PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE FISICA EN SUIZA 4

20.-Un balón elástico de forma esférica está lleno con un gas monoatómico y se encuentra en el interior de una campana de vacío. Al principio el balón posee un radio r y el gas encerrado en él, se encuentra a la presión p_1 , la presión en la campana es $p_o=8p_1/9$, esta presión en la campana es la presión exterior que soporta el balón.

El caucho del balón posee una tensión σ constante (σ = fuerza de tensión por unidad de longitud), relacionado por la ley de Laplace

$$p_{interior} - p_{exterior} = \frac{2\sigma}{r}$$

a) Se hace el vacío lentamente en la campana, manteniendo constante la temperatura del gas del balón. Deducir que el radio máximo del balón, r_1, no es superior a 3r.

b) ¿Cuál sería el radio máximo que adquiriría el balón si el gas se expandiese rápidamente, para este proceso pV^γ , siendo $\gamma = \frac{5}{3}$.

c) Comparar ambos valores y explicar la razón de la diferencia.

Olimpiada de Suiza 2000

a) Aplicamos la expresión de Laplace en las condiciones iniciales y cuando se ha hecho el vacío en la campana

$$p_1 - \frac{8p_1}{9} = \frac{2\sigma}{r} \quad ; \quad p_2 - 0 = \frac{2\sigma}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{9} = \frac{p_2 r_2}{r} \quad \Rightarrow \quad p_1 r = 9p_2 r_2 \ (1)$$

Si la transformación es isotérmica y reversible.

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = p_2 \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2 \frac{r_2^3}{r^3}$$

Combinando la ecuación anterior con (1)

$$p_2 \frac{r_2^3}{r^3} \cdot r = 9p_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2^2}{r^2} = 9 \quad \Rightarrow \quad r_2 = 3r$$

b) Si la transformación es adiabática

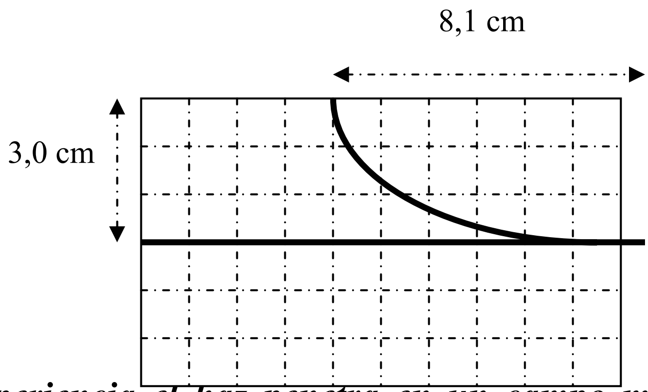
$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_1\left(\frac{4}{3}\pi\right)^\gamma \cdot r^{3\gamma} = p_2\left(\frac{4}{3}\pi\right)^\gamma \cdot R^{3\gamma} \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2 \frac{R^{3\gamma}}{r^{3\gamma}} = p_2 \frac{R^5}{r^5}$$

Llevando la última ecuación a (1)

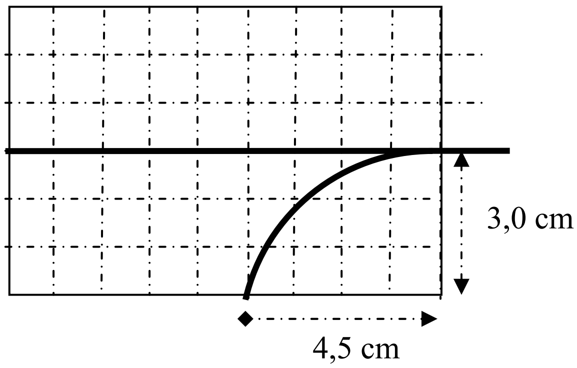
$$p_2 \frac{R^5}{r^5} \cdot r = 9p_2 R \quad \Rightarrow \quad R^4 = 9r^4 \Rightarrow \quad R = \sqrt{3}r$$

c) En la transformación adiabática no hay intercambio de calor con el exterior del balón, en la transformación isoterma es preciso comunicar calor al gas para mantener la temperatura constante, esa energía queda almacenada como energía potencial elástica en el aumento de superficie del balón.

21.-En un tubo de rayos catódicos se crea un haz fino de electrones los cuales se aceleran mediante una tensión ΔV_0 = 3000 V. El haz después de acelerado atraviesa o un campo eléctrico o uno magnético.
a) En una experiencia el haz atraviesa un campo eléctrico homogéneo En el diseño inferior los electrones penetran por la derecha y se desvían hacia lo alto por acción del campo eléctrico



b) En otra experiencia el haz penetra en un campo magnético perpendicular al papel y sufren la desviación mostrada en el siguiente diseño.



Determinar
a) La velocidad de los electrones al penetrar en el campo eléctrico o magnético (se desprecia la velocidad de los electrones antes de ser acelerados por ΔV_0).
b) El módulo del campo eléctrico responsable de la desviación de los electrones y expresar el sentido de dicho campo según el esquema anterior
c) El módulo del campo magnético y su sentido (entrando o saliendo del papel)
d) Si se aplican simultáneamente los campos anteriores, eléctrico y magnético, ¿cuál debería ser la tensión de aceleración de los electrones para que no sean desviados ni hacia arriba ni hacia abajo?
No se consideren efectos relativistas
Datos Masa de electrón=9,1.10^{-31} kg , carga del electrón q =-1,6.10^{-19} C
Olimpiadas de Suiza 2000

a) La energía cinética que adquieren los electrones es debida al trabajo eléctrico ejercido por el dispositivo que mantiene una diferencia de potencial de 3000 V

$$q\ \Delta V_O = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\Delta q_o}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1,6.10^{-19}\cdot 3000}{9,1.10^{-31}}} = 3,25.10^7\ \frac{m}{s}$$

b) El electrón recibe una fuerza por parte del campo, cuyo módulo es qE y su dirección la del campo eléctrico y su sentido contrario a él, ya que la carga del electrón es negativa $\vec{F} = -e\cdot\vec{E}$
En consecuencia, si el electrón penetra en el campo por la derecha con una velocidad inicial y está sometido a una fuerza vertical y hacia arriba, todo ello determina que describa una trayectoria parabólica como la de la figura.

$$F = m\,a \ \Rightarrow\ qE = m\,a \ \Rightarrow\ a = \frac{q\,E}{m}$$

$$x = vt$$

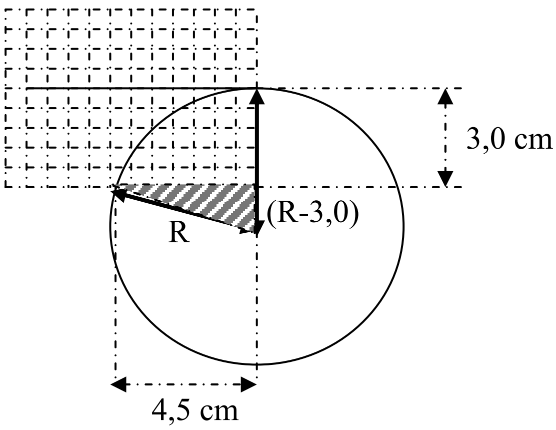
$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{x^2}{v^2} \quad \Rightarrow E = \frac{2ymv^2}{qx^2}$$

$$E = \frac{2ymv^2}{qx^2} = \frac{2\cdot 3.10^{-2}\cdot 9,1.10^{-31}\cdot\left(3,25.10^7\right)^2}{1,6.10^{-19}\cdot\left(8,1.1\theta^{-2}\right)^2} = 5,49.10^4\ \frac{N}{C}$$

c) Al penetrar en el campo magnético sobre el electrón actúa la fuerza $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, la cual determina que el electrón describa un arco de circunferencia en la región en que existe el campo magnético uniforme. Teniendo en cuenta que q es negativo , $\vec{F}$, es una fuerza contenida en el plano del papel y dirigida hacia abajo, y $\vec{B}$, es perpendicular al plano del papel y dirigida hacia fuera.
La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta al electrón que le permite describir el arco de circunferencia.

$$qvB = m\frac{v^2}{R} \ \Rightarrow\ B = \frac{mv}{qR}$$

Para calcular el módulo del campo magnético necesitamos saber R a partir de los datos suministrados



En la figura superior el rectángulo con la cuadrícula representa la región del campo magnético y los segmentos con doble flecha el radio de la circunferencia. En dicha figura se ha trazado un triángulo rectángulo del que se deduce:

$$R^2 = 4{,}5^2 + (R - 3{,}0)^2 \Rightarrow R^2 = 20{,}25 + R^2 + 9{,}0 - 6{,}0R \Rightarrow R = 4{,}88 \text{ cm}$$

$$B = \frac{mv}{qR} = \frac{9{,}1.10^{-31} \cdot 3{,}25.10^{7}}{1{,}6.10^{-19} \cdot 4{,}88.10^{-2}} = 3{,}79.10^{-3} \text{ T}$$

d) Si el electrón penetra en un campo eléctrico y magnético que actúan simultáneamente, para que el electrón no se desvíe la fuerza eléctrica y magnética deben actuar en la misma dirección y en sentido contrario y sus módulos deben ser iguales.

$$qvB = qE \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

Llevando esta relación a

$$q\ \Delta V_o = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \Delta V_o = \frac{mv^2}{2q} = \frac{mE^2}{2qB^2} = \frac{9{,}1.10^{-31} \cdot (5{,}49.10^4)^2}{2 \cdot 1{,}6.10^{-19} \cdot (3{,}79.10^{-3})^2} = 597 \text{ V}$$

22.-Se construye un oscilador suspendiendo una masa m=0,20 kg del extremo de un resorte vertical que se alarga 30 cm.
Se eleva la masa una distancia y_o= 20 cm por encima de su posición de equilibrio y se la deja en libertad sin velocidad inicial.
a) Calcular el periodo T_o de este oscilador
b) Se aproxima por la parte inferior una placa dura y horizontal hasta una distancia b de la posición de equilibrio. Durante el movimiento de oscilación, la masa choca contra esta placa y rebota de forma elástica. Hacer un boceto de la posición y en el tiempo durante una oscilación y calcular el nuevo periodo de oscilación T en función de b(y_o>b>0)
Olimpiada de Suiza 2000

a) Calculamos la constante elástica del resorte:

$$mg = k\ \Delta x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}8}{30.10^{-2}} = 6{,}53 \frac{N}{m}$$

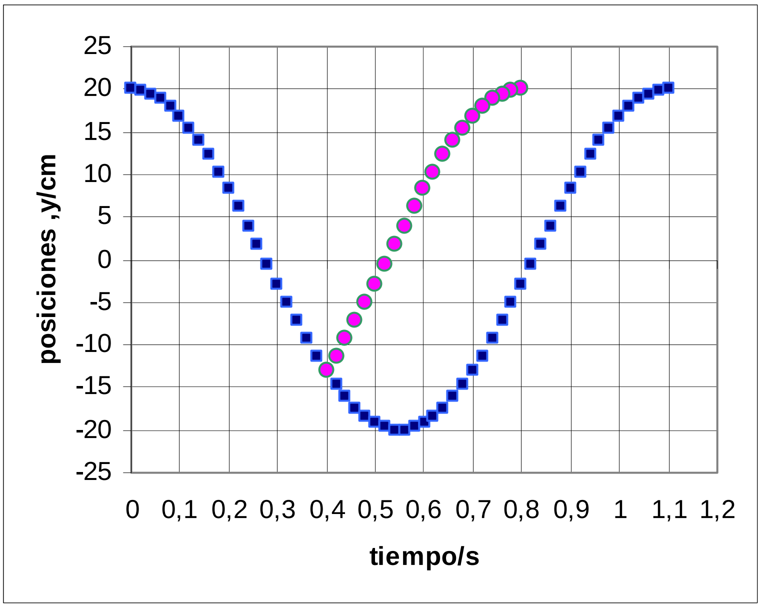
El periodo es:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}20}{6{,}53}} = 1{,}10 \text{ s}$$

b) Si empezamos a contar el tiempo cuando la masa dista de la posición de equilibrio la amplitud y_o, la ecuación del movimiento está descrita por la ecuación

$$y = y_o \cos\left(\frac{2\pi}{1{,}10} \cdot t\right) = 20\cos\left(\frac{2\pi}{1{,}10} \cdot t\right)$$

En la gráfica inferior se ha dibujado el movimiento como si no hubiese placa y da lugar a un periodo de 1,10 s, pero como la masa encuentra la placa a 0,4 s rebota y sus posiciones están indicadas en la figura y el periodo se acorta a 0,8 segundos.



c)

Para calcular el nuevo periodo hacemos uso de que un movimiento circular y uniforme proyectado sobre un diámetro da lugar a un movimiento vibratorio armónico.

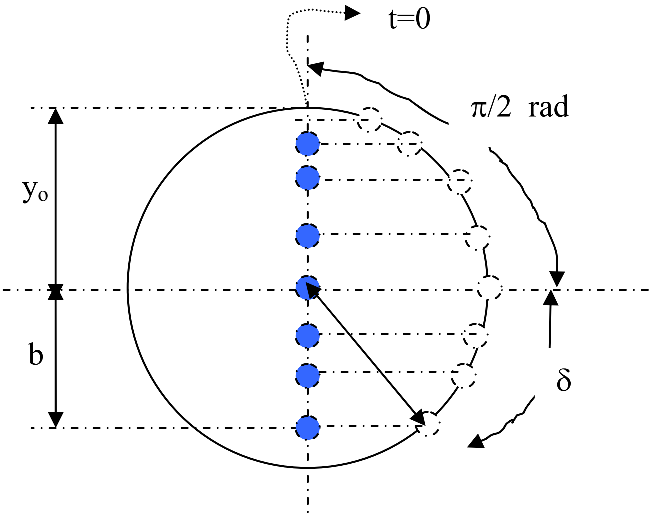


Fig.1

En la figura 1 el móvil (círculos discontinuos) se desplaza con velocidad angular constante y su proyección (círculos sombreados) describe un movimiento vibratorio armónico hasta chocar con la placa que dista una distancia b de la posición de equilibrio. Si T_o es el periodo podemos escribir que en un periodo el ángulo descrito es 2π radianes y si designamos con τ al tiempo hasta llegar a b, el ángulo vale $\pi/2 + \delta$

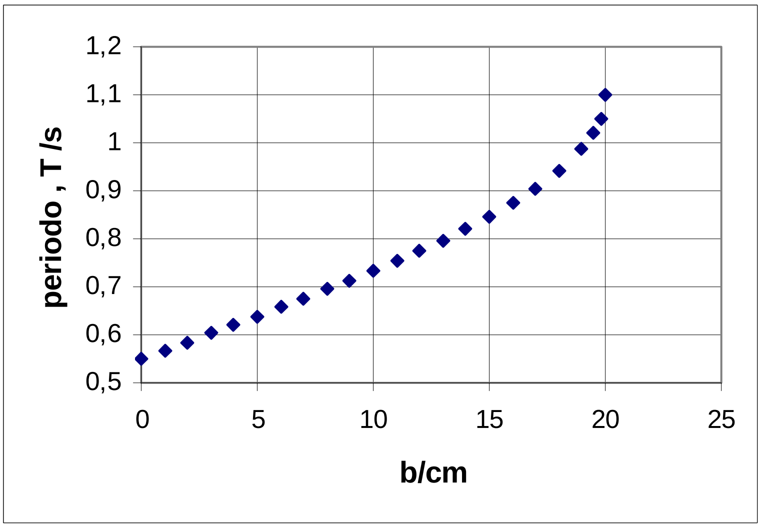
$$\frac{T_o}{2\pi} = \frac{\tau}{\frac{\pi}{2}+\delta} \qquad \Rightarrow \qquad \tau = T_o \frac{\frac{\pi}{2}+\delta}{2\pi} = \frac{T_0}{4} + \frac{T_0\,\delta}{2\,\pi}$$

Por otra parte

$$\operatorname{sen}\delta = \frac{b}{y_o}$$

$$\tau = \frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{2\ \pi} \cdot \text{arco sen}\frac{b}{y_o} \quad \Rightarrow \quad T = 2\tau = \frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{\pi} \cdot \text{arco sen}\frac{b}{y_o}$$

En la gráfica siguiente se ha representado T frente a los valores de b.



23.-Un circuito serie de corriente alterna está formado por una resistencia, una bobina y un condensador de capacidad variable. La fuente de corriente tiene una frecuencia de 50Hz y una fuerza electromotriz eficaz de 230 V. En el circuito está instalado un amperímetro de corriente alterna, que mide la intensidad eficaz. La resistencia eléctrica es 100Ω. Se observa que si el condensador variable tiene una capacidad de 12 μF el amperímetro indica la misma intensidad que si el condensador tiene una capacidad de 17 μF.

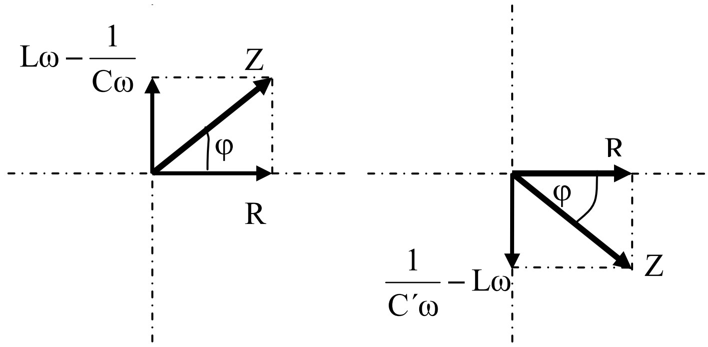
a) Calcular el coeficiente de autoinducción L de la bobina

b) Determinar el defasaje entre la corriente y la tensión cuando la capacidad del condensador es 12 μF

c) ¿Para qué valor de la capacidad del condensador el circuito entra en resonancia y cuánto vale la impedancia del circuito?

Olimpiada de Suiza 2000

a) Si el amperímetro marca igual intensidad eficaz es porque la impedancia del circuito es la misma en ambos casos, esto es, cuando el condensador tiene una capacidad de 12μF o 17 μF . Dado que la autoinducción y la resistencia son las mismas, la única posibilidad de que Z sea la misma es que en un caso predomina la reactancia inductiva y en el otro la capacitiva. En un diagrama se observa mejor esta situación.



De la primera figura se deduce que $Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ y de la segunda $Z^2 = R^2 + \left(\frac{1}{C'\omega} - L\omega\right)^2$, como las Z son iguales:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C'\omega} - L\omega \quad \Rightarrow \quad 2L\omega = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right) \quad \Rightarrow$$

$$L = \frac{1}{2 \cdot 4\pi^2 \cdot 50^2}\left(\frac{1}{12.10^{-6}} + \frac{1}{17.10^{-6}}\right) = 0{,}72 \text{ H}$$

Conocido el valor de L podemos calcular las reactancias

$$X_L = L\omega = 0{,}72 \cdot 2\pi \cdot 50 = 226 \ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{12.10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50} = 265 \ \Omega$$

$$X_{C'} = \frac{1}{C'\omega} = \frac{1}{17.10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50} = 187 \ \Omega$$

b) Cuando la capacidad del condensador es 12 μF en el circuito predomina la reactancia capacitiva pero cuando la capacidad es 17 μF predomina la reactancia inductiva. En el primer caso la intensidad esta adelantada respecto de la tensión un ángulo

$$\text{tag}\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} = \frac{265 - 226}{100} = 0{,}39 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 21{,}3^{\text{o}}$$

c) La resonancia ocurre cuando la resistencia inductiva es igual a la capacitiva.

$$L\omega = \frac{1}{C_R\omega} \quad \Rightarrow C_R = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0{,}72 \cdot 4\pi^2 \cdot 50^2} = 1{,}4.10^{-5} \text{ F} = 14 \ \mu\text{F}$$

En el caso de la resonancia la impedancia del circuito es la resistencia óhmica y en este caso vale 100Ω.

24.-En algunos diagnósticos médicos es importante conocer el volumen de sangre contenido en el organismo. Un procedimiento es el siguiente:
Se inyecta en la sangre del paciente 1 cm^3 de una disolución de glóbulos rojos marcados con tecnecio radiactivo (^{99}Tc, con un periodo de semidesintegración de 6,0 horas). Después de un cierto tiempo la disolución inyectada se reparte uniformemente por todo el volumen de sangre del paciente. Al cabo de una hora y media se toma una muestra de sangre del paciente de 20 cm^3 y se determina que su actividad es 43,5 kBq, siendo la actividad de la muestra inicial de 1 cm^3, 15 Mbq. Con estos datos determinar: a) los gramos de ^{99}Tc con que se preparó la disolución inicial de 1 cm^3 y b) el volumen de sangre del paciente.
El tecnecio 99 emite radiación β, siendo la energía promedio de los electrones 0,3 MeV. Si el paciente tiene una masa corporal de 70 kg y se admite que absorbe toda la radiación inyectada en su cuerpo, determinar
La dosis absorbida y la dosis equivalente si el factor de calidad de la radiación β es 1. Olimpiada de Suiza 2000

a) La actividad tiene como unidad el becquerel que corresponde a una desintegración por segundo, matemáticamente representa $-\frac{dN}{dt}$, siendo N el número de átomos presentes en la muestra y el signo menos indica que ese número disminuye con el transcurso del tiempo. El número de átomos presentes en la muestra en el tiempo t, está relacionado con el número N_o que existían en el tiempo inicial, t=0

$$N = N_o e^{-\lambda t} \Rightarrow A = -\frac{dN}{dt} = -N_0 e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = N\lambda$$

Según el dato del problema Nλ =15.10^6. También sabemos el tiempo de semidesintegración, que es el tiempo en que el número de átomos de la muestra se reduce a la mitad

$$N = N_o e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N_o}{2} = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = -\lambda T_{1/2} \Rightarrow \lambda = \frac{0{,}693}{6.3600} = 3{,}21.10^{-5}\ s^{-1}$$

$$A = 15.10^6 = N\lambda \quad \Rightarrow N = \frac{15.10^6}{3{,}21.10^{-5}} = 4{,}7.10^{11}$$

Este número representa el número de átomos de tecnecio 99 que existen en 1 cm^3, la masa molar del tecnecio es 99 g/mol y en un mol existen N_A = 6,02.10^{23} átomos, por tanto:

$$\frac{99\,g}{6{,}02.10^{23}} = \frac{x}{4{,}7.10^{11}} \quad \Rightarrow \quad x = 7{,}7.10^{-11}\ g$$

b) Inicialmente en toda la sangre del paciente existen 4,7.10^{11} átomos de tecnecio, al cabo de hora y media ese número es:

$$N = 4{,}7.10^{11} \cdot e^{-3{,}21.10^{-5} \cdot 1{,}5 \cdot 3600} = 3{,}95.10^{11}$$

La actividad de 20 cm^3 de sangre del paciente vale 43,5.10^3 Bq ; si el volumen total de sangre es V cm^3 , la actividad total de toda la sangre sería $43{,}5.10^3 \frac{V}{20}$ Bq

$$43{,}5.10^3 \cdot \frac{V}{20} = N\lambda = 3{,}95.10^{11} \cdot 3{,}21.10^{-5} \Rightarrow V = \frac{3{,}95.10^{11} \cdot 3{,}21.10^{-5} \cdot 20}{43{,}5.10^3} = 5{,}8.10^3\,cm^3$$

c) El gray (Gy) es una unidad del sistema internacional que representa la energía absorbida por unidad de masa

Energía = 0,3 .10^6 eV*4,7.10^{11} = 1,08.10^{17} eV=1,41.10^{17} $\text{eV}\cdot\dfrac{1{,}6.10^{-19}\,\text{J}}{1\,\text{eV}} = 0{,}023\ \text{J}$

$$D_a = \frac{0{,}023}{70} = 3{,}3.10^{-4}\,\text{Gy}$$

El sievert es una unidad que se relaciona con la dosis absorbida mediante la relación

$$\text{D}_\text{e} = \text{D}_\text{a}\cdot\text{factor de calidad} = 3{,}3.10^{-4}\,\text{Sv} = 0{,}33\,\text{mSv}$$

El factor de calidad es una medida que indica el efecto en los seres vivos depende del tipo de radiación absorbida, no es lo mismo la misma dosis absorbida de electrones que de radiación alfa, éstos con un factor de calidad 20.

25.-Un automóvil(masa M=1000 kg, sección A = 2 m^2, coeficiente de rozamiento con el aire c_{fa}=0,50), desciende por un puerto de montaña con una velocidad media de 25 km/h. La pendiente media del puerto es 12%. El conductor comete el error de utilizar exclusivamente los frenos para mantener la velocidad y no utilizar el cambio de marchas y así poder aprovechar el motor como freno. La temperatura del ambiente es 0ºC.

a) ¿Cuántos grados por segundo se eleva la temperatura de los frenos? Calcular para qué recorrido los discos del freno podrían fundirse. Se admite que éstos se componen exclusivamente de hierro con una masa de 20 kg y se desprecia el rozamiento con el aire y la radiación emitida por los frenos cuando están calientes.

b) Si ahora se tiene en cuenta la potencia radiada por los frenos y el rozamiento con el aire, la temperatura de los frenos no crece hasta fundir el hierro sino que llegan a una temperatura de equilibrio. Si se admite que la superficie de radiación del frenado es 0,4 m^2. Calcular la temperatura que alcanzan los frenos y para qué velocidad los frenos alcanzan la máxima temperatura y cuál es esa temperatura.
Datos.- Calor específico del Fe = 450 Jkg^{-1} K^{-1} ; Temperatura de fusión del Fe = 1535ºC ; densidad del aire 1,1 kgm^{-3} ; Constante de Stefan-Boltzmann=5,67.10^{-8} Wm^{-2}K^{-4} ; Fuerza de rozamiento con el aire
Froz = (1/2) $c_{fa}\,\rho\, v^2$ A
Olimpiada de Suiza 2001

a) El automóvil pierde energía potencial al descender del puerto de montaña siendo esta pérdida Mgh. Teniendo en cuenta la pendiente y la velocidad de bajada

$$\text{sen}\theta \approx \text{tag}\theta = 0{,}12 = \frac{\text{h}}{\text{L}} = \frac{\text{h}}{\text{v}\cdot 1} \Rightarrow \text{Mgh} = \text{Mgv}\cdot 1\cdot 0{,}12$$

Esta energía debe ser absorbida por los frenos y almacenada como energía térmica

$$\text{Mgv}\cdot 1\cdot 0{,}12 = \text{m}_\text{Fe}\cdot\text{c}_\text{Fe}\cdot\Delta\tau \quad\Rightarrow\quad \Delta\tau = \frac{1000\cdot 9{,}81\cdot 25\dfrac{1000}{3600}\cdot 0{,}12}{20\cdot 450} = 0{,}91\ \ ºC/s$$

Como en un segundo la temperatura se eleva 0,91ºC, a este ritmo se alcanzará la temperatura de fusión del hierro al cabo de

$$\frac{0{,}91ºC}{1\ \ s}=\frac{1535ºC}{t}\quad\Rightarrow\quad t=1{,}69.10^{3}s$$

En ese tiempo habrá recorrido

$$\Delta s=25\frac{10^{3}}{3600}\cdot 1{,}69.10^{3}\ =1{,}17.10^{4}\ m=11{,}7\ km$$

b) Calculamos cuánto vale la fuerza de frenado con el aire a la velocidad de 25 km/h.

$$F_{aire}=\frac{1}{2}c\rho v^{2}A=\frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 1{,}1\cdot\left(\frac{25.10^{3}}{3600}\right)^{2}2=26{,}5\,N$$

La fuerza que impulsa al automóvil hacia abajo debido a la pendiente

$$F_{g}=Mgsen\alpha=1000\cdot 9{,}8\cdot 0{,}12=1{,}18.10^{3}\,N$$

La fuerza neta que actúa sobre el coche

$$F_{N}=1{,}18.10^{3}-26{,}5=1{,}15.10^{3}\,N$$

La potencia vale

$$P=F_{N}v=1{,}15.10^{3}\cdot 25\frac{10^{3}}{3600}=7{,}99.10^{3}\ W$$

Si designamos con T_F, la temperatura de los frenos y T_{am} la temperatura del medio que los rodea, que en nuestro caso es el aire a 0º C, la potencia radiada vale

$$P=Se\sigma\left(T_{F}^{4}-T_{am}^{4}\right)$$

Siendo e la emisividad del hierro y S la superficie radiante. Dado que en el problema no se nos da el valor de e, podemos suponer que e=1 como si el hierro de los frenos se comportase como un cuerpo negro o bien buscar el dato de e en algún manual.

$$S\sigma\left(T_{f}^{4}-273^{4}\right)=7{,}99.10^{3}\ \Rightarrow\ T_{F}=\sqrt[4]{\frac{7{,}99.10^{3}}{0{,}4\cdot 5{,}67.10^{-8}}+273^{4}}=773K=500^{o}C$$

Para el hierro no pulido e vale 0,7, por tanto la temperatura de los frenos sería

$$T_{F}=\sqrt[4]{\frac{7{,}99.10^{3}}{0{,}4\cdot 5{,}67.10^{-8}\cdot 0{,}7}+273^{4}}=845\,K=572^{o}C$$

Volvemos a las ecuaciones

$$P=\left(Mg\,sen\alpha-\frac{1}{2}c_{fa}\rho v^2A\right)v=S\sigma\left(T_F^4-T_{am}^4\right)\;\Rightarrow\;T_F^4=\frac{Mg\,sen\alpha\, v-\frac{1}{2}c_{fa}\rho v^3A}{S\sigma}+T_{am}^4$$

Para que T_F sea máximo el numerador debe ser máximo; derivamos respecto de v el numerador e igualamos a cero.

$$Mg\,sen\alpha-\frac{3}{2}c_{fa}\rho v^2A=0\Rightarrow v=\sqrt{\frac{Mg\,sen\alpha}{\frac{3}{2}c_{fa}\rho A}}=\sqrt{\frac{1000\cdot 9{,}8\cdot 0{,}12}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}5\cdot 1{,}1\cdot 2}}=27\frac{m}{s}$$

$$F_{aire}=\frac{1}{2}c\rho v^2A=\frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 1{,}1\cdot 27^2\cdot 2=4.10^2\text{ N}$$

$$F_N=1{,}18.10^3-4.10^2=780\text{ N}$$

$$P=F_Nv=780\cdot 27=2{,}1.10^4\text{ W}$$

$$T_F=\sqrt[4]{\frac{2{,}1.10^4}{0{,}4\cdot 5{,}67.10^{-8}}+273^4}=982\text{ K}=709^\circ\text{C}$$

26.-Una pieza de madera reposa sobre una plancha horizontal, a la cual se le puede dotar, mediante un motor, de un movimiento armónico de amplitud A = 2 cm.

a) Si la pieza no se desplaza sobre la plancha, encontrar la función v(t) que describa la velocidad de la pieza respecto del laboratorio en función del tiempo, sabiendo que la frecuencia del movimiento de la plancha es 2 Hz y calcular la velocidad de la pieza respecto del laboratorio cuando esté a una distancia de 1 cm de su posición de ´´equilibrio´´.

b) Calcular la frecuencia máxima que puede adquirir la plancha para que la pieza no deslice sobre ella si el coeficiente de rozamiento entre la pieza y la plancha es 0,6

c) Si ahora a la plancha se la da un movimiento armónico vertical de amplitud 5 cm, encontrar la frecuencia máxima para la cual todavía la pieza no se separa de la plancha. Olimpiada de Suiza 2001

a) Como la condición impuesta es que la pieza no se mueva respecto de la plancha, su movimiento visto desde el laboratorio es un movimiento armónico igual al de la plancha.
La ecuación matemática de su posición respecto del laboratorio es:

$$x=A\,sen\left(2\pi f\,t\right)\;\Rightarrow\;v=\frac{dx}{dt}=2\pi f\,A\cos\left(2\pi f\,t\right)$$

Cuando la pieza, respecto del laboratorio, se encuentre desplazada un centímetro, el tiempo que ha pasado desde la posición inicial de la pieza es:

$$1=2\cdot sen\left(2\pi ft\right)\Rightarrow\;sen\left(2\pi ft\right)=0{,}5\Rightarrow\;2\pi ft=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\;t=\frac{\frac{\pi}{6}}{4\pi}=\frac{1}{24}s$$

$$v = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 21{,}8\,\frac{cm}{s}$$

b) Para que la pieza no deslice sobre la plancha, la fuerza máxima que ésta recibe, por el movimiento armónico de la plancha, debe ser igual o inferior a la fuerza de rozamiento. La fuerza máxima la sufre la pieza cuando la posición es x = amplitud, esto es, para un tiempo t =T/4 s

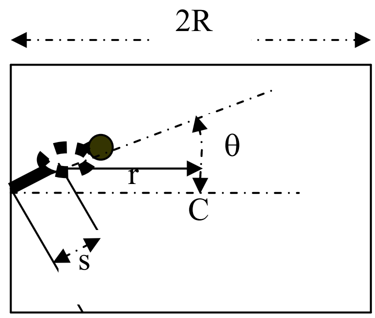
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -(2\pi f)^2 A\,\mathrm{sen}(2\pi ft) = -(2\pi f)^2 x \;\Rightarrow\; |a_{max}| = 4\pi^2 f^2 A$$

$$ma_{max} = m\,4\pi^2 f^2 A = \mu mg \;\Rightarrow\; f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0{,}6\cdot 9{,}8}{0{,}02}} = 2{,}73\,\mathrm{Hz}$$

c) Análogamente al caso anterior la fuerza máxima que recibe la pieza por el movimiento armónico ha de ser como máximo igual a su peso.

$$ma_{max} = m\,4\pi^2 f^2 A = mg \;\Rightarrow\; f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}05}} = 2{,}23\,\mathrm{Hz}$$

27.-En un parque de atracciones un motociclista da vueltas por el interior de un cilindro vertical de radio R =6,5 m con una velocidad v. El centro de masas del conjunto moto y motociclista está situado a una distancia s=0,75 m del punto de contacto del neumático con la pared. El coeficiente de rozamiento es 0,85.
Calcular la dependencia del ángulo θ con la velocidad, el ángulo máximo θ_{max} que evita que el motociclista vuelque y la velocidad mínima a la que puede dar vueltas. Olimpiada de Suiza 2001



C es un punto del eje del cilindro y r es la distancia del centro de masas del motociclista al punto C

Sobre el conjunto de moto y motociclista actúan las fuerzas que se indican en la figura 1, referidas a un sistema inercial.

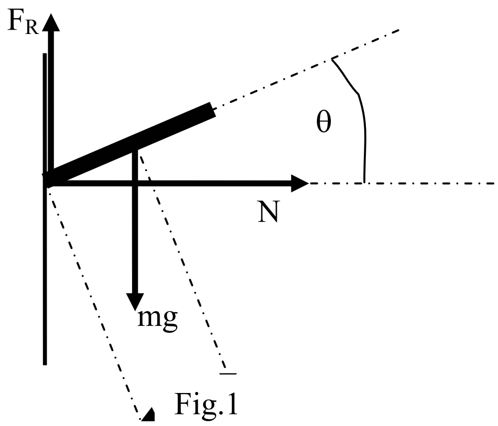


Fig.1

N es la fuerza con que la pared empuja al conjunto de moto y motociclista y proporciona la fuerza centrípeta necesaria para dar vueltas. Para que el motociclista dé vueltas tiene que cumplirse para las fuerzas

$$F_R = mg \qquad (1)$$

$$N = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{R - s\cos\theta} \qquad (2)$$

Además el ciclista no puede volcar, si los momentos de las fuerzas respecto del centro de masas se anulan entre si:

$$F_R\, s\cos\theta = N s\ \mathrm{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad F_R = N \quad \mathrm{tag}\theta \quad (3)$$

De (1) y (3) $mg = N\ \mathrm{tag}\theta$ y llevando el valor de N

$$mg = \frac{mv^2}{R - s\ \cos\theta}\mathrm{tag}\theta \ \Rightarrow \ v = \sqrt{\frac{g(R - s\ \cos\theta)}{\mathrm{tag}\theta}} \quad (4)$$

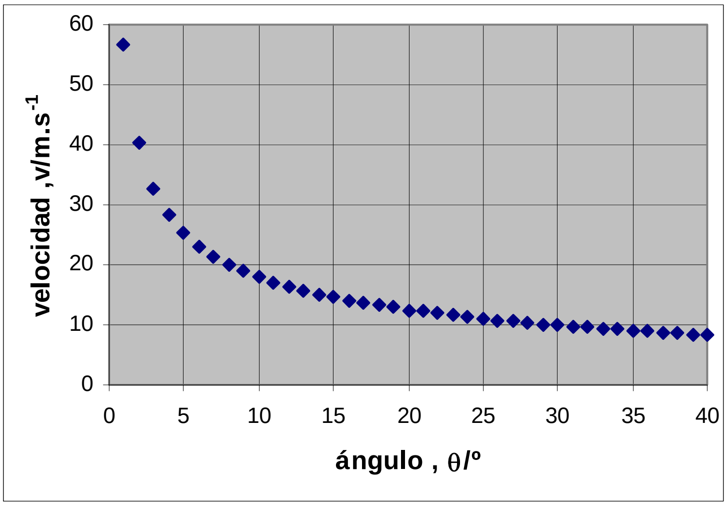
Observamos que si aumentamos la velocidad v, aumenta el valor de N (ecuación 2) y al mismo tiempo aumenta el valor de F_R (ecuación 3). El aumento de la fuerza de rozamiento no es ilimitado puesto que esta fuerza puede valer como máximo μN y ese valor máximo condiciona el valor de θ.

$$F_R = N\ \mathrm{tag}\theta \Rightarrow \mu N = N\ \mathrm{tag}\,\theta_{max} \ \Rightarrow \ 0{,}85 = \mathrm{tag}\theta_{max} \ \Rightarrow \quad \theta_{max} = 40{,}4^o$$

Si en la ecuación (4) se sustituyen los valores numéricos

$$v = \sqrt{\frac{g(R - s\ \cos\theta)}{\mathrm{tag}\theta}} = \sqrt{\frac{9{,}8(6{,}5 - 0{,}75 \cdot \cos\theta)}{\mathrm{tag}\theta}}$$

Y damos valores al ángulo θ , podemos representar la velocidad frente al ángulo, teniendo en cuenta que el valor máximo de θ es 40,4º.



De la gráfica se deduce claramente que al aumentar la velocidad el ángulo disminuye, por tanto, la velocidad mínima corresponde al máximo ángulo posible, esto es, a 40,4º y el valor de v es 8,3 m/s.

28.- En la primera fase de un ciclo de Otto se comienza por rellenar el pistón con una mezcla en forma de vapor de gasolina y aire. Una vez lleno el pistón, la presión es $P_o=10^5$ Pa, el volumen V_o=1 L y la temperatura T_o = 323 K. Se admitirá que en todo lo que sigue del problema $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ =1,3 para todos los gases participantes en el proceso.

a) En la fase de compresión del ciclo, la mezcla del pistón se comprime adiabáticamente hasta que el volumen es V_1 = 1/8 L. ¿Cual es la temperatura al final de este proceso?

b) A continuación tiene lugar la combustión de la mezcla, la cual se verifica con tanta rapidez que puede considerarse que el proceso se verifica a volumen constante, sin embargo el número de partículas aumenta en un 10% respecto de las iniciales y la temperatura se eleva a 1500K. ¿Cuál es la presión en el cilindro inmediatamente después de la combustión?

c) Después de la combustión el gas se expande de forma adiabática hasta alcanzar el volumen de partida y finalmente se produce la fase de escape en la que el gas del cilindro se expulsa al exterior. Determinar el trabajo suministrado a lo largo de un ciclo.

d) Un motor de cuatro cilindros funciona según el proceso descrito anteriormente y con los valores numéricos calculados. Admitimos que para una velocidad de 100 km/h el régimen del motor es 3500 vueltas por minuto y que el rendimiento del motor es un 33%, calcular el consumo de gasolina expresado en kg/100 km.

Dato. Calor de combustión de la gasolina $4{,}3.10^7$ J/kg

Olimpiada de Suiza 2001

a) *Fase de compresión* . Aplicamos la ecuación de la transformación adiabática.

$$P_o V_o^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{10^5 \cdot 1^{1,3}}{\left(\frac{1}{8}\right)^{1,3}} = 14{,}93.10^5 \text{ Pa}$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos

$$\frac{P_o V_o}{T_o} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{P_1 V_1 T_o}{P_o V_o} = \frac{14{,}93.10^5 \cdot \frac{1}{8} \cdot 323}{10^5 \cdot 1} = 603\,\text{K}$$

b) *Fase de la combustión.*

Admitimos que el aumento del 10% en el número de partículas es el aumento en el número de moles. Aplicamos la ecuación de los gases perfectos

$$\begin{aligned} P_1 V_1 &= n_1 R T_1 \\ P_2 V_1 &= n_2 R T_2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1 R T_1}{n_2 R T_2} = \frac{n_1 T_1}{\left(n_1 + \frac{10}{100} n_1\right) T_2} \Rightarrow \frac{14{,}93.10^5}{P_2} = \frac{603}{1{,}1 \cdot 1500} \Rightarrow P_2 = 40{,}85.10^5\,\text{Pa}$$

b) *Fase de expansión adiabática.*

$$P_2 V_2^{\gamma} = P_3 V_3^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad P_3 = \frac{40{,}85.10^5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{1,3}}{1^{1,3}} = 20{,}42.10^5 \text{ Pa}$$

c) El trabajo a lo largo de un ciclo es la suma de los trabajos efectuados en la fase de compresión adiabática y en la fase de expansión adiabática ya que en la fase de combustión el trabajo es nulo por ser $\Delta V=0$

Trabajo en la fase de compresión adiabática

$$W_1 = -\int_{Vo}^{V_1} P\,dV$$

El criterio de signos que se adopta es que un trabajo realizado por el sistema al exterior es negativo y si lo realiza el exterior sobre el sistema es positivo.

A lo largo de la transformación adiabática se cumple:

$$PV^{\gamma} = \text{Cte} = P_o V_o^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{P_o V_o^{\gamma}}{V^{\gamma}}$$

Sustituyendo en la ecuación del trabajo:

$$W_1 = -\int_{V_o}^{V_1} \frac{P_o V_o^\gamma}{V^\gamma} dV = -P_o V_o^\gamma \left| \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right|_{V_o}^{V_1} = -P_o V_o^\gamma \left[\frac{V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{V_o^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] =$$

$$= -10^5 \cdot 1^{1,3} \left[\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{-0,3} - 1^{-1,3}}{1-1,3} \right] = 2,90.10^5 \ \frac{N}{m^2} \cdot L$$

Trabajo en la expansión adiabática

$$W_2 = -\int_{V2}^{V3} P\, dV = -\int_{V2}^{V3} \frac{P_2 V_2^\gamma}{V^\gamma} dV = -P_2 V_2^\gamma \left| \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right|_{V_2}^{V_3} = -40,85.10^5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{1,3} \left[\frac{1^{-0,3}}{-0,3} - \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{-0,3}}{-0,3} \right] =$$

$$= -2,74.10^{-5} \left(\frac{1-1,87}{-0,3} \right) = -7,95.10^{-5} \ \frac{N}{m^2} L$$

$$W_{neto} = 2,9.10^5 - 7,95.10^5 = -5,05.10^5 \ \frac{N}{m^2} L = -505 \ \ J$$

El signo menos nos indica que en cada ciclo el sistema entrega 505 J de energía

d) Si el régimen del motor es de cuatro tiempos, cada dos vueltas del cigüeñal se verifica un ciclo por cada uno de los cuatro cilindros. La energía aportada por minuto al motor es:

$$\frac{3500}{2} \frac{\text{ciclos}}{\text{min}} \cdot 505 \frac{J}{\text{ciclo}} \cdot 4\,\text{cilindros} = 3,54.10^6 \ \frac{J}{\text{min}}$$

Dado que el rendimiento es el 33% el aporte total de energía para recorrer 100 km en 1hora =60 min, es:

$$3,54.10^6 \cdot \frac{100}{33} \cdot 60 = 6,43.10^8 \ J$$

Como el calor de combustión de la gasolina es $4,3.10^7$ J/kg

$$\frac{6,43.10^8 J}{4,3.10^7 \ \frac{J}{kg}} \approx 15 \ \ \text{kg} \ \ \text{en 100 km recorridos.}$$