

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

## 1ª OLIMPIADA DE FÍSICA. POLONIA . 1967

**1.- Una pelota de masa  $m = 0,2 \text{ kg}$  está apoyada sobre una columna vertical de altura  $h = 5 \text{ m}$ . Una bala de masa  $m = 0,01 \text{ kg}$  y velocidad paralela al suelo  $v_o = 500 \text{ m/s}$ , atraviesa la pelota y ésta toca el suelo a una distancia  $s = 20 \text{ m}$  de la base de la columna. a) Calcular la distancia entre el impacto de la bala con el suelo y la base de la columna b) ¿qué fracción de la energía cinética de la bala se transfiere como calor a la propia bala? 1ª Olimpiada de Física. Polonia 1967**

a) Consideremos el sistema formado por la bala y la pelota. Antes del impacto y después de él, se conserva la cantidad de movimiento:

Antes:  $mv_o$ , después:  $mv + MV$ ;  $mv_o = mv + MV$  (1)

$v$  es la velocidad de la bala inmediatamente después de atravesar la pelota,  $V$  es la velocidad de la pelota justamente después de ser atravesada por la bala.

Cuando la pelota abandona la columna describe una trayectoria parabólica. Tomando como origen de referencia la columna y el eje  $Y$  en sentido vertical y dirigido hacia abajo, las ecuaciones de la trayectoria de la pelota son:

$$\left. \begin{array}{l} x = Vt \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} y = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V^2} \quad (2)$$

Cuando la pelota llegue al suelo su coordenada  $y$  es igual a  $h = 5 \text{ m}$ , siendo  $x = s = 20 \text{ m}$ . De la ecuación (2) se deduce el valor de  $V$

$$V = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 20^2}{2 \cdot 5}} = 19,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación (1)

$$0,01 \cdot 500 = 0,01 v + 0,2 \cdot 19,8; v = 104 \text{ m/s}$$

Aplicando la ecuación (2) para la bala

$$x = \sqrt{\frac{2yv^2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 104^2}{9,8}} = 105 \text{ m}$$

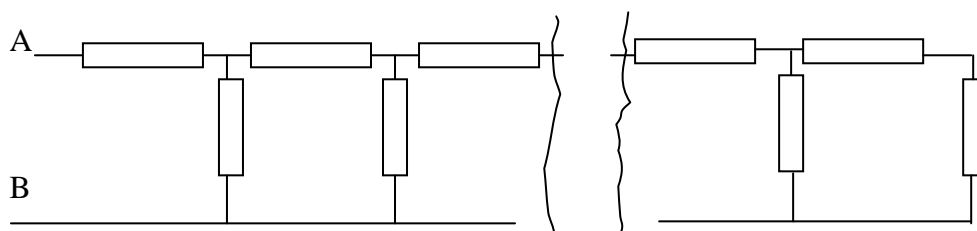
b) La energía cinética de la bala antes y después del impacto con la pelota son:

$$E_{c1} = \frac{1}{2} \cdot 0,01 \cdot 500^2 = 1250 \text{ J}; \quad E_{c2} = \frac{1}{2} \cdot 0,01 \cdot 104^2 = 54 \text{ J}$$

La energía cinética de la pelota es  $E_c = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 19,8^2 = 40 \text{ J}$

En otras formas de energía aparecen  $1250 - (54 + 40) = 1156 \text{ J}$ , que supone el  $(1156 \cdot 100 / 1250) = 93\%$  de la energía

2.- En la figura inferior tenemos una malla formada por infinitas resistencias, cada una de valor  $r$  ¿Cuál es la resistencia resultante entre A y B? 1ª Olimpiada de Física. Polonia 1967



Supongamos que la malla no es infinita sino que consta de 8 resistencias en total. En la terminación de la malla las dos últimas resistencias se encuentran en serie, por tanto su resistencia equivalente es  $2r$ , a su vez esta resistencia equivalente se encuentra en paralelo con otra resistencia  $r$ , con lo cual la equivalente es :

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} \quad ; \quad r_e = \frac{2}{3}r$$

Esta resistencia equivalente se encuentra en serie con otra de valor  $r$  y la equivalente es  $\frac{2}{3}r + r = \frac{5}{3}r$ , ésta se encuentra en paralelo con otra de valor  $r$  y la equivalente es .

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r} + \frac{3}{5r} = \frac{8}{5r} \quad ; \quad r_e = \frac{5r}{8}$$

Siguiendo el cálculo tenemos ahora una resistencia  $\frac{5}{8}r + r = \frac{13}{8}r$ , que se encuentra en paralelo con otra  $r$

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r} + \frac{8}{13r} = \frac{21}{13r} \quad ; \quad r_e = \frac{13r}{21}$$

Finalmente la resistencia entre A y B sería

$$R_{AB} = r + \frac{13}{21}r = r \left( 1 + \frac{13}{21} \right)$$

Observemos la secuencia de cálculo:  $\frac{2}{3}$  ;  $\frac{5}{8}$  ;  $\frac{13}{21}$  ..... El numerador de una fracción se obtiene sumando el numerador y denominador de la anterior y el denominador se obtiene sumando el numerador obtenido con el denominador de la anterior, esto nos permite escribir que si  $x_{n-1}$  es el numerador del penúltimo término e  $y_{n-1}$  el denominador, el último término es:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{(x_{n-1} + y_{n-1}) + y_{n-1}} = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + 2y_{n-1}}$$

Si la serie obtenida tiene un límite la diferencia entre los dos últimos términos debe ser nula

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0 \quad ; \quad \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + 2y_{n-1}} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0 \quad ; \quad \frac{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + 1}{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + 2} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0$$

Si en la ecuación anterior hacemos  $\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = a$ , resulta.

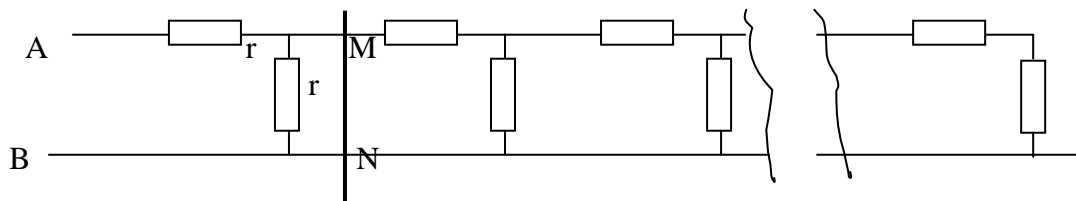
$$a = \frac{a+1}{a+2} \quad , \quad a^2 + a - 1 = 0 \quad , \quad \text{resolviendo} \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Si se considera la solución positiva resulta para el último término

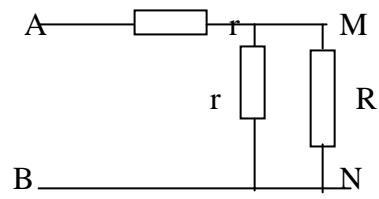
$$\frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1}{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

$$R_{AB} = r \left( 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \right) = r \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Una manera más rápida de resolver este problema se basa en que en un circuito de infinitos términos no se altera el valor de su resistencia al añadir uno más o quitarlo.



Sea R la resistencia equivalente a todas las que están a la derecha de la línea MN. El circuito equivalente es el inferior, que también tiene una resistencia R



La resistencia del circuito inferior es:

$$R = r + \frac{rR}{r+R} \Rightarrow R^2 - rR - r^2 = 0 \Rightarrow R = r \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$