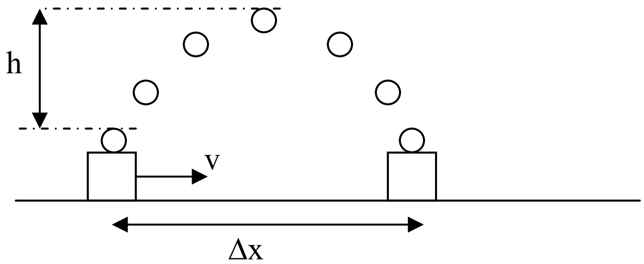
PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE FISICA EN SUIZA 3

15.-Un carrito para demostraciones de mecánica puede lanzar verticalmente hacia arriba una bola y luego recogerla. Con este dispositivo se demuestra que la bola retorna al carrito incluso si éste se desplaza con velocidad constante v sobre un rail horizontal sin rozamiento.

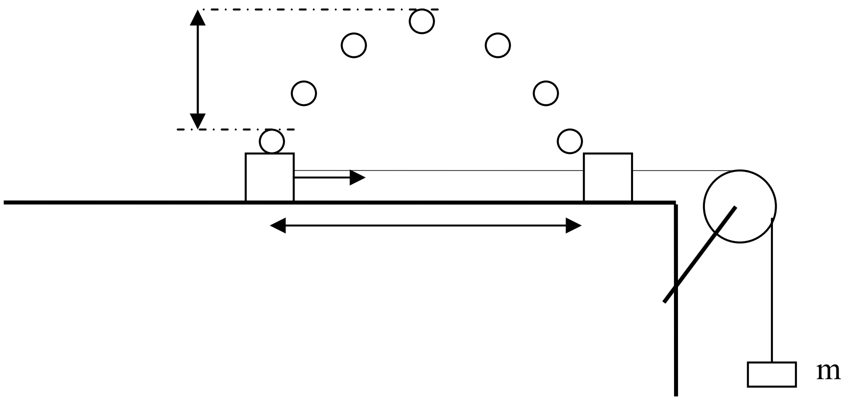
La masa del carrito es 1300 g y su longitud 10 cm, la masa de la bola es 10 g y su diámetro 2 cm. La bola se lanza desde el centro del carrito.

En un experimento el carrito recorre una distancia $\Delta x = 0,40$ m y la bola alcanza una altura máxima de h=0,50 m.

a) Calcular la velocidad de salida vertical v_h de la bola con respecto al carrito y la velocidad de éste, v.



En otro experimento se demuestra que la bola puede caer fuera del carrito si éste está acelerado durante el tiempo que la bola permanece en el aire. La aceleración del carrito se consigue mediante una masa m atada al carrito y colocada como indica la figura inferior. Se admite que no existe rozamiento y las masas de la polea y de la cuerda son despreciables

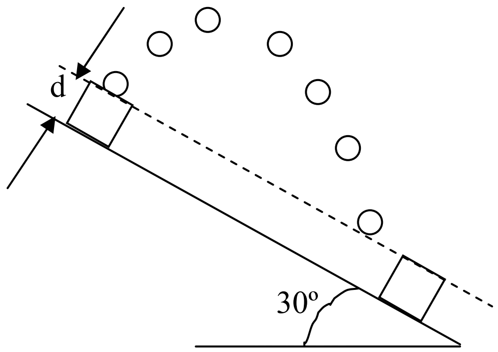


Las velocidades de salida vertical de la bola y del carrito son las mismas que en el apartado anterior

b) Calcular el valor mínimo de la masa m que determina que la bola no llegue a tocar la parte superior del carrito.

En otro experimento, al rail se le da una inclinación de 30º con respecto a la horizontal y el carrito se deja rodar libremente a partir del reposo. Justamente en el momento en que parte el carrito, se lanza la bola hacia arriba en dirección perpendicular al rail y con un valor de la velocidad igual al de la cuestión a). En ese instante la bola se encuentra a una altura d respecto del rail.

b) Calcular las posiciones de la bola y del carrito cuando la bola esté de nuevo a una altura d sobre el rail.



Olimpiada de Suiza 1999

a) Consideramos un sistema de referencia ligado al suelo, el eje X paralelo al suelo y el eje Y perpendicular al anterior. Respecto de este sistema, en el instante inicial de salida de la bola, su velocidad horizontal es v y su velocidad vertical v_h.
Las ecuaciones de movimiento son:

$$x = vt \quad ; \quad y = v_h t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \quad ; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_h - gt$$

Cuando la bola alcance la altura máxima h , v_y =0, por tanto:

$$0 = v_h - gt_h \quad \Rightarrow \quad t_h = \frac{v_h}{g}$$

$$y = h = v_h \frac{v_h}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_h^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_h^2}{g} \quad (1)$$

Cuando la bola vuelva a ocupar la misma posición vertical que a la salida, entonces su abscisa es Δx y su ordenada cero. Designando por t_m al tiempo

$$0 = v_h t_m - \frac{1}{2}gt_m^2 \quad \Rightarrow \quad t_m = 0 \;\; y \;\; t_m = \frac{2v_h}{g} = 2t_h \Rightarrow \quad \Delta x = vt_m = v\frac{2v_h}{g} \; (2)$$

De la ecuación (1)

$$v_h = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}50} = 3{,}13 \ \frac{m}{s}$$

De la ecuación (2)

$$v = \frac{\Delta x \cdot g}{2v} = \frac{0{,}40 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 3{,}13} = 0{,}63 \ \frac{m}{s}$$

b) puesto que la bola tiene las mismas velocidades que en el apartado a) su altura máxima h y su alcance horizontal Δx son los mismos. Para que la bola pase “rozando” la parte superior del carrito es preciso que este se desplace una distancia Δx más la mitad de la longitud del carrito más el radio de la bola, esto es,

$$\Delta x' = \Delta x + 0{,}05 + 0{,}001 \text{ m} = 0{,}46 \text{ m}.$$

La ecuación del desplazamiento del carrito sobre el rail es:

$$\Delta x' = vt + \frac{1}{2}at^2 \quad (3)$$

El tiempo de duración del movimiento del carrito es el mismo que el de la bola en el aire y se calculó en el apartado anterior, $t_m = \frac{2v_h}{g}$.

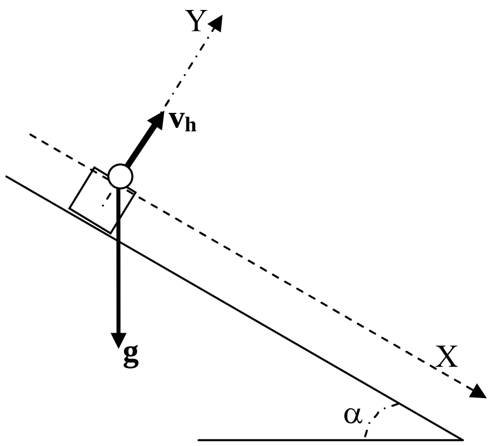
La aceleración del carrito es provocada por la masa m que debe arrastrar a la masa M del carrito , $mg = (m+M)a \Rightarrow a = \frac{m}{m+M}g$.

Sustituyendo valores en la ecuación (3), resulta:

$$0{,}46 = v \cdot \frac{2v_h}{g} + \frac{1}{2}\frac{m}{m+M}g \cdot \left(\frac{2v_h}{g}\right)^2 \Rightarrow \quad 0{,}46 = 0{,}63 \cdot \frac{2 \cdot 3{,}13}{9{,}81} + \frac{4}{2}\frac{m}{m+1{,}3} \cdot \frac{3{,}13^2}{9{,}81} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}058 = 1{,}997\frac{m}{m+1{,}3} \quad \Rightarrow \quad \frac{m+1{,}3}{m} = 34{,}4 \Rightarrow \quad \frac{1{,}3}{m} = 33{,}4 \quad \Rightarrow \quad m \approx 0{,}039 \text{ kg}$$

c) En la figura inferior se indica el sistema de referencia



Sobre ese sistema de referencia las componentes de la aceleración de la gravedad son:

Eje X : $g \operatorname{sen}\alpha$; Eje Y : $-g \cos \alpha$

Las ecuaciones de movimiento de la bola respecto al sistema son:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} g \ \text{sen}\alpha \ t^2 \\ y = v_h t - \frac{1}{2} g\cos\alpha \ t^2 \end{array}\right\}$$

Cuando la bola vuelva a alcanzar la altura d sobre el eje X su coordenada y es nula

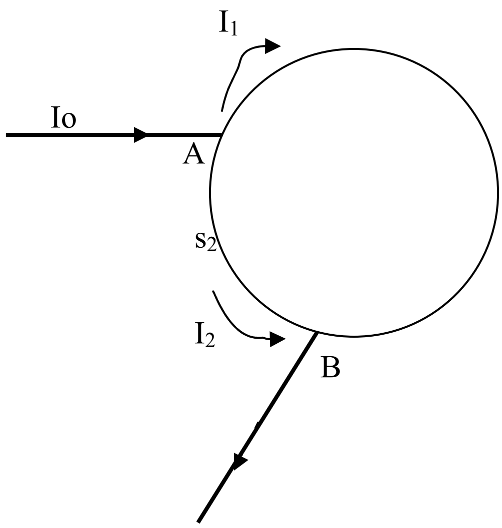
$$0 = v_h t_v - \frac{1}{2} g\cos\ \alpha\ t_v^2 \Rightarrow t_v = 0 \quad \text{y} \quad t_v = \frac{2v_h}{g\ \cos\alpha}$$

La coordenada x , vale cuando $t = t_v$

$$x = \frac{1}{2} g\ \text{sen}\alpha \cdot \frac{4v_h^2}{g^2\cos^2\alpha} = \frac{2 \cdot \text{sen}30^{\circ} \cdot 3{,}13^2}{9{,}81 \cdot \cos^2 30^{\circ}} = 1{,}33\ \ \text{m}$$

El carrito parte del reposo con velocidad nula y está sometido igualmente a la aceleración g sen α , por tanto su coordenada sobre el eje X es la misma anterior; en definitiva la bola vuelve al carrito aun cuando éste se haya desplazado con aceleración.

16.-Un bucle en forma de circunferencia se ha hecho con un hilo de constantan (resistividad 4,9.10^{-7} Ωm). La resistencia eléctrica del bucle es 50 mΩ y su longitud L =80 cm. Una corriente eléctrica de intensidad I_o penetra en el bucle por A(punto fijo) y lo abandona por B(punto móvil) (ver figura)



El arco AB de la parte inferior tiene una longitud s_2= xL, según el valor de x, s_2 puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y L.
a) Calcular el espesor del hilo. b) Expresar el cociente I_2/I_1 en función de x . c) Encontrar el valor de la diferencia de potencial V_{AB} en función de x, R e I_o d) Calcular el valor de x para que el arco s_2 reciba la máxima potencia. Olimpiada de Suiza 1999

a) La resistencia de un hilo

$$R = \rho\frac{L}{S} = \rho\frac{L}{\pi r^2} \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{\rho L}{\pi R}} \Rightarrow \quad e = 2r = 2\sqrt{\frac{\rho L}{\pi R}} = 2\sqrt{\frac{4{,}9.10^{-7}\cdot 0{,}80}{\pi 50.10^{-3}}} = 3{,}2.10^{-3}\,\mathrm{m}$$

b) La longitud de hilo por la parte superior es: $L - s_2 = L - xL = L(1-x)$

La intensidad que llega I_o se bifurca en I_1 e I_2. La diferencia de potencial es la misma por la parte superior del hilo que por el arco s_2. La resistencia por unidad de longitud del hilo es R/L

$$V_A - V_B = I_1 L(1-x)\frac{R}{L} = I_2 xL\frac{R}{L} \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = I_1 R(1-x) = I_2 Rx \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{x}{1-x}$$

c)

$$I_o = I_1 + I_2 = \frac{V_A - V_B}{R(1-x)} + \frac{V_A - V_B}{Rx} \Rightarrow I_o R = \frac{(V_A - V_B)\ (x + 1 - x)}{x(1-x)} \Rightarrow$$

$$V_A - V_B = I_o Rx(1-x)$$

d)

$$P = I_2 \cdot (V_A - V_B) = \frac{V_A - V_B}{Rx}\cdot (V_A - V_B) = \frac{I_o^2 R^2 x^2 (1-x)^2}{Rx} = I_o^2 R\left(x^3 - 2x^2 + x\right)$$

Derivamos la función anterior respecto de la variable x e igualamos a cero.

$$\frac{dP}{dx} = I_o^2 R\left(3x^2 - 4x + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado conduce a x = 1 y x=1/3. Para saber cuál de las dos soluciones corresponde a l máxima valor de P, derivamos por segunda vez

$$\frac{dP^2}{dx^2} = I_0^2 R(6x - 4)$$

La derivada segunda es negativa para x=1/3

$$P = I_o^2 R\left(x^3 - 2x^2 + x\right) = I_o^2 \cdot 50.10^{-3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\right] = 7{,}4.10^{-3}\, I_o^2$$

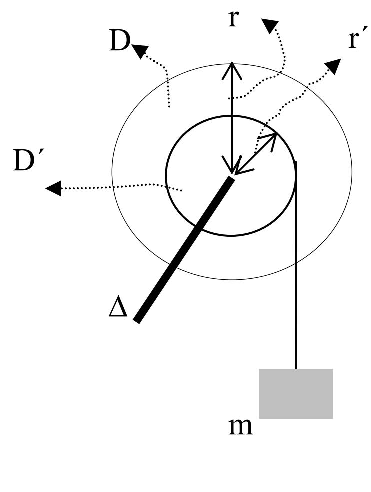
17.-Un sistema S está formado por dos discos homogéneos D y D´ del mismo material, coaxiales y solidarios el uno con el otro. El sistema S puede girar alrededor de un eje Δ perpendicular a los discos y que pasa por sus centros. Sobre el disco D´ se enrosca un hilo de masa despreciable y en su extremo libre una masa m(ver figura). El disco D tiene una masa m y un radio r , el D´ tiene un radio r´ =r/2

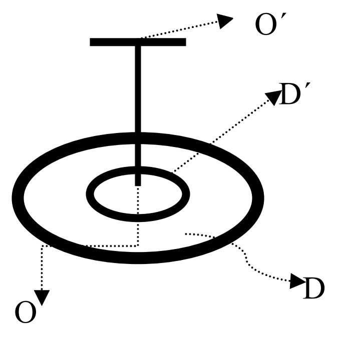
a) Demostrar que el momento de inercia del sistema respecto del eje Δ está dado por la expresión $I_{\Delta} = \frac{17}{32} mr^2$

b) Calcular el valor de I_{Δ} ***si m=200 g y r =10 cm.***

c) Si el sistema S se deja en libertad partiendo la masa A desde el reposo y admitiendo que dicha masa se desplaza verticalmente calcular la energía cinética del sistema S en función de la distancia d recorrida por A desde el punto de partida, y la aceleración angular de los discos.

A partir del sistema S se construye un péndulo de torsión cuyo eje OO´ se confunde con el eje de revolución S(ver figura) . Sabiendo que el periodo del péndulo es 6,5 s y la amplitud máxima de las oscilaciones θm = 1,3 rad, calcular
d) la constante de torsión del hilo. e) La velocidad angular del péndulo cuando pase por su posición de equilibrio f) La energía cinética máxima del sistema. Olimpiada de Suiza 1999





a)

a) El momento de inercia del sistema S vale $I_{\Delta} = \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{2} m'r'^2$, siendo m´ la masa del disco D´.

Teniendo en cuenta que los discos son del mismo material, esto es, tienen la misma densidad y el mismo espesor h, podemos escribir:

$$m = V_D \cdot \rho = \pi r^2 h \cdot \rho; m' = V_{D'} \cdot \rho = \pi r'^2 h \cdot \rho \Rightarrow \frac{m}{m'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{r^2}{\frac{r^2}{4}} = 4 \quad \Rightarrow m' = \frac{1}{4} m$$

$$I_{\Delta} = \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{2} m'r'^2 = \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{4} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{32} mr^2 = \frac{17}{32} mr^2$$

b)

$$I_\Delta = \frac{17}{32} \cdot 0{,}200 \cdot \left(10.10^{-2}\right)^2 = 1{,}06.10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

c) Las ecuaciones del movimiento, llamando T a la tensión de la cuerda son:

$$\left.\begin{array}{l} mg - T = ma \\ T \cdot r' = I_\Delta \alpha \\ a = \alpha\ r' = \alpha \dfrac{r}{2} \end{array}\right\}$$

Despejando T de la segunda ecuación y utilizando la tercera se llega a:

$$g - \frac{17}{16}\alpha\ r = a \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad a = \frac{8g}{25}$$

Las ecuaciones del movimiento de la masa A son las siguientes:

$$d = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2} \cdot \frac{8g}{25}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{25}{4g}d} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{d}{g}}$$

$$v = at = \frac{8g}{25} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{\frac{d}{g}} = \frac{4}{5}\sqrt{dg}$$

La energía cinética del sistema S es su energía cinética de rotación

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{32}mr^2\frac{v^2}{r'^2} = \frac{17}{64}mr^2\frac{\frac{16}{25}gd}{\frac{r^2}{4}} = \frac{17}{25}mgd$$

La aceleración angular es igual a la lineal de A dividida por r´.

$$\alpha = \frac{a}{r'} = \frac{\frac{8g}{25}}{\frac{r}{2}} = \frac{16}{25}\frac{g}{r} = \frac{16}{25}\frac{9{,}8}{0{,}10} = 62{,}7\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

d) El periodo de un péndulo de torsión es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4\pi^2 I_\Delta}{T} = \frac{4\pi^2 1{,}06.10^{-3}}{6{,}5^2} = 9{,}9.10^{-4}\ \mathrm{Nm}$$

e),f)

La energía potencial almacenada en el hilo de torsión cuando se alcanza el valor máximo de θ se convierte íntegramente en energía cinética al pasar por la posición de equilibrio, siendo , por tanto, en esta posición donde la energía cinética adquiere el máximo valor

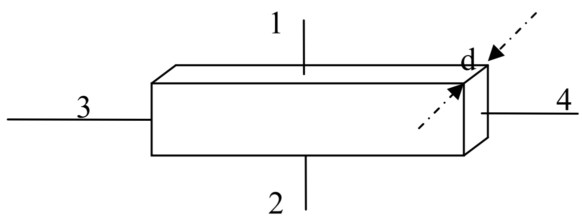
$$E_P = \frac{1}{2}k\theta_m^2 = \frac{1}{2}9{,}9.10^{-4} \cdot 1{,}3^2 = 8{,}4.10^{-4}\,\mathrm{J} = \frac{1}{2}I_\Delta\ \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}4.10^{-4}}{1{,}06.10^{-3}}} = 1{,}26\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

18.-La sonda Hall se emplea para medir campos magnéticos. El valor del campo magnético se deduce a partir de la tensión de Hall U_H.

Considerar una sonda formada por un paralelepípedo rectangular de plata de espesor d. Sobre ella se hace pasar una corriente de intensidad I en el sentido de la conexión (3) a la (4)

a) Explicar en qué condiciones aparece una tensión U_H entre las conexiones 1 y 2. Indicar el signo de la tensión sabiendo que son electrones libres los que pueden circular por la sonda.

b) Si la placa tiene un espesor d = 12 μm. $R_H = \frac{1}{Nq}$ es el llamado coeficiente Hall y es característica del material con que esté hecha la placa, N designa al número de portadores por m^3 y q es la carga elemental. Para la plata $R_H = 8{,}9.10^{-11}$ m^3/C. Para un cierto campo magnético, cuando la intensidad de la corriente en la sonda es I=10 A, se mide una tensión de Hall , $U_H = 1{,}7.10^{-5}$ V. Calcular la intensidad B del campo magnético.



Para una sonda de Hall del semiconductor germanio con un espesor d= 1mm se han realizado las siguientes medidas.

Para B=10 mT

I/mA	*10*	*15*	*20*	*25*
U_H/mV	*1,4*	*2,1*	*2,9*	*3,7*

Para B=20 mT

I/mA	*10*	*15*	*20*	*25*
U_H/mV	*2,8*	*4,3*	*5,7*	*7,3*

Para B=30 mT

I/mA	*10*	*20*	*30*	*40*
U_H/mV	*4,4*	*8,8*	*13,1*	*17,5*

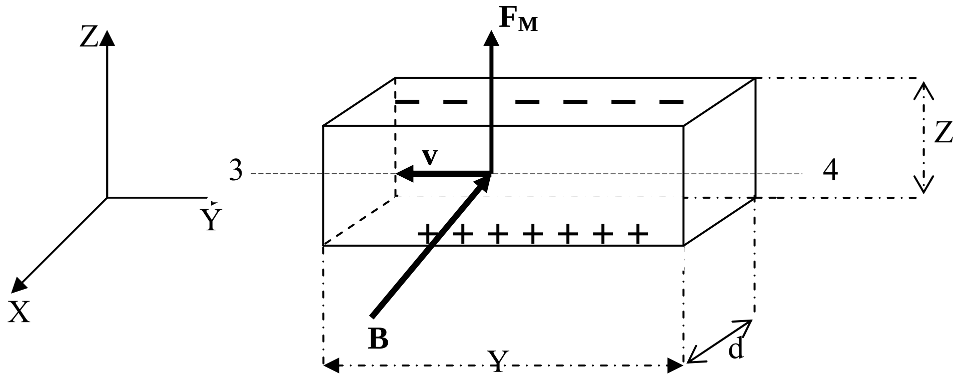
c)¿Qué relaciones entre la tensión de Hall U_H, la corriente de sonda I y la intensidad del campo B se pueden deducir?

d) Se puede demostrar con ayuda de otro experimento que la tensión de Hall U_H , para una corriente I dada y un campo B dado, es inversamente proporcional al

espesor d de la sonda ¿Qué constante de proporcionalidad (constante de Hall R_H) se obtiene de tales medidas si se admite que para el germanio $R_H=\frac{1}{Nq}$?

e) Determinar la relación de densidades de los portadores de carga entre la plata y el germanio. Olimpiada de Suiza 1999

a) Supongamos que las dimensiones del paralelepípedo son: Y ,Z, d tal como se indica en la figura 1. El campo magnético perpendicular a la sonda es $\vec{B} = -B\ \vec{i}$



Como la intensidad se dirige de 3 a 4 los portadores de carga que son electrones viajan en sentido contrario e interaccionan con el campo magnético dando como resultado una fuerza

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\vec{k}$$

dado que q es negativa cuando los portadores son electrones, la fuerza es vertical y dirigida hacia arriba. A consecuencia de este efecto en la parte superior se acumulan los electrones y en la inferior se produce un deficit de ellos, por tanto, se establece un campo eléctrico vertical $\vec{E}_Z = E_z\vec{k}$.Este campo eléctrico actúa sobre los electrones produciendo una fuerza $\vec{F}_E = -qE_Z\vec{k}$. Llegará un momento en que se produzca un estado estacionario de modo que los electrones estén sometidos a dos fuerzas iguales en módulo, de la misma dirección y sentido contrario, en tal caso

$$|F_M| = |F_E| = qvB = qE_Z \Rightarrow E_Z = vB\ (1)$$

Designamos con N al número de portadores por unidad de volumen que existen en la placa y recordamos que la intensidad de corriente es la carga que atraviesa una superficie normal por unidad de tiempo. La intensidad que atraviesa la cara de la placa cuyas dimensiones son Zd, es la carga contenida en un volumen de parelelepípedo de dimensiones Zd vΔt y cuya carga es: $NZd\ v\ \Delta t \cdot q$

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{NZd\ v\ \Delta t \cdot q}{\Delta t} = NZdv \cdot q \quad \Rightarrow \quad v = \frac{I}{q \cdot NZd}$$

Llevando esta expresión a (1) y teniendo en cuenta que $U_H = E_Z \cdot Z$,

$$E_Z = \frac{1}{qN}\frac{IB}{Zd} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_H}{Z} = \frac{1}{qN}\frac{IB}{Zd} \quad \Rightarrow \quad U_H = \frac{1}{qN}\frac{IB}{d}$$

El cociente $\frac{1}{qN}$ es característico del material y recibe el nombre de *coeficiente Hall.*

$$U_H = R_H \frac{IB}{d} \quad (2)$$

b) De la ecuación (2)

$$B = \frac{U_H d}{R_H I} = \frac{1{,}7.10^{-5} \cdot 12.10^{-6}}{8{,}9.10^{-11} \cdot 10} = 0{,}23 \ \text{T}$$

La ecuación (2) puede escribirse en la forma

$$U_H = \frac{R_H B}{d} I$$

Si se representa U_H frente a I cuando B y d son constantes, se obtiene un recta de pendiente $\frac{R_H B}{d}$, y si sabe el valor de B y d se puede calcular R_H.

En vez de hacer las representaciones gráficas hacemos para cada tabla el valor medio de la pendiente´

Para B=10 mT

I/mA	10	15	20	25
U_H/mV	1,4	2,1	2,9	3,7
U_H/I	0,14	0,14	0,15	0,15

Valor medio de $\frac{U_H}{I} = 0{,}15 = \frac{R_H \cdot 10.10^{-3}}{10^{-3}} \Rightarrow R_H = 0{,}015 \ \frac{m^3}{C}$

Para B=20 mT

I/mA	10	15	20	25
U_H/mV	2,8	4,3	5,7	7,3
U_H/I	0,28	0,29	0,29	0,29

Valor medio de $\frac{U_H}{I} = 0{,}29 = \frac{R_H \cdot 20.10^{-3}}{10^{-3}} \Rightarrow R_H = 0{,}015 \ \frac{m^3}{C}$

Para B=30 mT

I/mA	10	20	30	40
U_H/mV	4,4	8,8	13,1	17,5
U_H/I	0,44	0,44	0,44	0,44

Valor medio de $\frac{U_H}{I} = 0{,}44 = \frac{R_H \cdot 30.10^{-3}}{10^{-3}} \Rightarrow R_H = 0{,}015 \ \frac{m^3}{C}$

d)

$$\frac{R_H \text{plata}}{R_H \text{germanio}} = \frac{\frac{1}{N_{Ag} q}}{\frac{1}{N_{Ge} q}} = \frac{N_{Ge}}{N_{Ag}} \Rightarrow \frac{N_{Ag}}{N_{Ge}} = \frac{R_H \text{germanio}}{R_H \text{plata}} = \frac{0{,}015}{8{,}9.10^{-11}} = 1{,}7.10^{8}$$

19.-Según Niels Bohr se pueden deducir los niveles energéticos de un electrón girando alrededor de un núcleo con número atómico Z, a partir de las siguientes hipótesis:

1) El electrón describe un movimiento circular alrededor del núcleo

2) El perímetro del circulo es un múltiplo entero de la longitud de onda $\lambda = \frac{h}{p}$ de De Broglie , p es la cantidad de movimiento

3) La fuerza de Coulomb es la fuerza centrípeta

a) Comprobar que la energía del electrón de la enésima órbita está dada por la expresión $E_n = \frac{e^4 m Z^2}{8h^2\varepsilon_o^2}\frac{1}{n^2}$

b) En el átomo de hidrógeno la luz visible de distintas frecuencias se emite cuando el electrón pasa de una órbita con $n \geq 3$ a una órbita con n=2. Las líneas espectrales reciben el nombre de serie de Balmer. Se observa que alguna de esas frecuencias aparecen en el espectro del ión helio, He^{+}. Indicar para que transiciones del helio se obtienen las mismas rayas de las frecuencias más bajas de la serie Balmer. Olimpiadas de Suiza 1999.

a) Igualamos la fuerza de Coulomb a la fuerza centrípeta del electrón

$$\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Ze^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\ \varepsilon_o mr}$$

Hacemos uso de la hipótesis 2 enunciada en el problema

$$2\pi\ r = n\frac{h}{mv} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{nh}{2\pi\ mv}$$

Sustituyendo r en la velocidad

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\ \varepsilon_o m\frac{nh}{2\pi\ mv}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_o}$$

La energía del electrón en la órbita es la suma de la energía cinética de traslación más la energía potencial electrostática

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Ze^2}{r}\right) = \frac{1}{2}m\frac{Z^2e^4}{4n^2h^2\varepsilon_o^2} - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Ze^2}{\frac{nh}{2\pi\ mv}} = \frac{Z^2e^4m}{8n^2h^2\varepsilon_o^2} - \frac{Ze^2mv}{2\varepsilon_o\ nh} \Rightarrow$$

$$E = \frac{Z^2e^4m}{8n^2h^2\varepsilon_o^2} - \frac{Ze^2m\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_o}}{2\varepsilon_o\ nh} = -\frac{Z^2e^4m}{8n^2h^2\varepsilon_o^2}$$

b) Cuando el electrón perteneciente al átomo de hidrógeno, salta de la órbita 3 a la 2 la diferencia de energía aparece en forma de luz dando una raya del espectro

$$E_3 - E_2 = \Delta E = -\frac{Z^2e^4m}{8h^2\varepsilon_o^2}\frac{1}{9} - \left(-\frac{Z^2e^4m}{8h^2\varepsilon_o^2}\frac{1}{4}\right) = \frac{Z^2e^4m}{8h^2\varepsilon_o^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)$$

Si el electrón pertenece al ión helio

$$\Delta E = \frac{Z_{He}^2 e^4 m}{8h^2\varepsilon_o^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

Para obtener la mismas rayas en el helio que cuando el electrón del hidrógeno salta de la órbita 3 a la 2

$$\frac{Z^2e^4m}{8h^2\varepsilon_o^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = \frac{Z_{He}^2 e^4 m}{8h^2\varepsilon_o^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \Rightarrow Z^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = Z_{He}^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

Se deduce que identificando:

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{n^2} \Rightarrow n = 4 \qquad ; \qquad \frac{1}{9} = \frac{4}{m^2} \Rightarrow m = 6$$

Para las otras dos rayas cuyos saltos en el hidrógeno son de 4 a 2 y de 5 a 2

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{n^2} \Rightarrow n = 4 \qquad ; \qquad \frac{1}{16} = \frac{4}{m^2} \Rightarrow m = 8$$
$$\frac{1}{4} = \frac{4}{n^2} \Rightarrow n = 4 \qquad ; \qquad \frac{1}{25} = \frac{4}{m^2} \Rightarrow m = 10$$