RELATIVIDAD 3

23.- La velocidad de una cierta masa es $\frac{\sqrt{3}\, c}{2}$. Determinar cuántas veces mayor es el momento lineal relativista respecto del calculado mediante la expresión newtoniana.

El momento lineal relativista es:

$$\frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\ m_o v$$

y el momento newtoniano mv. De ambas relaciones se deduce

$$\frac{\gamma\ m_o v}{m_o v} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\frac{3}{4}c^2}{c^2}}} = 2$$

24.- Un protón lleva una velocidad de 0,62c . Determinar su momento lineal expresándolo en unidades del SI y en GeV/c, sabiendo que la energía en reposo del protón es 938,28 MeV.

El momento lineal relativista está dado por la expresión:

$$p = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} * m_o v \quad ; \quad E = m_o c^2 \quad \Rightarrow \quad m_o = \frac{E}{c^2} = \frac{938{,}28.10^6\, eV}{c^2}$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}62^2}} * \frac{938{,}28.10^6\, eV}{c^2} * 0{,}62c = \frac{0{,}74.10^9\, eV}{c} = 0{,}74\frac{GeV}{c}$$

La masa del protón en el SI es: $m_o = \dfrac{938{,}28.10^6\, eV * 1{,}6.10^{-19}\ \frac{J}{eV}}{\left(3.10^8\ \frac{m}{s}\right)^2} = 1{,}67.10^{-27}\ kg$

$$p = \frac{1}{\sqrt{1-0,62^2}} * 1,67.10^{-27} * 0,62 * 3.10^8 = 4,0.10^{-19} \quad \frac{kg*m}{s}$$

25.- Calcular el trabajo que ha de realizarse para que un protón que lleva una velocidad de 0,75c m/ s pase a una velocidad de 0,95c m/s.

En la mecánica relativista, el trabajo necesario para que una partícula de masa m_o pase desde el reposo a una cierta velocidad está dado por la expresión:

$$W = \gamma \ m_o c^2 - m_o c^2$$

Para pasar desde el reposo a 0,75c el trabajo es: $W_1 = \frac{1}{\sqrt{1-0,75^2}} m_0 c^2 - m_o c^2$

Para pasar desde el reposo a 0,95c el trabajo es: $W_2 = \frac{1}{\sqrt{1-0,95^2}} m_0 c^2 - m_o c^2$

El trabajo pedido es:

$$W = W_2 - W_1 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-0,95^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0,75^2}} \right) = 1,67.10^{-27} * 9.10^{16} * 1,69 = 2,54.10^{-10} \ J$$

26.- Una partícula se desplaza con una velocidad 0,5c. Determinar el error relativo que se comete al calcular su energía cinética mediante la expresión de la mecánica newtoniana

Si m_o es la masa de la partícula su energía calculada mediante la mecánica relativista es:

$$E_R = \gamma \ m_o c^2 - m_o c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-0,25^2}} - 1 \right) = 0,155 \ m_o c^2$$

La energía cinética newtoniana

$$E_c = \frac{1}{2} m_o 0,25c^2 = 0,125 \ m_o c^2$$

El error relativo

$$\varepsilon = \frac{0,155 m_o c^2 - 0,125 m_o c^2}{0,155 m_o c^2} * 100 = 19 \ \%$$

27.- La energía en reposo del protón es 938,28 MeV. Un protón tiene una energía cinética de 0,5 GeV, determinar su momento lineal

$$E_C = m_o c^2(\gamma - 1) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{E_C}{m_o c^2} + 1$$

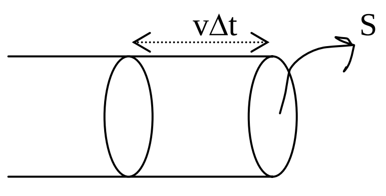
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \quad \Rightarrow \quad c^2 - v^2 = \frac{c^2}{\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$p = \gamma\ m_o v = \gamma\ m_o\left(\frac{c}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - 1}\right) = m_o c\sqrt{\left(\frac{E_C}{m_o c^2} + 1\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{E_C^2 m_o^2 c^2}{m_o^2 c^4} + \frac{2E_C m_o^2 c^2}{m_o c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{\frac{E_C^2}{c^2} + 2E_C m_o} = \frac{\sqrt{E_C^2 + 2E_C m_o c^2}}{c} = \frac{\sqrt{0{,}5^2(\text{GeV})^2 + 2 * 0{,}5\text{GeV} * 0{,}93828\text{GeV}}}{c} = 1{,}2\frac{\text{GeV}}{c}$$

28.- Un haz de partículas, dotada cada una de una carga eléctrica q, se mueve a altas velocidades y choca contra un blanco que absorbe dichas partículas. La energía cinética de cada partícula es E_C y la intensidad eléctrica del haz es I. Determinar la fuerza media y la potencia que ejerce el haz sobre el blanco absorbente.

Consideremos una sección S sobre el blanco. La intensidad de la corriente es el cociente entre la carga que llega a esa sección en un tiempo Δt. Sea N_o el número de partículas que existen en la unidad de volumen. Si S es un círculo, resulta que todas las partículas que están en un cilindro de base S y altura $v\Delta t$ llegan al blanco.



N representan las partículas que llegan a la sección S en el tiempo Δt. Dichas partículas están contenidas en el cilindro de base S y altura $v\Delta t$, luego $N = N_o S v \Delta t$

Q=Nq es la carga que llega a la sección en el tiempo Δt, por tanto,

$$I = \frac{Nq}{\Delta t} = \frac{N_o Sv\Delta tq}{\Delta t} = N_o Svq$$

Las partículas al chocar con el blanco se frenan y su cantidad de movimiento se hace cero. La variación de la cantidad de movimiento en el tiempo Δt vale

$$\Delta p = p_{FINAL} - p_{INICIAL} = -p_{INICIAL}$$

La fuerza que se ejerce sobre el blanco absorbente es:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{p_{INICIAL}}{\Delta t} = -\frac{N\gamma m_o v}{\Delta t}$$

En el problema 27 se ha establecido la relación entre la energía cinética y el momento lineal relativista

$$p = \frac{\sqrt{E_C^2 + 2E_C m_o v^2}}{c}$$

Llevado a la expresión anterior

$$F = -\frac{N\sqrt{E_C^2 + 2E_C m_o v^2}}{c\Delta t} = -\frac{N_o Sv\Delta t\sqrt{E_C^2 + 2E_C m_o v^2}}{c\Delta t} = -\frac{\frac{I}{Svq} Sv\sqrt{E_C^2 + 2E_C m_o v^2}}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{I}{qc}\sqrt{E_C^2 + 2E_C m_o v^2}$$

La potencia es el cociente entre la energía comunicada por las partículas dividida por el tiempo en que se comunica esa energía

$$P = \frac{\Delta(N * E_C)}{\Delta t} = \frac{N * E_C}{\Delta t} = \frac{N_o Sv\Delta t * E_C}{\Delta t} = \frac{\frac{I}{Svq} Sv * E_C}{\Delta t} = \frac{I * E_C}{q}$$

29.- En la mecánica relativista la fuerza y la aceleración que sufre un cuerpo son vectores que, en general, no coinciden en dirección, aunque existen dos casos en que esto si ocurre. Establecer los casos en qué ocurre y la relación matemática entre la fuerza y la aceleración.

La definición de fuerza en la mecánica relativista es

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma\ m_o \mathbf{v}) = m_o \mathbf{v}\frac{d\gamma}{dt} + m_o\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_o \mathbf{v}\frac{d\gamma}{dt} + m_o\gamma\ \mathbf{a} \quad (1)$$

Un caso en que la dirección de **F** y **a** son coincidentes es si el primer miembro de la expresión anterior es nulo.

$$m_o\mathbf{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}{c^2}}}\right) = m_o\mathbf{v}\frac{-\frac{-\frac{2}{c^2}\left(\mathbf{v}\bullet\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_o\mathbf{v}\frac{\frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{a}}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}\bullet\mathbf{a} = 0$$

El producto escalar de los vectores **a** y **v** es nulo y como no lo es ni el módulo de a ni el de v, se deduce que ambos vectores son perpendiculares, luego se trata de un movimiento circular. La aceleración existente es la aceleración centrípeta, y en consecuencia la **fuerza es perpendicular** a la velocidad.

$$\mathbf{F} = \gamma\ m_o\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}m_o\mathbf{a}$$

El segundo caso en que **F** y **a** tienen la misma dirección, ocurre cuando la velocidad **v** tenga la misma dirección que el vector aceleración **a.**

$$\mathbf{F} = m_o\mathbf{v}\frac{\mathbf{v}\bullet\frac{d\mathbf{v}}{dt}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}} + m_o\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_o\mathbf{v}\frac{va}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}} + m_o\mathbf{a}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Como los vectores **v** y **a** tienen la misma dirección podemos escribir

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e} \quad y \quad \mathbf{a} = a\,\mathbf{e}$$

Siendo **e** un vector unitario en la dirección tanto de **a** como de **v**. Con lo que al sustituir en la anterior expresión

$$\mathbf{F} = m_o\mathbf{v}\frac{va}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}} + m_o\mathbf{a}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = m_o a\ \mathbf{e}\left[\frac{\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\mathbf{F} = m_o a \ \mathbf{e} \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}} = m_o \ \mathbf{a} \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

La fuerza tiene la misma dirección que la velocidad.

30.- Un protón describe un círculo de radio 1 metro en el seno de un campo magnético uniforme B = 2 T. Calcular la velocidad del protón, su momento lineal y su energía cinética. Dato , masa del protón $1{,}67.10^{-27}$ kg

Cuando una partícula cargada describe un círculo en un campo magnético uniforme, la fuerza magnética vale

$$F = q\,v\,B$$

Siendo q la carga del protón, v su velocidad. La fuerza F es la fuerza centrípeta que es perpendicular a la velocidad. En el problema 29 hemos demostrado que para este caso

$$\mathbf{F} = \gamma \ m_o \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m_o \mathbf{a}$$

siendo a la aceleración centrípeta cuyo módulo es: v^2/R

$$qvB = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m_o \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{qBR}{m_o} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{qBR}{m_o}\right)^2 = \frac{v^2c^2}{c^2-v^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1{,}6.10^{-19} * 2 * 1}{1{,}67.10^{-27}}\right)^2 = 3{,}67.10^{16} = \frac{9.10^{16} v^2}{9.10^{16} - v^2} \Rightarrow 3{,}24.10^{33} = 1{,}267.10^{17} v^2 \Rightarrow v = 1{,}6.10^8 \ \frac{m}{s}$$

$$qBR = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m_o v = p \quad \Rightarrow \quad p = 1{,}6.10^{-19} * 2 * 1 = 3{,}2.10^{-19} \ \frac{kg * m}{s}$$

$$E_C = (\gamma - 1) \ m_o c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1{,}6.10^8}{3.10^8}\right)^2}} * 1{,}67.10^{-27} * 9.10^{16} = 1{,}78.10^{-10} \ J$$

31.- Sobre una masa de un kilogramo se aplica una fuerza constante de 1 N durante un tiempo que dura años. Determinar las gráficas de variación de la velocidad y del momento lineal con el tiempo.

La relación entre fuerza y momento lineal relativista es: $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\gamma \ m_o v\right)$

De esta expresión podemos deducir

$$\int F dt = m_o \int d\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} v\right) = m_o \int \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2 dv}} - v\frac{-\frac{2v}{c^2}dv}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_o \int \frac{dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{Ft}{m_o} = \int \frac{dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = I \qquad (1)$$

Para resolver la integral hacemos el cambio $\frac{v^2}{c^2} = a \quad \Rightarrow v = c\sqrt{a} \quad \Rightarrow dv = \frac{cda}{2a^{\frac{1}{2}}}$

$$I = \int \frac{cda}{2a^{\frac{1}{2}}(1-a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{c}{2}\int (1-a)^{-\frac{3}{2}} * a^{-\frac{1}{2}} * \frac{a^{-\frac{3}{2}}}{a^{-\frac{3}{2}}} da = \frac{c}{2}\int \left(\frac{1-a}{a}\right)^{-\frac{3}{2}} * a^{-2} da$$

Ahora hacemos el cambio siguiente

$$\frac{1-a}{a} = u^2 \quad \Rightarrow \quad -da = 2ua^2 \ du$$

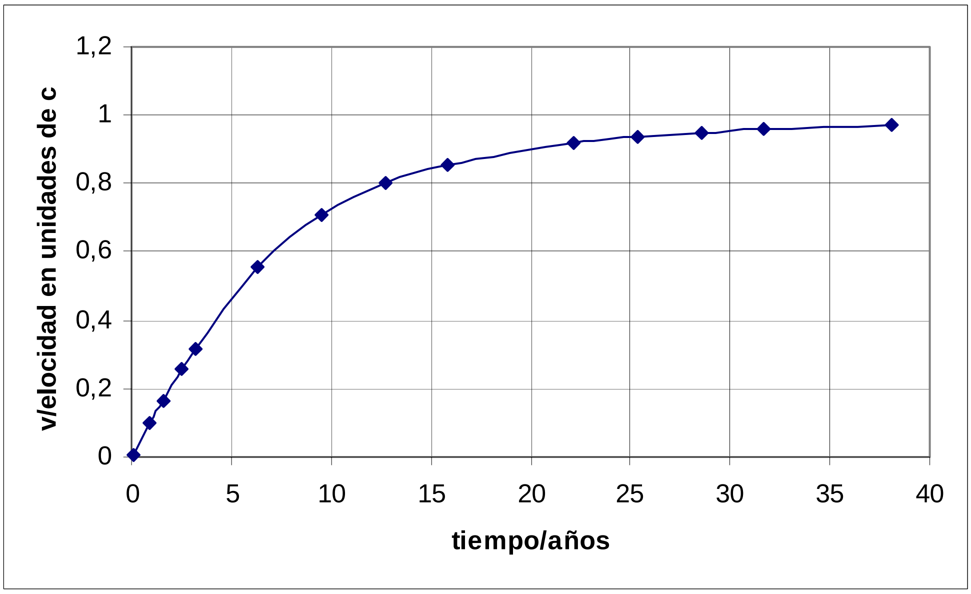
$$I = -\frac{c}{2}\int u^{-3} * a^{-2} * 2ua^2 \ du = -c\int u^{-2} du = \frac{c}{u} + Cte = \frac{c}{\sqrt{\frac{1-a}{a}}} + Cte = \frac{c\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + Cte$$

Volviendo a la ecuación (1)

$$\frac{Ft}{m_o} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + Cte \quad \text{para } t = 0 \quad \Rightarrow Cte = 0 \quad \Rightarrow \frac{F^2 t^2}{m_o^2} = \frac{v^2 c^2}{c^2 - v^2} \quad \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{m_o^2}{F^2 t^2} + \frac{1}{c^2}$$

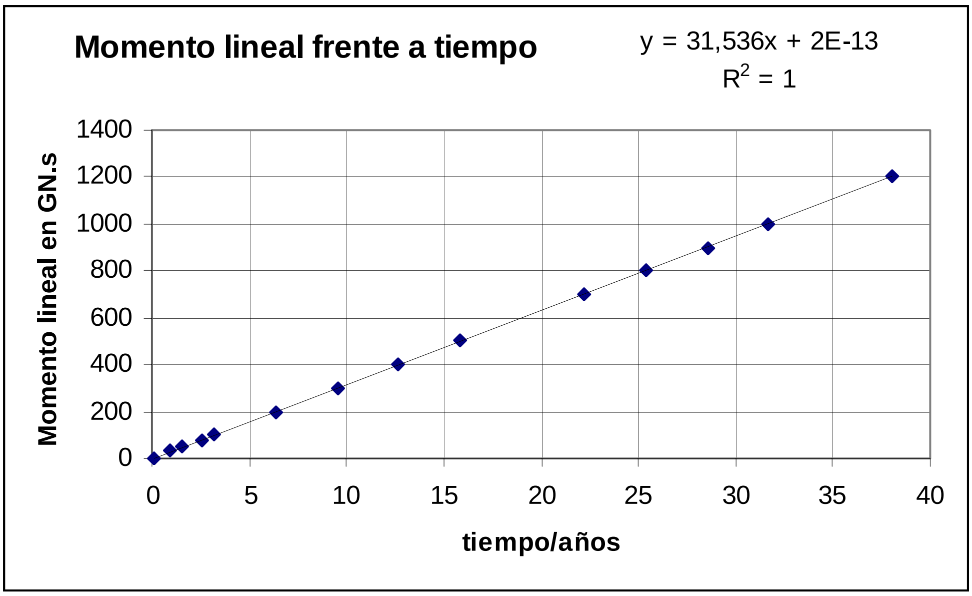
$$\frac{1}{v^2}=\frac{m_o^2c^2+F^2t^2}{F^2t^2c^2} \quad\Rightarrow\quad v=\frac{Ftc}{\sqrt{F^2t^2+m_o^2c^2}} \quad\Rightarrow\quad v=\frac{3.10^8\,t}{\sqrt{t^2+9.10^{16}}}$$

En la última ecuación se le dan valores a t en segundos y se obtiene v en m/s, luego los segundos se pasan a años y la velocidad en función de c y se obtiene la siguiente gráfica

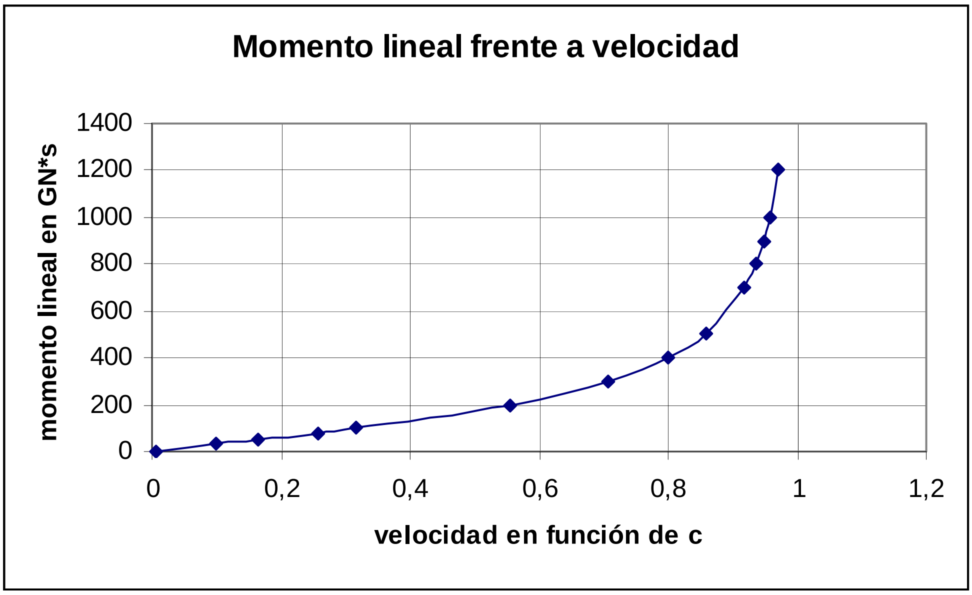


Pase el tiempo que pase la velocidad se acerca a la de la luz sin alcanzarla.

El momento lineal vale $p=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}m_ov$ en nuestro caso la masa es 1 kg. Se han dado valores a la ecuación anterior y el momento lineal se ha expresado en giganewton* segundo



Si representamos el momento lineal frente a la velocidad de la masa de un kilo se obtiene la siguiente gráfica



32.- El mesón π de forma espontánea se desintegra en un mesón μ y en un neutrino. Calcular la Q (energía de desintegración) del proceso y la energía cinética que llevan el mesón μ en el sistema de referencia de desintegración del mesón π.
Datos: Masa del mesón m = 2,48.10^{-28} kg, masa del mesón m = 1,89.10^{-28} kg , masa del neutrino = 0

El proceso es la reacción

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu$$

La ley de la conservación de la energía para el proceso es:

$$E\pi = E\mu + E\nu$$

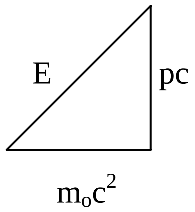
La energía total es la suma de la energía en reposo y la cinética. El mesón π en su sistema de referencia tiene energía cinética nula

$$m_\pi c^2 = m_\mu c^2 + E_{c\mu} + E_{c\nu}$$

El factor Q es la suma de las energías cinéticas de las partículas que se forman

$$Q = \left(m_\pi - m_\mu\right) c^2 = \left(2{,}49.10^{-28} - 1{,}89.10^{-28}\right) * \left(3.10^8\right)^2 = 5{,}4.10^{-12}\ \text{J}$$

En el sistema de referencia del mesón π, resulta que la cinética de este mesón es cero. Para el neutrino al que se le atribuye masa cero la energía total se recuerda mediante el triángulo siguiente



$$E^2 = \left(m_o c^2\right)^2 + p^2 c^2$$

$$m_{o\pi} c^2 = \sqrt{\left(m_{o\nu} c^2\right)^2 + p_\mu^2 c^2} + p_\nu c \qquad (1)$$

La conservación de la cantidad de movimiento exige que los módulos de las partículas formadas sean iguales y dichas partículas deben salir en la misma dirección y en sentido contrario. Sustituyendo en la relación (1)

$$m_{o\pi} c^2 = \sqrt{\left(m_{o\nu} c^2\right)^2 + p_\mu^2 c^2} + p_\mu c \Rightarrow \left(m_{o\pi} c^2\right)^2 + p_\mu^2 c^2 - 2\left(m_{o\pi} c^2\right) * p_\mu c = \left(m_{o\nu} c^2\right)^2 + p_\mu^2 c^2$$

$$\Rightarrow p_\mu = \frac{\left(m_{o\pi} c^2\right)^2 - \left(m_{o\nu} c^2\right)^2}{2\left(m_{o\pi} c^2\right)c} \qquad \Rightarrow p_\mu = \frac{c}{2 m_{o\pi}}\left(m_{o\pi}^2 - m_{o\mu}^2\right) = 1{,}583.10^{-20}\ \frac{\text{kg} * \text{m}}{\text{s}}$$

La energía asociada al neutrino vale:

$$E_{C,\nu} = p_\nu c = 1{,}583.10^{-20} * 3.10^8 = 4{,}749.10^{-12}\ \text{J}$$

A partir del factor Q deducimos que

$$E_{C,\pi} = Q - 4{,}749.10^{-12} = 5{,}4.10^{-12} - 4{,}749.10^{-12} = 6{,}51.10^{-13}\ \text{J}$$

33.- Un kaón en movimiento se descompone en dos mesones π. En el sistema de referencia elegido, uno de los mesones se encuentra en reposo. Calcular la energía relativista total del kaón y del mesón en movimiento. Datos masa del kaón = 8,84.10^{-28} kg, masa del mesón π = 2,48.10^{-28} kg.

La conservación de la energía nos dice que la del kaón es igual a la suma del mesón π en movimiento y el otro mesón en reposo

$$\sqrt{\left(m_K c^2\right)^2 + p_K^2 c^2} = \sqrt{\left(m_\pi c^2\right)^2 + p_\pi^2 c^2} + m_\pi c^2$$

La conservación de la cantidad de movimiento nos indica que $p_K = p_\pi$

De la primera ecuación resulta:

$$\left(m_K c^2\right)^2 + p_K^2 c^2 = \left(m_\pi c^2\right)^2 + p_\pi^2 c^2 + \left(m_\pi c^2\right)^2 + 2m_\pi c^2 \sqrt{\left(m_\pi c^2\right)^2 + p_\pi^2 c^2}$$

teniendo en cuenta que $p_K = p_\pi$

$$c^4\left(m_K^2 - 2m_\pi^2\right) = 2m_\pi c^2 \sqrt{\left(m_\pi c^2\right)^2 + p_\pi^2 c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{c^4\left(m_K^2 - 2m_\pi^2\right)^2}{4m_\pi^2} = \left(m_\pi c^2\right)^2 + p_\pi^2 c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{c^2\left(m_K^2 - 2m_\pi^2\right)^2 - 4m_\pi^4 c^2}{4m_\pi^2}} = p_\pi = \frac{c}{2m_\pi}\sqrt{\left(m_K^2 - 2m_\pi^2\right) - 4m_\pi^4} \quad \Rightarrow$$

$$p_\pi = \frac{3.10^8}{2 * 2{,}48.10^{-28}} \sqrt{\left[\left(8{,}84.10^{-28}\right)^2 - 2 * \left(2{,}48.10^{-28}\right)^2\right]^2 - 4 * \left(2{,}48.10^{-28}\right)^4} = 3{,}91.10^{-19}\ \frac{kg * m}{s}$$

$$E_K = \sqrt{\left(m_K c^2\right)^2 + p_K^2 c^2} = \sqrt{\left(8{,}84.10^{-28} * 9.10^{16}\right)^2 + \left(3{,}91.10^{-19}\right)^2 9.10^{16}} = 1{,}42.10^{-10}\ \text{J}$$

$$E_\pi = \sqrt{\left(m_\pi c^2\right)^2 + p_\mu^2 c^2} = \sqrt{\left(2{,}48.10^{-28} * 9.10^{16}\right)^2 + \left(3{,}91.10^{-19}\right)^2 9.10^{16}} = 1{,}19.10^{-10}\ \text{J}$$

34.- Un protón con velocidad v = 0,8c paralela al eje X penetra en un campo eléctrico uniforme E = 10³ V/m, dirigido en la dirección del eje Y. Calcular cómo varían las componentes X e Y de la velocidad del protón dentro del campo eléctrico.
Datos. Masa del protón 1,67.10⁻²⁷ kg , carga del protón = 1,6.10⁻¹⁹ C

El momento lineal inicial del protón al penetrar en el campo eléctrico vale

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0,8c}{c}\right)^2}} m_o v_x = \frac{1}{\sqrt{1-0,64}} * 1.67.10^{-27} * 0,8 * 3.10^8 = 6,68.10^{-19} \ \frac{kg*m}{s}$$

Aplicamos las expresiones $F_x = \frac{dp_x}{dt} = 0 \quad ; \quad F_Y = \frac{dp_y}{dt} = Eq$

De la primera se deduce que el momento lineal sobre el eje X es constante y vale

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m_o v_x \quad (1)$$

De la segunda se deduce

$$p_y = Eqt = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m_o v_y \quad (2)$$

siendo $v^2 = v_x^2 + v_y^2$

A partir de (1) y (2) $\frac{p_i}{Eqt} = \frac{v_x}{v_y} \quad \Rightarrow \quad v_y = v_x \frac{Eqt}{p_i} \quad (3)$

En la ecuación (1)

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}-\frac{v_y^2}{c^2}}} m_o v_x = \frac{m_o v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}-\frac{v_x^2 E^2 q^2 t^2}{c^2 p_i^2}}} \quad \Rightarrow \quad p_i^2 = \frac{m_o^2 v_x^2}{1-\frac{v_x^2}{c^2}-\frac{v_x^2 E^2 q^2 t^2}{c^2 p_i^2}}$$

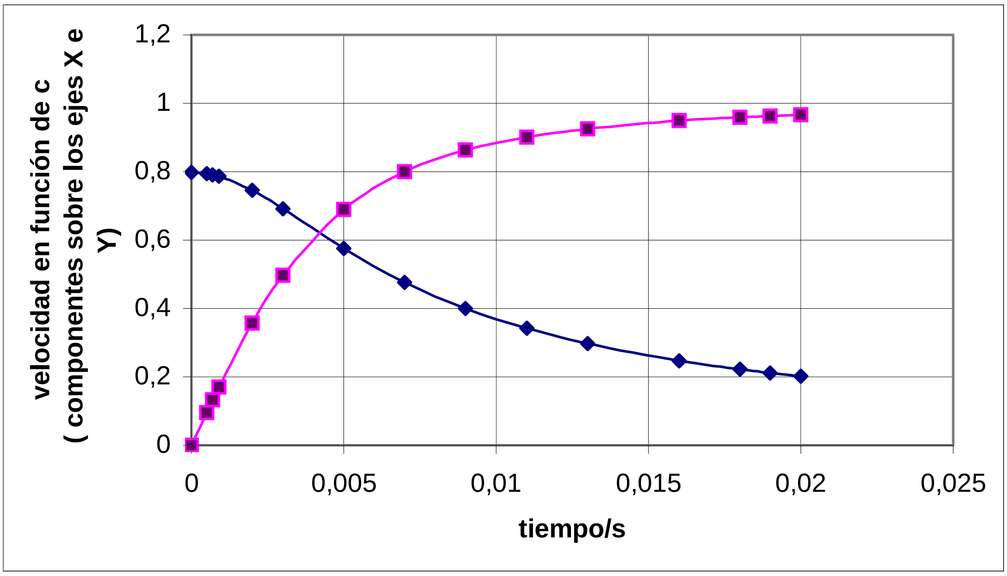
$$\frac{1}{v_x^2}-\frac{1}{c^2}-\frac{E^2q^2t^2}{c^2p_i^2}=\frac{m_o^2}{p_i^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v_x^2}=\frac{m_o^2c^2+q^2E^2t^2+p_i^2}{c^2p_i^2} \quad \Rightarrow$$

$$v_x=\frac{p_i c}{\sqrt{m_o^2c^2+q^2E^2t^2+p_i^2}}=\frac{6{,}68.10^{-19}*3.10^8}{\sqrt{\left(1{,}67.10^{-27}*3.10^8\right)^2+\left(1{,}6.10^{-19}*10^3\right)^2*t^2+\left(6{,}68.10^{-19}\right)^2}}$$

$$v_x=\frac{2.10^8}{\sqrt{0{,}697+2{,}56.10^4*t^2}}$$

$$v_y=\frac{Eq}{p_i}v_x t=\frac{10^3*1{,}6.10^{-19}}{6{,}68.10^{-19}}v_x t=239{,}5*v_x*t$$

Dando valores a t en las anteriores ecuaciones se obtiene la representación gráfica de las componentes de las velocidades frente al tiempo.



La componente v_y crece con el tiempo mientras que v_x disminuye. Este último resultado es diferente si se emplea la mecánica newtoniana en la que esta componente de la velocidad resulta constante.

Para calcular el ángulo que forman las componentes de la velocidad con el eje de abscisas a medida que transcurre el tiempo, utilizamos la relación (3).

$$\frac{v_y}{v_x}=\text{tag } \alpha=\frac{Eq}{p_i}*t=\frac{10^3*1{,}6.10^{-19}}{6{,}68.10^{-19}}*t=239{,}5*t$$

Dando valores a t se obtiene la tangente del ángulo y de ese valor el ángulo. La representación del ángulo frente al tiempo es la gráfica siguiente: