del Sol como la de la Tierra, son las mismas que las reales. En el modelo la Tierra gira alrededor del Sol y se admite que está colocado en un lugar ausente de aire y gravedad terrestre. Se pide determinar cuánto dura un año en el modelo respecto a la duración real.**

Designamos con  $R$  al radio real del Sol,  $M$  su masa,  $D$  la distancia Sol-Tierra,  $M_T$  a la masa real de la Tierra.,  $\rho$  la densidad del Sol.

En el modelo  $r$  es el radio del "Sol",  $m$  su masa,  $d$  la distancia entre el "Sol y la Tierra",  $m_T$  a la masa de la "Tierra".

De acuerdo con el enunciado se cumple que

$$d = kD \quad ; \quad r = kR$$

La fuerza centrípeta es proporcionada por la atracción gravitatoria, tanto en la realidad como en el modelo.

$$M_T \Omega^2 D = G \frac{M M_T}{D^2} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{G M}{D^3}} \quad ; \quad m_T \omega^2 d = G \frac{m m_T}{d^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{G m}{d^3}} \Rightarrow$$

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{\frac{G M d^3}{G m D^3}} = \sqrt{\frac{M k^3 D^3}{m D^3}} = \sqrt{\frac{M k^3}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho k^3}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho}} = \sqrt{\frac{R^3 k^3}{k^3 R^3}} = 1$$

Como la velocidades angulares son iguales la duración del año real y del modelo son iguales.

75.- La densidad de una esfera de radio  $R$  sigue una ley lineal

$$\rho = \rho_0 - kr$$

Siendo  $k$  una constante positiva y  $r$  la distancia medida a partir del centro de la esfera. Cuando  $r = R$  la densidad es  $\frac{1}{4}$  de la máxima densidad. Calcular para qué valor de  $r$  la intensidad del campo gravitatorio es el máximo.

De la fórmula de la densidad se deduce que el valor máximo de la densidad se produce cuando  $x=0$ , entonces la densidad máxima es  $\rho_0$ .

Cuando  $x = R$

$$\frac{1}{4}\rho_{\max} = \rho_{\max} - kR \quad \Rightarrow \quad kR = \frac{3}{4}\rho_{\max}$$

En la esfera tomamos una corona de radio  $r < R$  y espesor  $dr$ . La masa de dicha corona es:

$$dM = 4\pi r^2 dr \cdot (\rho_0 - kr)$$

Si integramos entre cero y  $r$  calculamos la masa de esfera que está comprendida entre  $r = 0$  y  $r = r$ .

$$M = \int_0^r 4\pi r^2 \rho_0 dr - \int_0^r 4\pi r^3 k dr = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3} - \frac{4\pi r^4 k}{4} = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3} - \pi r^4 k$$

El módulo de la intensidad del campo gravitatorio a una distancia  $r < R$  del centro de la esfera es:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} = \frac{G \left( \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3} - \pi r^4 k \right)}{r^2} = \pi G \rho_0 \left( \frac{4r}{3} - kr^2 \right)$$

Como se pide el valor máximo de  $g$ , derivamos la ecuación anterior e igualamos a cero

$$\frac{dg(r)}{dr} = \pi G \left( \frac{4}{3}\rho_0 - 2kr \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2\rho_0}{3k} = \frac{2\rho_{\max}}{3k} = \frac{2 \cdot \frac{4kR}{3}}{3k} = \frac{8R}{9}$$

**76.-Un plano inclinado forma con la horizontal un ángulo  $\alpha$ . Desde el punto más bajo de dicho plano se lanza un proyectil con un ángulo  $\theta > \alpha$  el cual impacta con dicho plano. Determinar el valor del ángulo  $\theta$  para el que la distancia entre el punto más bajo del plano y el lugar del impacto sea el máximo y la distancia entre esos puntos.**

Las ecuaciones paramétricas del proyectil son:

$$x = v_0 t \cos \theta ; y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x \operatorname{tag} \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos \theta)^2} \quad (1)$$

La ecuación del plano inclinado  $y = x \operatorname{tag} \alpha$  (2)

En el punto de impacto del proyectil sobre el plano se cumple que:

$$x_i \operatorname{tag} \alpha = x_i \operatorname{tag} \theta - \frac{1}{2} g \frac{x_i^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (3)$$

Las soluciones de la ecuación (3) son  $x_i=0$ , que corresponde al punto de salida del proyectil y

$$\operatorname{tag} \theta - \operatorname{tag} \alpha = \frac{g x_i}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow x_i = \frac{2 v_0^2}{g} \cos^2 \theta (\operatorname{tag} \theta - \operatorname{tag} \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{2 v_0^2}{g} \cos \theta (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta \operatorname{tag} \alpha)$$

La distancia  $s$  entre el punto de salida del proyectil y el punto de impacto medido sobre el plano inclinado es:

$$s = \frac{x_i}{\cos \alpha} = \frac{2 v_0^2 \cos \theta (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta \operatorname{tag} \alpha)}{g \cos \alpha} \quad (4)$$

Como piden el valor máximo de  $s$ , derivamos  $s$  respecto de  $\theta$  e igualamos a cero:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} [\cos \theta \cdot (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{tag} \alpha) + (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta \operatorname{tag} \alpha) \cdot (-\operatorname{sen} \theta)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{tag} \alpha = (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta \operatorname{tag} \alpha) \operatorname{tag} \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{tag} \alpha = \operatorname{sen} \theta \operatorname{tag} \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{tag} \alpha \Rightarrow \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{tag} \alpha = \operatorname{sen} \theta \operatorname{tag} \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tag}^2 \theta - 2 \operatorname{tag} \theta \operatorname{tag} \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tag} \theta = \frac{2 \operatorname{tag} \alpha \pm \sqrt{4 \operatorname{tag}^2 \alpha + 4}}{2} = \operatorname{tag} \alpha \pm \sqrt{1 + \operatorname{tag}^2 \alpha}$$

La solución válida que da resultado positivo es.

$$\operatorname{tag} \theta = \operatorname{tag} \alpha + \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \operatorname{tag} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{2 + 2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{\cos^2 \alpha}{2(1 + \operatorname{sen} \alpha)}$$

Sustituyendo en s

$$s = \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} \cos \theta (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta \operatorname{tag} \alpha) = \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} \cos^2 \theta (\operatorname{tag} \theta - \operatorname{tag} \alpha) \Rightarrow$$

$$s = \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} \cos^2 \theta \left( \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \operatorname{tag} \alpha \right) = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g \cos \alpha} \left( \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g \cos \alpha} \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$s = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g \cos^2 \alpha} = \frac{2v_0^2 \frac{\cos^2 \alpha}{2(1 + \operatorname{sen} \alpha)}}{g \cos^2 \alpha} = \frac{v_0^2}{g(1 + \operatorname{sen} \alpha)}$$

**77.- El péndulo de un reloj patrón ejecuta una oscilación completa en un segundo, esto es, su periodo es  $T = 1s$ . Otro reloj de péndulo tiene una longitud algo mayor que el patrón. Ambos péndulos se encuentran en un instante determinado en fase y vuelven a estarlo cuando han transcurrido 150 s según el reloj patrón. a) Calcular: a) el retraso que sufre el segundo reloj respecto del patrón cuando han transcurrido 20 horas. b) ¿Cuánto debe acortarse el péndulo del segundo reloj para que ambos indiquen la misma hora?**

El periodo de un péndulo simple tiene de ecuación  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ . Cuando el péndulo del reloj patrón efectúa una oscilación, el segundo péndulo no llega a efectuar una oscilación ya que al tener mayor longitud su periodo es mayor. Por tanto en cada oscilación del patrón, el segundo péndulo se retrasa algo, este retraso se va acumulando al transcurrir el tiempo y llegará un momento en el que el retraso sea de una oscilación completa y entonces si el péndulo patrón ha efectuado  $n$  oscilaciones y el otro péndulo habrá efectuado  $n-1$  oscilaciones. Esta situación ocurre cuando transcurren 150 segundos.

Para el péndulo patrón  $n \cdot T = 150$  y para el otro péndulo  $(n-1) T' = 150$ , siendo  $T$  el periodo del péndulo patrón y  $T'$  el periodo del otro péndulo.

$$nT = (n-1)T' \Rightarrow T' = \frac{n}{n-1} T = \frac{150}{149} \cdot 1 = \frac{150}{149} s$$

Si designamos con  $L$  a la longitud del péndulo patrón y  $L'$  a la del segundo péndulo resulta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}; T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} \Rightarrow \frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{L}{L'}} \Rightarrow L' = L \frac{T'^2}{T^2}$$

Cuando el péndulo patrón efectúa una oscilación completa transcurre 1 segundo de tiempo; el otro péndulo indica un tiempo de  $\left(1 - \frac{149}{150}\right)s$ .

a)

$$\frac{1s}{\left(1 - \frac{149}{150}\right)s} = \frac{20 \text{ hora} \cdot 3600 \frac{s}{\text{hora}}}{x} \Rightarrow x = 72000 \cdot \left(1 - \frac{149}{150}\right) = 480s$$

b) Designamos con  $\Delta L$  lo que hay que acortar al segundo péndulo para que indique lo mismo que el patrón

$$\Delta L = L' - L = L \frac{T'^2}{T^2} - L = L \left( \frac{T'^2}{T^2} - 1 \right) = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \left( \frac{T'^2}{T^2} - 1 \right) = \frac{9,8}{4\pi^2} \left( \frac{150^2}{149^2} - 1 \right) = 0,00334 \text{ m}$$

78.-Un péndulo simple de longitud  $L$ , se separa un ángulo  $\theta_0$  de su posición de equilibrio y se deja oscilar libremente.

a) Determinar la tensión de la cuerda en función del ángulo  $\theta$  que la cuerda del péndulo forma con la dirección vertical.

b) Representar en una gráfica la tensión frente a  $\theta$  para  $\theta_0 = 45^\circ$  y  $\theta_0 = 60^\circ$ .

c) Calcular la aceleración total de la masa puntual del péndulo en función de  $\theta$ .

d) construir la gráfica de la aceleración total en función de  $\theta$ , para  $\theta_0 = 20, 40, 60$ , y  $70$  grados.

a) Para cualquier ángulo  $\theta$  las fuerzas que actúan sobre la masa puntual del péndulo son su peso y la tensión de la cuerda (ver figura 1). Como la masa está girando la tensión de la cuerda ha de proporcionar la fuerza centrípeta  $mv^2/L$ .

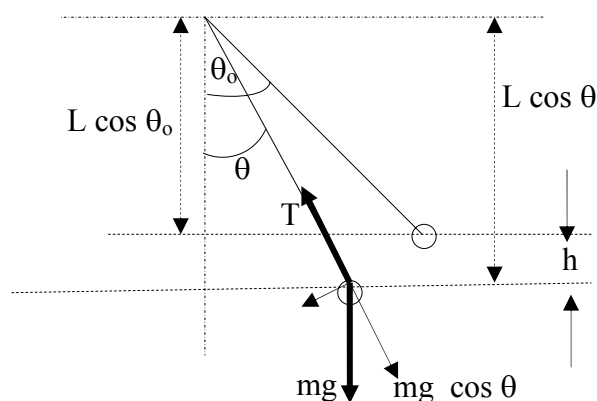


Fig.1

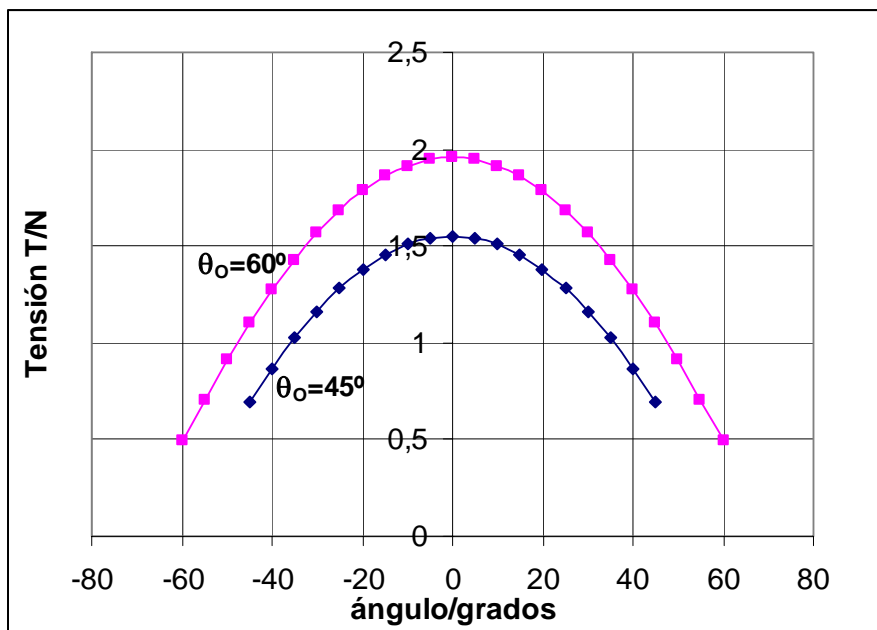
En la figura 1,  $L$  es la longitud del péndulo, y designamos con  $v$  a la velocidad del péndulo cuando el ángulo es  $\theta$ . La longitud  $h$  es lo que ha descendido el péndulo desde su posición inicial ( $\theta_0$ ) hasta la posición  $\theta$ .

Podemos escribir  $T = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{L}$  y  $mgh = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} mv^2$

Combinando ambas ecuaciones resulta:

$$T = mg \cos \theta + 2mg(\cos \theta - \cos \theta_0) = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \quad (1)$$

b) La representación gráfica de  $T$  frente a  $\theta$ , es la siguiente:



La tensión es máxima cuando el péndulo pasa por la posición vertical ( $\theta = 0$ )

c) Para una posición cualquiera  $\theta$  del péndulo en la figura 1, la aceleración total  $a_T$  se compone de la aceleración tangencial y de la centrípeta. Ambas aceleraciones, tangencial y centrípeta, son vectores perpendiculares entre sí, por tanto:

$$a_T^2 = a^2 + a_c^2 = (g \sin \theta)^2 + \left( \frac{v^2}{L} \right)^2 = g^2 \sin^2 \theta + \left( \frac{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}{L} \right)^2 \Rightarrow$$

$$a_T^2 = g^2 \sin^2 \theta + 4g^2 (\cos^2 \theta + \cos^2 \theta_0 - 2 \cos \theta \cos \theta_0) \Rightarrow$$

$$a_T^2 = g^2 (\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta_0 - 8 \cos \theta \cos \theta_0) \Rightarrow$$

$$a_T = g \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta_0 - 8 \cos \theta \cos \theta_0} \Rightarrow$$

$$a_T = g \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta_0 - 8 \cos \theta \cos \theta_0} \quad (2)$$

b) La ecuación (2) nos dice que si fijamos ( $\theta_0$ ), la aceleración total dependerá del ángulo  $\theta$ , esto quiere decir que  $a_T$  será diferente en los distintos lugares de oscilación del péndulo, por ello vamos a estudiar cómo varía  $a_T$  respecto de  $\theta$ .

c)

$$\frac{da_T}{d\theta} = g \frac{-6 \cos \theta \sin \theta + 8 \sin \theta \cos \theta_0}{2 \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta_0 - 8 \cos \theta \cos \theta_0}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 \cos \theta \sin \theta + 8 \sin \theta \cos \theta_0 = 0; \quad \sin \theta (-6 \cos \theta + 8 \cos \theta_0) = 0 \quad (3)$$

La ecuación (3) tiene dos soluciones  $\sin \theta = 0$  y  $3 \cos \theta = 4 \cos \theta_0 \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{3}{4} \cos \theta$

El máximo valor de  $\cos \theta = 1$ , por tanto,  $\cos \theta_0 = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta_0 = 41,4^\circ$

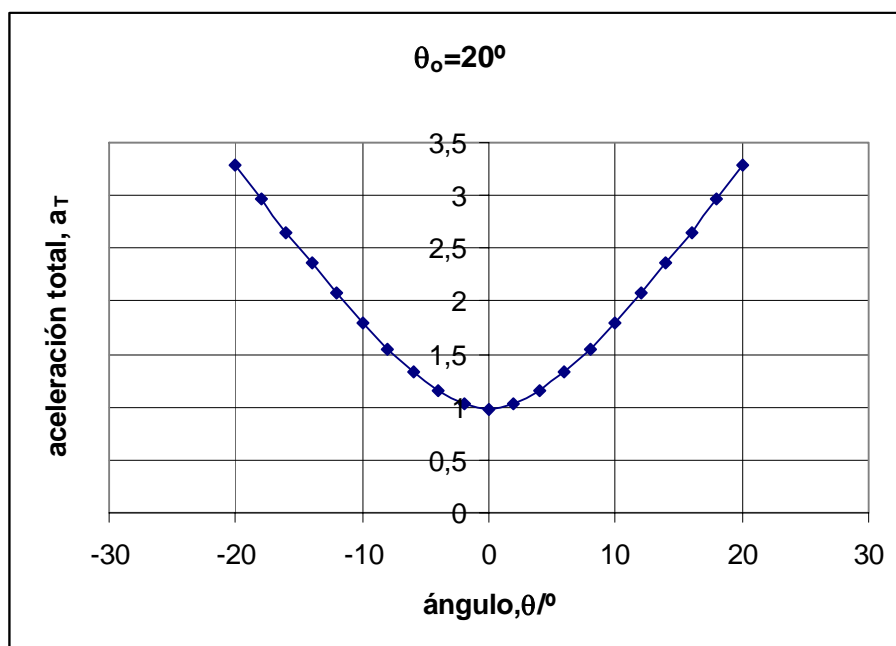
Si en la ecuación (3), damos a  $\theta_0$  un valor inferior a  $41,4$  grados la ecuación tiene una solución y es  $\sin \theta = 0$ .

Si en la ecuación (3), damos a  $\theta_0$  un valor superior a  $41,4$  grados la ecuación tiene más de una solución.

Cuando  $\theta_0 = 20^\circ$

$$a_T = 9,8 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta + 4 \cdot \cos^2 20^\circ - 8 \cdot \cos 20^\circ \cos \theta} = 9,8 \sqrt{4,53 + 3 \cos^2 \theta - 7,52 \cos \theta}$$

la gráfica  $a_T$  frente a  $\theta$  es:

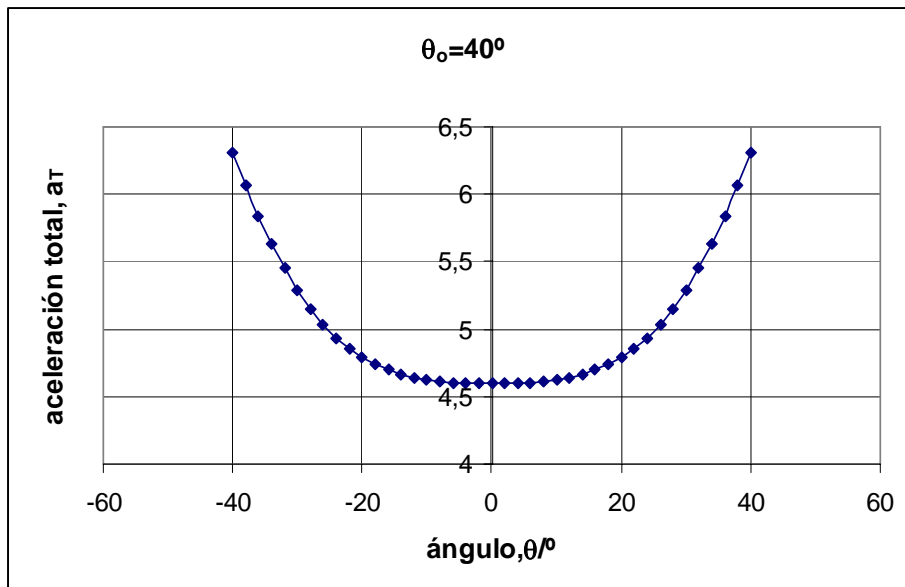


En este caso se presenta un mínimo en el punto más bajo del péndulo

Cuando  $\theta_0 = 40^\circ$

$$a_T = 9,8 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta + 4 \cdot \cos^2 40^\circ - 8 \cdot \cos 40^\circ \cos \theta} = 9,8 \sqrt{3,35 + 3 \cos^2 \theta - 6,13 \cos \theta}$$

la gráfica  $a_T$  frente a  $\theta$  es:

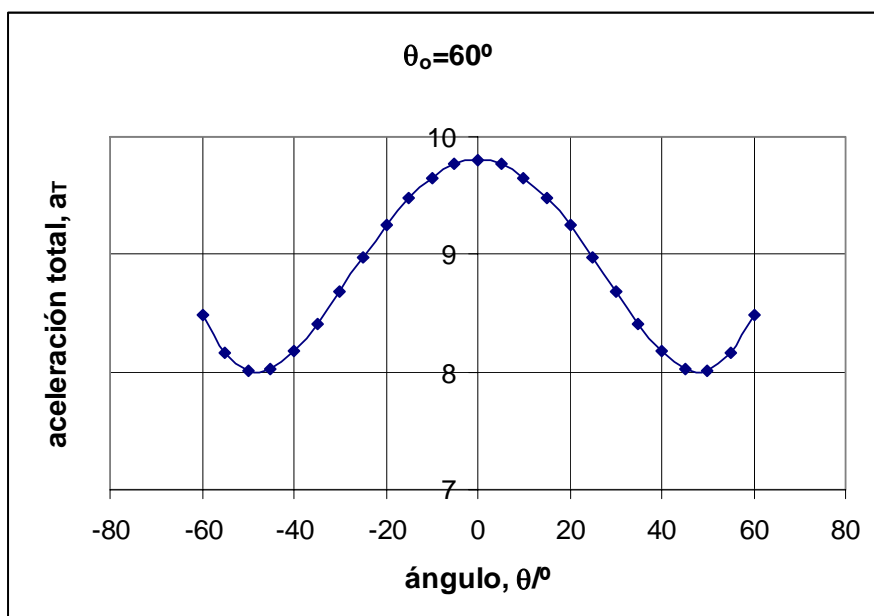


El mínimo se encuentra en el punto más bajo de la posición del péndulo

Cuando  $\theta_0 = 60^\circ$

$$a_T = 9,8\sqrt{1 + 3\cos^2\theta + 4 \cdot \cos^2 60^\circ - 8 \cdot \cos 60^\circ \cos\theta} = 9,8\sqrt{3,00 + 3\cos^2\theta - 4,00\cos\theta}$$

la gráfica  $a_T$  frente a  $\theta$  es:



Como ahora el ángulo es mayor de  $41,4$  aparecen las soluciones  $\sin\theta = 0$  que ahora es un máximo y

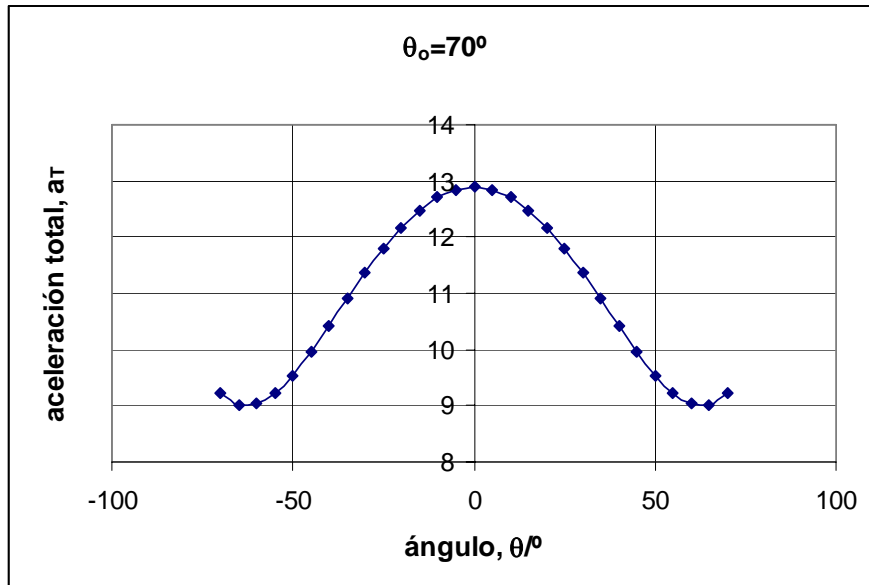
$$\cos\theta_0 = \frac{3}{4}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{4 \cdot \cos 60^\circ}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \pm 48,2^\circ$$

Que presenta dos mínimos

Cuando  $\theta_0 = 70^\circ$

$$a_T = 9,8\sqrt{1 + 3\cos^2\theta + 4 \cdot \cos^2 70^\circ - 8 \cdot \cos 70^\circ \cos\theta} = 9,8\sqrt{1,47 + 3\cos^2\theta - 2,74\cos\theta}$$

la gráfica  $a_T$  frente a  $\theta$  es:



Como ahora el ángulo es mayor de  $41,4$  aparecen las soluciones  $\cos\theta=0$  que es un máximo y

$$\cos\theta_0 = \frac{3}{4}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{4 \cdot \cos 70^\circ}{3} = \frac{1,368}{3} \Rightarrow \theta = \pm 62,8^\circ$$

79.- *Un carrito se desplaza por un suelo horizontal con una velocidad  $v_C$  constante. El carrito dispone de un dispositivo que puede lanzar una bola con una velocidad  $v_B$  en dirección vertical hacia arriba. a) Describir el movimiento de la bola y su posición a medida que transcurre el tiempo, así como la del carrito. Representar gráficamente ambos movimientos si  $v_C=1$  m/s y  $v_B = 3$  m/s*

*b) Ahora el carrito se encuentra en lo alto de un plano inclinado que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Estando el carrito en reposo se lanza la bola con velocidad  $v_B$  perpendicular al plano. Describir el movimiento de la bola y su posición a medida que transcurre el tiempo, así como la del carrito. Obtener las graficas de posiciones del carrito y de la bola cuando  $\alpha=45^\circ$ .*

*c) El carrito se encuentra en el plano inclinado del apartado anterior y lanza la bola con velocidad vertical  $v_B$  perpendicular al plano, siendo la velocidad del carrito  $v_C$  paralela al plano y en sentido ascendente. a) Describir el movimiento de la bola y su posición a medida que transcurre el tiempo, así como la del carrito. Obtener las graficas de posiciones del carrito y de la bola cuando  $\alpha=45^\circ$ . Despreciar todos los rozamientos.*

a) Tomamos unos ejes cartesianos fijos de referencia, con origen en el lugar que ocupa e el carrito en el tiempo  $t=0$ . La bola al salir del carrito está dotada de dos velocidades una horizontal  $v_C$  y otra vertical  $v_B$ , por lo que respecto del sistema elegido describirá una trayectoria parabólica. El carrito se desplaza por el eje X con velocidad uniforme  $v_C$ .

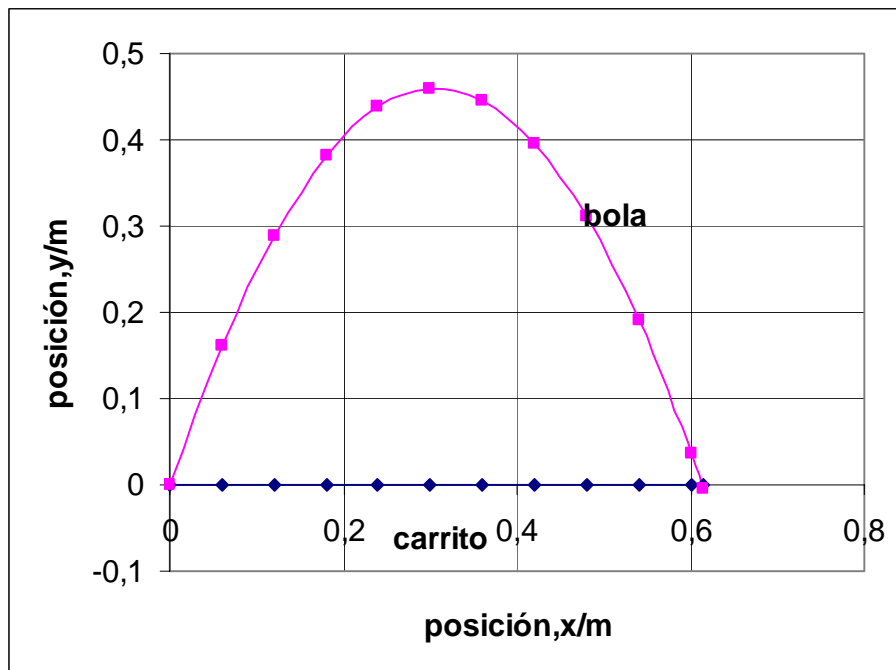
Ecuaciones de la bola:

$$x_B = v_C t \quad ; \quad y_B = v_B t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad y_B = v_B \frac{x_B}{v_C} - \frac{1}{2} g \frac{x_B^2}{v_C^2} = 3 x_B - \frac{9,8}{2 \cdot 1} x_B^2 = 3 x_B - 4,9 x_B^2$$

Ecuación del carrito:

$$x_C = v_C t; \quad \text{como } v_C = 1 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad v_C = t$$

Las abscisas del carrito y la de la bola son las mismas, por tanto, en todo momento, el carrito está justamente debajo de la bola y cuando  $y_B=0$ , la bola caerá sobre el carrito.



b) En la figura 1 se indican los ejes  $X_P$  e  $Y_P$  de referencia, fijos en el plano inclinado.

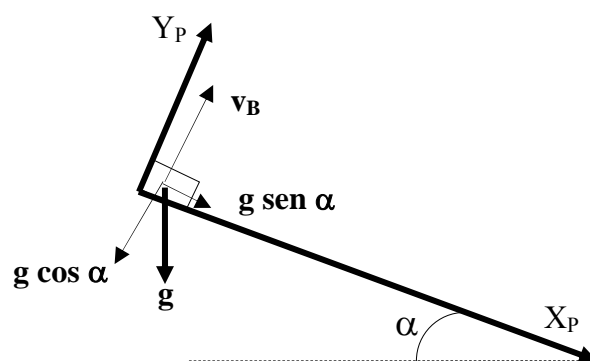


Fig.1

La bola en la dirección del eje  $Y_P$  lleva una velocidad inicial  $v_B$  y está sometida a una aceleración  $-g \cos \alpha$ ; en la dirección del eje  $X_P$  su velocidad inicial es cero y está sometida a una aceleración  $g \sin \alpha$ .

Las ecuaciones de movimiento de la bola son:

$$x_B = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 ; \quad y_B = v_B t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B = v_B \sqrt{\frac{2x_B}{g \sin \alpha}} - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot \frac{2x_B}{g \sin \alpha} = v_B \sqrt{\frac{2x_B}{g \sin \alpha}} - \frac{x_B}{\tan \alpha} \quad (1)$$

Las ecuaciones de movimiento del carrito son:

$$x_C = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_C = 0 \quad (2)$$

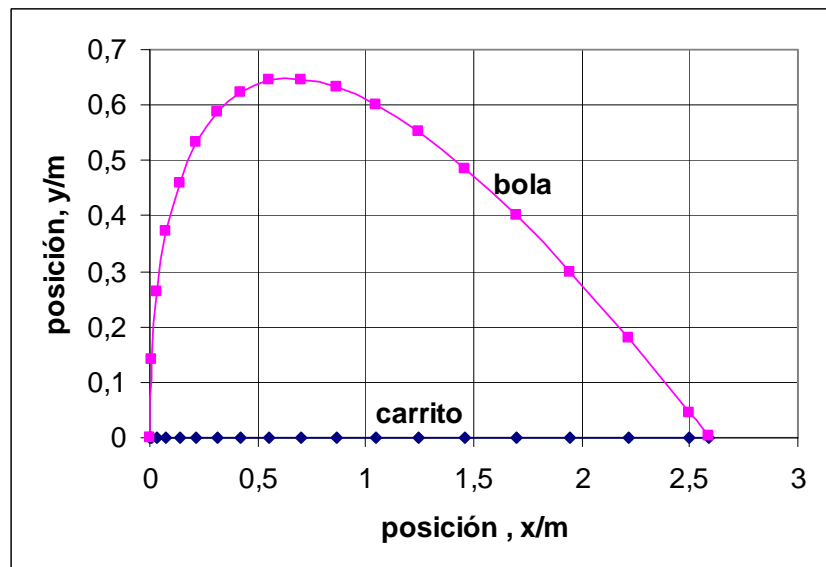
Dado que  $x_C = x_B$  se deduce que para los ejes de referencia  $X_P$  e  $Y_P$ ; el carrito está debajo de la bola en todo momento.

Para los valores numéricos dados en el enunciado

$$y_B = 3 \sqrt{\frac{2x_B}{9,8 \cdot \operatorname{sen} 45}} - \frac{x_B}{\operatorname{tag} 45} = 1,61 \sqrt{x_B} - x_B$$

$$x_C = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot \operatorname{sen} 45 \cdot t^2 = 3,46 t^2$$

Las gráficas de movimiento de ambos cuerpos



En la figura 2 se ha elegido un sistema de referencia distinto al anterior

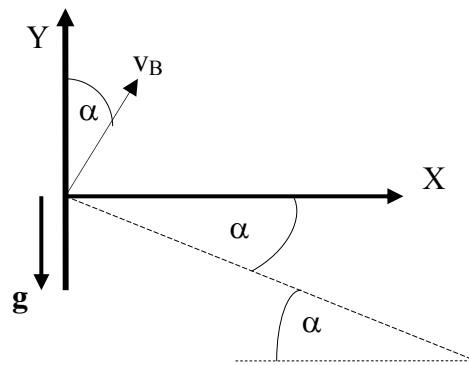


Fig.2

Las ecuaciones de movimiento de la bola son:

$$x_B = v_B \sin \alpha \cdot t ; \quad y_B = v_B \cos \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

El carrito desliza sobre el plano inclinado con una aceleración de módulo  $g \sin \alpha$  y al cabo de un tiempo  $t$  ha recorrido sobre el plano una distancia medida sobre el plano

$$l = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$

Para ese valor de  $l$ , las correspondientes coordenadas en el sistema XY (condiciones de ligadura) son:

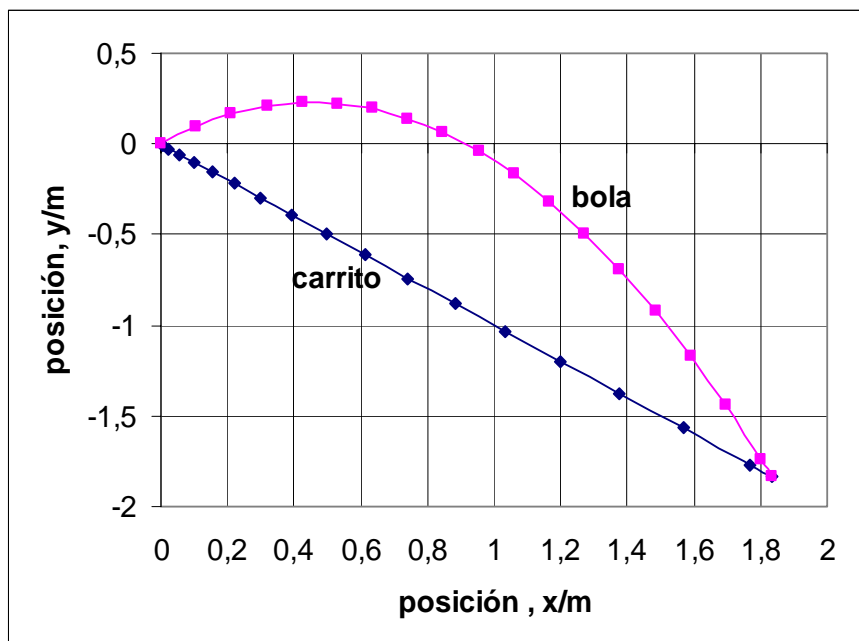
$$x_C = l \cos \alpha = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cos \alpha \cdot t^2 ; \quad y_C = -l \sin \alpha = -\frac{1}{2} g \sin^2 \alpha \cdot t^2$$

Para los valores numéricos dados en el enunciado:

$$x_B = 2,12 t ; \quad y_B = 2,12 t - 4,9 t^2$$

$$x_C = 2,45 t^2 ; \quad y_C = -2,45 t^2$$

Las posiciones de las trayectorias de la bola y del carrito están en la gráfica siguiente:



Esta gráfica nos indica que desde el punto de vista del sistema XY el carrito no está permanentemente debajo de la bola pero sí que coinciden en un lugar del plano inclinado (distinto al inicial) tal como ocurre en el sistema  $X_p Y_p$ .

c) Tomamos unos ejes de referencia  $X_p Y_p$ , como los de la figura 1.

Ecuaciones de la bola

$$x_B = -v_c t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_B = v_B t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2$$

Ecuaciones del carrito

$$x_C = -v_c t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_C = 0$$

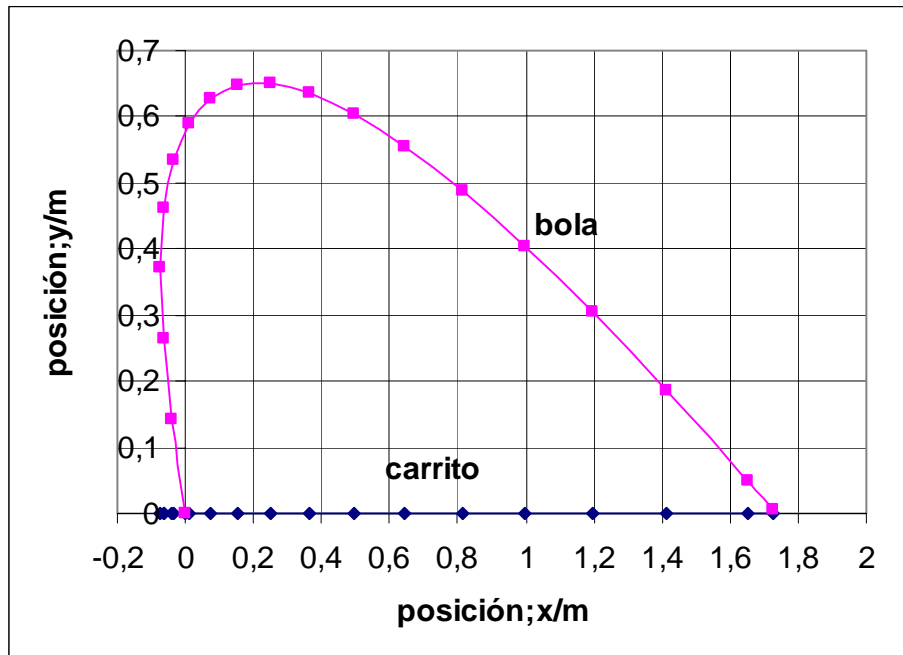
Como  $x_C = x_B$ , el carrito está siempre debajo de la bola y en un determinado lugar se encontrarán, aparte del instante inicial.

Sustituyendo los valores del enunciado en las ecuaciones anteriores resulta:

$$x_B = -t + 3,46 t^2 \quad ; \quad y_B = 3t - 3,46 t^2$$

$$x_C = -t + 3,46 t^2 \quad ; \quad y_C = 0$$

Las posiciones de las trayectorias de la bola y del carrito están en la gráfica siguiente:



Elegimos ahora un sistema de referencia XY como se indica en la figura 3

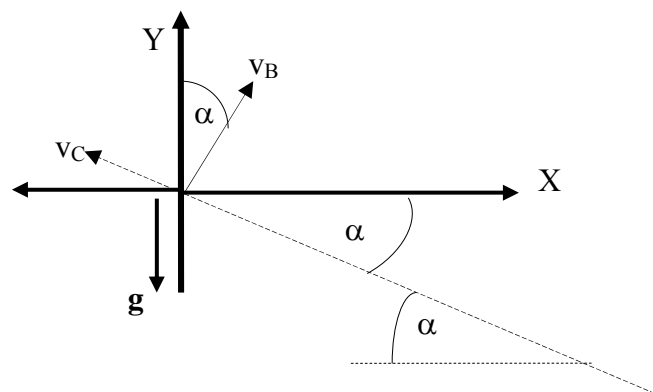


Fig.3

Las ecuaciones de la bola son:

$$x_B = (v_B \sin \alpha - v_C \cos \alpha)t \quad ; \quad y_B = (v_B \cos \alpha + v_C \sin \alpha)t - \frac{1}{2} g t^2$$

Si el carrito recorre sobre el plano inclinado una distancia  $l$  en un tiempo  $t$ , resulta:

$$l = -v_C t + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

Y las coordenadas de esa posición respecto del sistema XY de la figura 3 (condiciones de ligadura).

$$x_C = l \cos \alpha = -v_C \cos \alpha \cdot t + \frac{1}{2} g \sin \alpha \cos \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_C = -l \sin \alpha = v_C \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha \cdot t^2$$

Para un ángulo  $\alpha = 45^\circ$

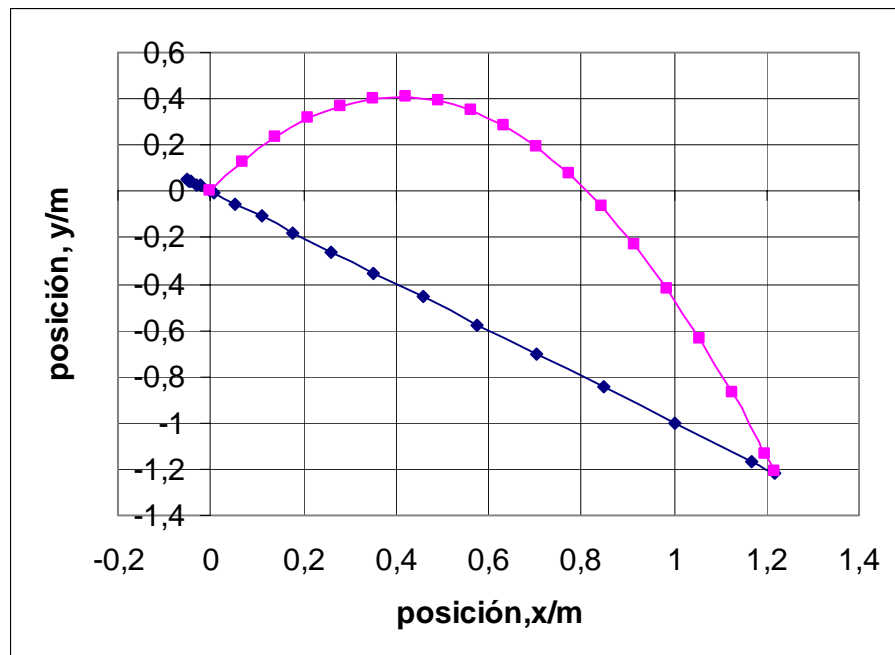
$$x_B = (3 \cdot \text{sen } 45 - 1 \cdot \text{cos } 45)t = 1,41t \quad ;$$

$$y_B = (3 \cdot \text{cos } 45 + 1 \cdot \text{sen } 45)t - 4,9t^2 = 2,83t - 4,9t^2$$

$$x_C = -1 \cdot \text{cos } 45 \cdot t + 4,9 \cdot \text{cos } 45 \text{ sen } 45 t^2 = -0,707t + 2,45t^2$$

$$y_C = 1 \cdot \text{sen } 45 \cdot t - 4,9 \cdot \text{sen}^2 45 t^2 = 0,707t - 2,45t^2$$

Las posiciones de las trayectorias de la bola y del carrito están en la gráfica siguiente



**80.-Una esfera de radio  $r$  expuesta a la radiación solar es capaz de absorberla íntegramente. Se pide el radio de dicha esfera si se cumple que la fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y la esfera se equilibra con la fuerza de presión de la radiación solar.**

**Datos Potencia radiada por el Sol  $P_S=4 \cdot 10^{26}$  W, densidad de la esfera  $10^3$  kg/m<sup>3</sup>, Constante de Gravitación Universal  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> ; Masa del Sol  $=1,99 \cdot 10^{30}$  kg.**

La luz está formada por fotones, partículas sin masa, con energía y con momento, existiendo entre estas dos últimas magnitudes la relación:

$$E = pc \quad (1)$$

Por consiguiente al absorber la esfera energía procedente de la radiación solar “absorbe” momento lineal, esto es, cambia el momento y ese cambio de momento origina una fuerza que se denomina de presión de la radiación.

El Sol lanza al espacio de forma uniforme una energía por unidad de tiempo de valor  $P_S$ . Si la esfera se encuentra a una distancia  $R$  del Sol, la energía que le llega por unidad de tiempo y unidad de superficie es:

$$P_B = \frac{P_S}{4\pi R^2}$$

La superficie de la esfera que absorbe la radiación es  $\pi r^2$ , tal como puede deducirse de la figura 1.

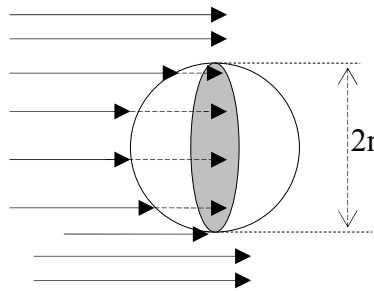


Fig.1

La energía que por unidad de tiempo absorbe la esfera de superficie  $S = \pi r^2$  es:

$$E_B = P_B \cdot S = \frac{P_S}{4\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \frac{P_S \cdot r^2}{4 R^2}$$

Simultáneamente con esa absorción de energía se produce una variación por unidad de tiempo en el momento lineal de la radiación, de acuerdo con la ecuación (1), y precisamente esa variación por unidad de tiempo del momento lineal, es la fuerza de la radiación

$$c \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{P_S r^2}{4 R^2} \Rightarrow F_B = \frac{P_S r^2}{4 c R^2}$$

La fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y la esfera es:

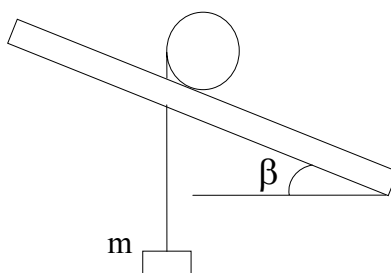
$$F_g = \frac{GM_S m_b}{R^2} = \frac{GM_S \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_B}{R^2}$$

Igualando ambas fuerzas:

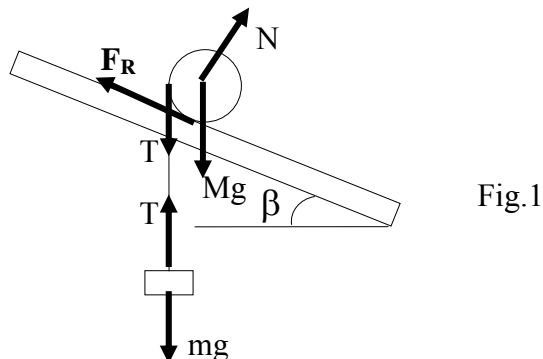
$$F_g = \frac{P_S r^2}{4cR^2} = \frac{GM_S \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_B}{R^2} \Rightarrow \frac{P_S}{4c} = GM_S \cdot \frac{4}{3} \pi r \rho_B \Rightarrow r = \frac{3P_S}{16\pi G M_S c \rho_B} \Rightarrow$$

$$r = \frac{3 \cdot 4 \cdot 10^{26}}{16\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^3} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

81.-Un cilindro macizo de masa  $M$  y radio  $R$  está situado sobre un plano inclinado que forma con la horizontal un ángulo  $\beta$ . Lleva enrollada una cuerda de masa despreciable y en el extremo libre de la misma se ha colocado una masa  $m = \frac{M}{4}$  (ver figura). Dicha cuerda pasa por una rendija que posee el plano inclinado a lo largo del mismo. Se supone que el rozamiento entre el cilindro y el plano es  $\mu = 0,3$ , que la cuerda no desliza sobre el cilindro y que no existe ningún otro tipo de rozamiento. Determinar el movimiento del cilindro de modo que éste rueda pero no deslice por el plano inclinado.



Admitimos de entrada para el sentido del movimiento, que la masa  $m$  se desplaza en dirección vertical y hacia arriba o que el cilindro rueda hacia abajo del plano inclinado, las fuerzas que actúan sobre el sistema son las indicadas en la figura 1.



El hilo no desliza por la garganta del cilindro y en consecuencia la aceleración de la masa  $m$  suspendida, es la misma que la aceleración tangencial de la periferia de éste. A su vez, por rodar el cilindro por el plano inclinado, se cumple que la aceleración de su c.d.m. es igual a la angular por el radio del cilindro y en consecuencia la aceleración de la masa  $m$ , es la misma que la del c.d.m. del cilindro.

Con estas consideraciones, las ecuaciones de la Dinámica aplicadas al sistema, respecto de unos ejes situados en el plano inclinado son las siguientes \*:

$$T \operatorname{sen} \beta + Mg \operatorname{sen} \beta - F_R = Ma \quad (1)$$

$$F_R R - TR = I \alpha \quad (2)$$

$$T - mg = ma \quad (3)$$

$$a = \alpha R \quad (4)$$

De (3) despejamos  $T$ , y de (2)  $F_R$ , y llevamos estos valores a (1).

$$T = mg + ma ; F_R = \frac{I\alpha}{R} + T = \frac{\frac{1}{2}MR^2 \cdot a}{R} + mg + ma = a\left(\frac{1}{2}M + m\right) + mg \Rightarrow$$

$$m(g+a)\text{sen}\beta + Mg\text{sen}\beta - a\left(\frac{1}{2}M + m\right) - mg = Ma$$

Operando en la última ecuación:

$$Mg\text{sen}\beta - mg + mg\text{sen}\beta = a\left(M + \frac{1}{2}M + m - m\text{sen}\beta\right) \Rightarrow a = \frac{(M+m)\text{sen}\beta - m}{\frac{3}{2}M + m(1 - \text{sen}\beta)}g$$

Según el enunciado  $M=4m$ , luego la aceleración es igual a:

$$a = \frac{5m\text{sen}\beta - m}{7m - m\text{sen}\beta}g = \frac{5\text{sen}\beta - 1}{7 - \text{sen}\beta}g$$

La aceleración en el sentido del movimiento, esto es, rodando hacia abajo del plano, es positiva:

$$a > 0 \Rightarrow \frac{5\text{sen}\beta - 1}{7 - \text{sen}\beta}g > 0 \Rightarrow 5\text{sen}\beta - 1 > 0 \Rightarrow \text{sen}\beta > \frac{1}{5} \Rightarrow \beta > 11,5^\circ$$

La condición encontrada es que el ángulo del plano sea mayor de  $11,5^\circ$ , ahora bien, la fuerza de rozamiento tiene un valor límite superior, de modo que  $F_R < \mu N$ .

Determinemos el valor de  $N$  de la figura 1, se deduce:

$$N - T\cos\beta - Mg\cos\beta = 0 \Rightarrow N = T\cos\beta + Mg\cos\beta = m(g+a)\cos\beta + 4mg\cos\beta \Rightarrow \\ \Rightarrow N = m\cos\beta(5g+a) \Rightarrow F_R < \mu m\cos\beta(5g+a)$$

Sustituimos la fuerza de rozamiento y la aceleración por sus valores

$$F_R = a\left(\frac{1}{2}M + m\right) + mg = 3ma + mg \Rightarrow 3ma + mg < \mu m\cos\beta(5g+a) \Rightarrow \\ \Rightarrow 3a + g < \mu\cos\beta(5g+a) \Rightarrow \frac{3a + g}{\cos\beta(5g+a)} < \mu$$

En la última ecuación se sustituye la aceleración por su valor:

$$\mu > \frac{3\frac{5\text{sen}\beta - 1}{7 - \text{sen}\beta}g + g}{\cos\beta\left(5g + \frac{5\text{sen}\beta - 1}{7 - \text{sen}\beta}g\right)} = \frac{\frac{14\text{sen}\beta + 4}{7 - \text{sen}\beta}}{\frac{5\cos\beta(7 - \text{sen}\beta) + (5\text{sen}\beta - 1)\cos\beta}{7 - \text{sen}\beta}} \Rightarrow \mu > \frac{14\text{sen}\beta + 4}{34\cos\beta}$$

Según el enunciado  $\mu=0,3$

$$0,3 > \frac{14 \operatorname{sen} \beta + 4}{34 \cos \beta} \Rightarrow 10,2 \cdot \cos \beta > 14 \operatorname{sen} \beta + 4$$

En la inecuación damos valores al ángulo  $\beta$ , hasta encontrar aquel para el que la inecuación ya no se verifica

$\beta/^\circ$	$10,2 \cdot \cos \beta$	$14 \operatorname{sen} \beta + 4$
22	9,457	9,244
22,5	9,424	9,358
22,7	9,410	9,403
22,8	9,403	9,425

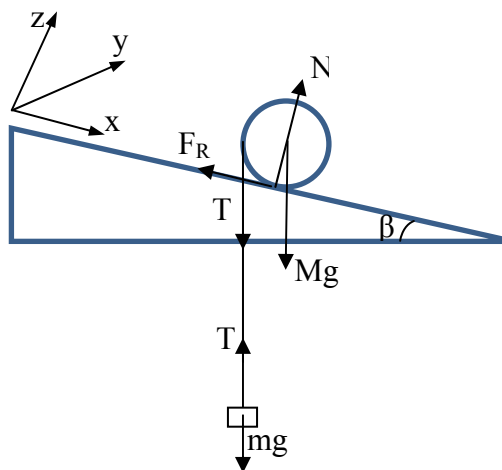
El ángulo  $\beta$  está comprendido entre:  $22,7^\circ < \beta < 22,8^\circ$

La consecuencia es que el cilindro rueda para valores menores de  $22,8^\circ$ . Si  $\beta \geq 22,8^\circ$  la aceleración es positiva, el cilindro rueda hacia abajo y si  $\beta \leq 22,7^\circ$  es negativa, el cilindro rueda hacia arriba del plano inclinado.

\* Las ecuaciones (1) a (4) se han escrito en forma escalar. la justificación vectorial de dichas ecuaciones se hace a continuación:

El hilo no desliza por la garganta del cilindro y en consecuencia la aceleración de la masa  $m$  suspendida, es la misma que la aceleración tangencial de la periferia de éste. A su vez, al rodar el cilindro por el plano inclinado, se cumple que la aceleración de su c.d.m.  $\vec{a} = -\vec{\alpha} \times \vec{R}$ . Consecuentemente la aceleración en módulo de la masa  $m$ , es la misma que la del c.d.m. del cilindro.

Con estas consideraciones, las ecuaciones de la Dinámica aplicadas al sistema, respecto de unos ejes (triedro a derechas) situados en el plano inclinado son las siguientes:



En la masa  $M$ .

$$\sum F_x = T \sin \beta + Mg \sin \beta - F_R = Ma$$

$$\sum F_z = N - T \cos \beta - Mg \cos \beta = 0$$

En la masa  $m$ .

$$\sum F_x = T \cos \beta - mg \cos \beta = m \cdot a \cos \beta \quad \rightarrow \quad T = mg + ma$$

Por rodar, la aceleración del c.d.m. tiene sentido contrario a

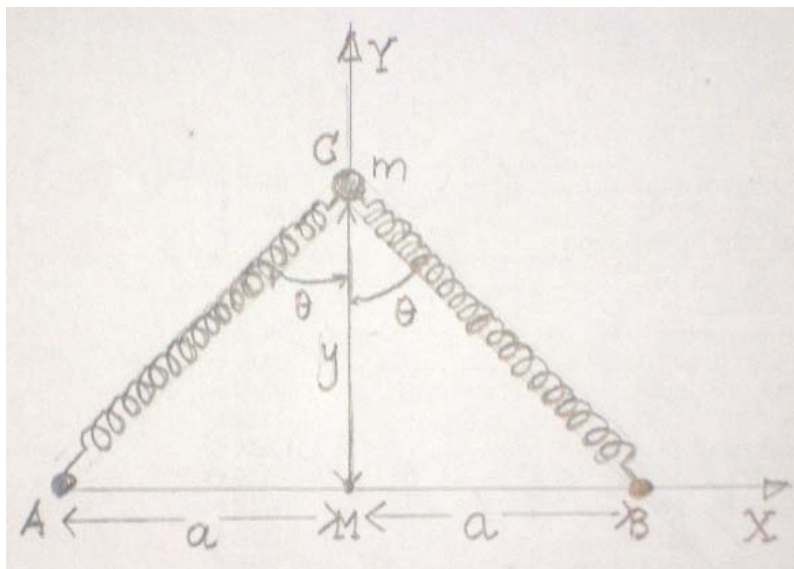
$$\vec{\alpha} \times \vec{R}; \quad \vec{a} = a\vec{t} = -\vec{\alpha} \times \vec{R} = -(-aR\vec{t}) = aR\vec{t}$$

$$a = \alpha \cdot R \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

$$\sum \text{Momentos} = F_R \cdot R - T \cdot R = I \cdot \alpha; \quad F_R \cdot R = I \alpha + T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \frac{a}{R} + (mg + ma)R$$

$$F_R = \left(\frac{1}{2}M + m\right)a + mg$$

82.- En la figura inferior la masa  $m$  está unida a dos muelles iguales cuya constante elástica es  $k$ . Los muelles están sujetos firmemente en las posiciones  $A$  y  $B$  y el conjunto se apoya sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Cuando la masa  $m$  se encuentra en la posición  $M$  los dos muelles tienen su longitud natural ( $a$  en la figura), esto es, ni estirados ni contraídos.



Cuando la masa  $m$  se encuentra en la posición  $C$ .

- Calcular la fuerza con que actúan los muelles sobre dicha masa.
- Calcular la energía potencial elástica de la masa  $m$ .
- Evaluar el trabajo que ha de realizarse para llevar la masa  $m$  desde la posición  $M$  a la  $C$ .

a) Sobre la masa  $m$  el muelle de la izquierda actúa con una fuerza cuyo módulo es:

$$F_1 = k \Delta l$$

Siendo  $\Delta l$  el aumento de longitud del muelle de la izquierda respecto de su longitud natural  $a$ .

$$\Delta l = \sqrt{a^2 + y^2} - a \Rightarrow F = k(\sqrt{a^2 + y^2} - a)$$

El vector  $\vec{F}_1$  tiene dos componentes que son:

$$\vec{F}_1 = -k(\sqrt{a^2 + y^2} - a) \sin\theta \vec{i} - k(\sqrt{a^2 + y^2} - a) \cos\theta \vec{j}$$

El muelle de la derecha tiene dos componentes sobre los ejes que son:

$$\vec{F}_D = +k(\sqrt{a^2 + y^2} - a) \text{sen}\theta \vec{i} - k(\sqrt{a^2 + y^2} - a) \text{cos}\theta \vec{j}$$

Luego la fuerza resultante es:

$$\begin{aligned} \vec{F}_R = \vec{F}_I + \vec{F}_D &= -2k(\sqrt{a^2 + y^2} - a) \text{cos}\theta \vec{j} = -2k(\sqrt{a^2 + y^2} - a) \cdot \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \vec{j} \Rightarrow \\ \vec{F}_R &= -2k y \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right) \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

b) La energía potencial almacenada por cada uno de los muelles vale

$$E_p = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k [\sqrt{a^2 + y^2} - a]^2 = \frac{1}{2} k (a^2 + y^2 + a^2 - 2a\sqrt{a^2 + y^2})$$

La energía potencial elástica del sistema es la suma de la correspondiente a cada muelle.

$$E_t = 2 \left( \frac{1}{2} k \Delta l^2 \right) = k [\sqrt{a^2 + y^2} - a]^2 = k (2a^2 + y^2 - 2a\sqrt{a^2 + y^2}) \quad (1)$$

c) La fuerza que actúa sobre la masa  $m$  es variable y depende de la distancia entre la posición de la masa  $m$  y el punto  $M$ . Designamos a esa distancia con  $\lambda$ , el trabajo elemental para desplazar la masa  $m$  una distancia  $d\lambda$  debe ser realizado por una fuerza igual y de sentido contrario a  $\vec{F}_R$  que actúa a través de sucesivos estados de equilibrio con objeto de que no adquiera energía cinética:

$$\begin{aligned} dW = F_R \vec{j} \cdot d\lambda \vec{j} &= 2k\lambda \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \right) d\lambda \Rightarrow W = 2k \int_0^y \lambda \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \right) d\lambda \Rightarrow \\ \Rightarrow W &= 2k \int_0^y \lambda d\lambda - k a \int_0^y \frac{2\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} d\lambda \end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral hacemos el cambio de variable:

$$p^2 = a^2 + \lambda^2 \Rightarrow 2p dp = 2\lambda d\lambda$$

Con lo que la integral queda:

$$-k a \int \frac{2p dp}{p} = -2k a p = -2k a \sqrt{a^2 + \lambda^2}$$

Llevando a (2)

$$W = \left[ 2k \frac{\lambda^2}{2} \right]_0^y - \left[ 2k a \sqrt{a^2 + \lambda^2} \right]_0^y = k y^2 - \left[ 2k a \sqrt{a^2 + y^2} \right] + 2k a^2 \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) valen igual, puesto que el trabajo realizado sobre el sistema se invierte en energía potencial elástica, ya que se trata del trabajo realizado contra una fuerza conservativa, y efectuado en sucesivos estados de equilibrio.

83.- En lo alto de un plano inclinado de masa  $m_1$ ; ángulo  $\alpha$  y longitud  $L$ , se coloca una masa (considerada puntual)  $m_2$ . Se admite que no existe ningún tipo de rozamiento. Se pide determinar la aceleración del plano inclinado cuando la masa puntual  $m_2$  desliza por él.

El sistema formado por el plano y la masa puntual se encuentran inicialmente como indica la figura 1(a) y al cabo de un tiempo  $t$ , cuando la masa  $m$  llega al final del plano, como indica la figura 1(b). Inicialmente el plano inclinado y la masa  $m_2$  se encuentra en reposo, por tanto la velocidad del centro de masas del sistema en ese instante es nula.

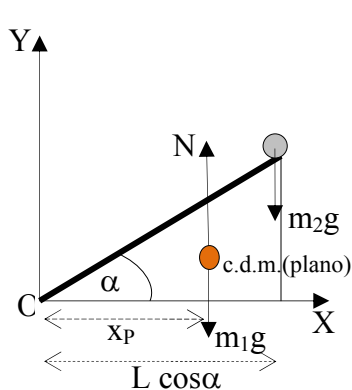


Fig. 1 (a)

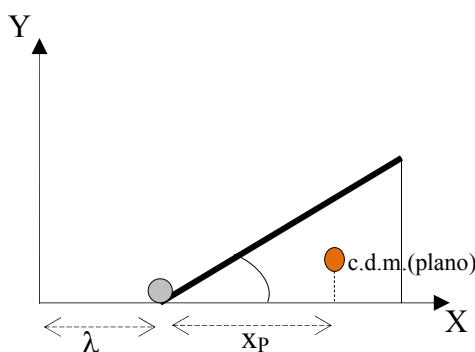


Fig.1 (b)

Designamos con  $L$  a la longitud del plano. Respecto del sistema de referencia ( $OXY$ ), la abscisa de la masa puntual es  $L \cos \alpha$ , y la del centro de masas del plano inclinado, es  $x_p$ . Al cabo del tiempo  $t$ , la masa puntual tiene una abscisa  $\lambda$  y el centro de masas del plano inclinado  $\lambda + x_p$ .

Las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema son: el peso  $m_2 g$  de la masa  $m_2$ , el peso  $m_1 g$  del plano inclinado y la fuerza  $N$  con que el suelo empuja al plano, todas ellas perpendiculares al eje  $X$  [nótese que entre las masa  $m_1$  y  $m_2$  también se ejercen fuerzas y reacciones, pero son interiores al sistema y no influyen en el movimiento general del mismo, aparecen representadas en la Fig. 2].

Aplicando la ley de Newton al sistema

$$\sum F_{\text{ext}}(x) = \sum m_{\text{total}} \cdot a_x = (m_1 + m_2) a_x$$

Teniendo en cuenta que el sumatorio de las fuerzas exteriores es nulo se deduce:

$$(m_1 + m_2) \cdot \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = \text{Cte} = 0 \Rightarrow x_{\text{CM}}(\text{sistema}) = \text{Cte}$$

La ecuación anterior nos indica que la abscisa del centro de masas del sistema no se desplaza, es la misma en el tiempo  $t=0$  que cuando el tiempo es  $t$ , a pesar de que tanto el plano inclinado como la masa  $m_2$  se han movido. Se deduce:

$$x_{CM}(\text{sistema}) = \frac{m_1 x_p + m_2 L \cos \alpha}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (x_p + \lambda) + m_2 \lambda}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_2 L \cos \alpha = \lambda (m_1 + m_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{m_2 L \cos \alpha}{m_1 + m_2}$$

En el intervalo de tiempo  $t=0$  a  $t=t$  la masa  $m_2$  recorre la longitud  $L$  del plano y el plano inclinado la distancia  $\lambda$ .

Teniendo presente que el plano posee una aceleración  $\mathbf{a}$  dirigida a lo largo del eje  $X$  positivo, del sistema  $(OXY)$ ; es necesario tomar otro sistema de ejes sobre el plano inclinado  $(O'X'Y')$  que será no-inercial. La masa  $m_2$  por moverse en este sistema las fuerzas que actúan sobre ella son: su peso, la fuerza de inercia  $F_i = -m_2 \cdot a$  y la fuerza de reacción  $N_p$  con que el plano la empuja, tal como se indica en la figura 2.

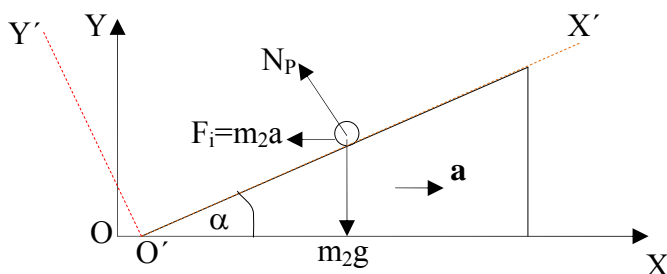


Fig.2

En el intervalo de tiempo  $t=0$  a  $t=t$ , la masa  $m_2$  llega a  $O'$  donde  $x' = 0$  :

$$\sum F_{X'} = -m_2 g \sin \alpha - m_2 a \cos \alpha = m_2 a_{x'} \Rightarrow a_{x'} = -(g \sin \alpha + a \cos \alpha)$$

$$x' - x'_0 = \frac{1}{2} a_{x'} t^2 \quad ; \quad 0 - L = -\frac{1}{2} (g \sin \alpha + a \cos \alpha) t^2$$

En el mismo intervalo de tiempo escribimos para el plano de masa  $m_1$ .

$$\lambda = \frac{1}{2} a t^2$$

De estas ecuaciones se deduce dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{g \sin \alpha + a \cos \alpha}{a} \Rightarrow \frac{L}{\frac{m_2 L \cos \alpha}{m_1 + m_2}} = \frac{g \sin \alpha + a \cos \alpha}{a} \Rightarrow$$

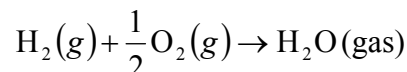
$$\Rightarrow a \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) = g \sin \alpha \cos \alpha + a \cos^2 \alpha \Rightarrow a \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} - \cos^2 \alpha \right) = g \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{g \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \frac{m_1}{m_2}}$$

**84.- En la cámara de combustión de un motor de reacción penetran por segundo  $m$  kg de hidrógeno y la cantidad de oxígeno necesaria para su combustión completa. El orificio de salida de la tobera del motor tiene una sección  $S$  expresada en  $m^2$ , siendo  $p$  la presión en atmósferas y  $T$  la temperatura en kelvin. Determinar la fuerza con que los gases de salida impulsan al motor.**

**Dato .  $R = 0,082$  (atm .L)/(mol K**

En la cámara de combustión del motor se produce una reacción química entre el hidrógeno y el oxígeno.



De la estequiometría de la reacción se deduce que los moles formados de vapor de agua son los mismos que los de entrada de hidrógeno. Dado que la masa molar del hidrógeno es:  $2 \frac{g}{mol} = 2 \frac{kg}{kgmol}$  y la del agua  $18 \frac{g}{mol} = 18 \frac{kg}{kgmol}$ , se deduce que la masa de vapor de agua que por segundo abandona la tobera es:

$$\text{Moles de hidrógeno a la entrada: } \frac{m \left( \frac{kg}{s} \right) \cdot \frac{1}{2} \frac{kgmol}{kg}}{1} = \frac{m}{2} \frac{kgmol}{s}$$

kg de vapor de agua que salen por la tobera por segundo:

$$\frac{m}{2} \frac{kgmol}{s} \cdot 18 \frac{kg}{kgmol} = 9m \frac{kg}{s}$$

El volumen de vapor de agua que abandona la tobera es igual a la masa de vapor de agua dividido por la densidad del vapor en las condiciones de presión y temperatura que existen a la salida. Admitiendo que el vapor de agua se comporta como un gas perfecto.

$$pV = \frac{\text{gramos}}{M_{H_2O}} RT \Rightarrow p = \frac{\rho_{H_2O}}{M_{H_2O}} RT \Rightarrow \rho_{H_2O} = \frac{p M_{H_2O}}{RT} = \frac{p(\text{atm}) \cdot \frac{18g}{mol}}{0,082 \frac{\text{atmL}}{mol} T(K)} = 219,5 \frac{p}{T} \frac{g}{L}$$

$$\text{Gasto} = \frac{\text{masa por s}}{\rho_{H_2O}} = \frac{9m \frac{kg}{s}}{219,5 \frac{p}{T} \frac{g}{L}} = \frac{9m \frac{kg}{s}}{219,5 \frac{p}{T} \frac{10^{-3}kg}{10^{-3}m^3}} = \frac{9m}{219,5} \frac{m^3}{s} = Sv \Rightarrow$$

$$v = \frac{9m}{219,5} \frac{m}{\frac{p}{T} \cdot S}$$

Teniendo en cuenta que la fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento

$$F = m \cdot \frac{9mT}{219,5pS} \text{ N}$$

Si en la ecuación anterior hubiese que sustituir valores numéricos m las magnitudes se expresarían m en kg, , T en K, p en atm y S en m<sup>2</sup>.

**85.-** Cuando se lanza un proyectil desde un suelo horizontal formando un cierto ángulo con el suelo, el proyectil, en el vacío, describe una trayectoria parabólica. El área comprendida entre la curva y el suelo se designa con  $A(\alpha)$  indicando así que esa área es función del ángulo de lanzamiento. a) Calcular el valor de  $\alpha$  para que el área tenga el máximo valor. b) Dibujar la gráfica del área frente al ángulo de lanzamiento.

Si en la parábola seleccionamos una estrecha franja de altura  $y$ , y espesor  $dx$  ( ver figura 1) el área vale  $dA=y dx$  y el área comprendida entre la curva y el suelo:

$$A = \int_0^{x_M} y dx$$

Siendo  $x_M$  la distancia desde el punto de lanzamiento hasta dónde el proyectil choca contra el suelo

Vamos a obtener la ecuación que relaciona  $y$  con  $x$

$$x = v_0(\cos\alpha)t \quad , \quad y = v_0(\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejamos la variable  $t$  en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda

$$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = x \operatorname{tag}\alpha - \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Para calcular el valor de  $x_M$  tenemos en cuenta que cuando el proyectil choca contra el suelo  $y=0$

$$\begin{aligned} 0 &= v_0(\sin\alpha)t_M - \frac{1}{2}gt_M^2 \Rightarrow t_M = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} \Rightarrow x_M = v_0(\cos\alpha)\frac{2v_0\sin\alpha}{g} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_M = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \end{aligned}$$

Volviendo a la integral

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{x_M} \left( x \operatorname{tag}\alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \right) dx = \operatorname{tag}\alpha \frac{x^2}{2} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{x_M} = \\ &= \operatorname{tag}\alpha \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{2g^2} - \frac{g}{6v_0^2 \cos^2\alpha} \frac{v_0^6 \sin^3 2\alpha}{g^3} = \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{2g^2} \left( \operatorname{tag}\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{3 \cos^2\alpha} \right) = \\ &= \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{2g^2 \cos\alpha} \left( \sin\alpha - \frac{2 \sin\alpha}{3} \right) = \frac{v_0^4 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha \sin\alpha}{g^2 \cos\alpha} \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \frac{v_0^4}{g^2} \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha \quad (1) \end{aligned}$$

Como nos piden el área máxima derivamos la ecuación (1) respecto de  $\alpha$  e igualamos a cero.

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{2v_0^4}{3g^2} [-\sin^4\alpha + \cos\alpha \cdot 3\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha] = 0 \Rightarrow 3\cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{tag}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

b)

