

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

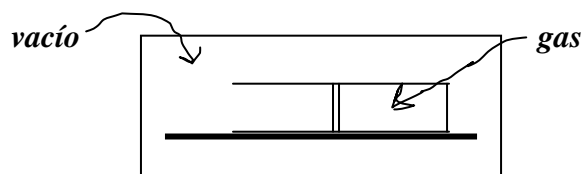
José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

12ª OLIMPIADA DE FÍSICA. BULGARIA . 1981

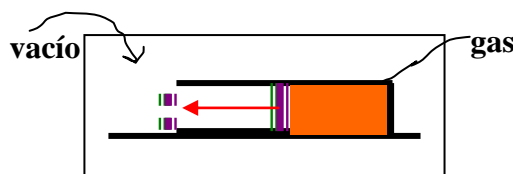
1.-Un cilindro de masa $m_1 = 0,6 \text{ kg}$ se mantiene en el vacío en posición horizontal. Un pistón de masa $m_2 = 0,3 \text{ kg}$ y espesor despreciable divide en dos partes iguales al cilindro



La parte cerrada del cilindro contiene $n = 25$ moles de un gas de masa molar $M = 4 \text{ g/mol}$ y se encuentra a la temperatura $T_0 = 273 \text{ K}$. El pistón que está inicialmente en reposo mediante una sujeción, al liberarlo de ella se mueve hacia la izquierda y se escapa del cilindro y a continuación lo hace el gas. Calcular la velocidad final del cilindro suponiendo que no hay rozamientos, ni intercambio de calor entre el cilindro y pistón.

Datos $C_v = 12,6 \text{ J/(mol.K)}$, $\gamma = 5/3$

12ª Olimpiada Internacional de Física. Bulgaria 1981.



($m_1 = 0,6 \text{ kg}$); ($M = 4 \text{ g/mol}$); ($m_2 = 0,3 \text{ kg}$); ($n = 25$) moles $R = 8,314 \text{ J/mol.K}$; ($T_0 = 273 \text{ K}$)

Cuando el pistón abandona el cilindro puede considerarse como un sistema aislado, y por consiguiente se conserva su momento y su energía: con los datos,

$$(m_1 + nM) \cdot v_1 - m_2 u = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + nM) \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 \cdot u^2) = \Delta U \quad (2)$$

donde v_1 es la velocidad del cilindro cuando lo abandona el pistón; u es la velocidad del pistón en ese mismo instante, ΔU es el cambio de energía interna del gas. El gas es perfecto y monoatómico, por tanto su energía interna disminuye

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot nR\Delta T = \frac{3}{2} \cdot nR (T_0 - T_f) \quad (3)$$

T_f es la temperatura del gas en el momento que el pistón abandona el cilindro. Esta temperatura puede ser determinada por la ley del proceso adiabático.

$$T_0 \cdot V^{\gamma-1} = T_f \cdot V_f^{\gamma-1}$$

Teniendo en cuenta que $V_f = 2 V$, ya que el pistón se encuentra al principio en la mitad del cilindro, y además que el coeficiente adiabático es $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{(5/2)R}{(3/2)R} = \frac{5}{3}$, resulta:

$$T_f = T_0 \left(\frac{V}{V_f} \right)^{\gamma-1} = T_0 \cdot 2^{-2/3} \quad (4)$$

De la ecuación (1) despejamos $u = \frac{(m_1 + nM)v_1}{m_2}$ y sustituyendo en (2) y sustituyendo también

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR (T_0 - T_f) = \frac{3}{2} nR \left(T_0 - T_0 2^{-2/3} \right) = \frac{3}{2} nRT_0 \left(1 - 2^{-2/3} \right) = \frac{3}{2} nRT_0 * 0,37$$

$$(m_1 + nM)v_1^2 + m_2 \frac{(m_1 + nM)^2 v_1^2}{m_2^2} = 3nRT_0 * 0,37 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{3nRT_0 * 0,37}{(m_1 + nM) + \frac{(m_1 + nM)^2}{m_2}}} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{3 * 25 * 8,314 * 273 * 0,37}{(0,6 + 25 * 4 \cdot 10^{-3}) + \frac{(0,6 + 25 * 4 \cdot 10^{-3})^2}{0,3}}} = 164 \frac{m}{s}$$

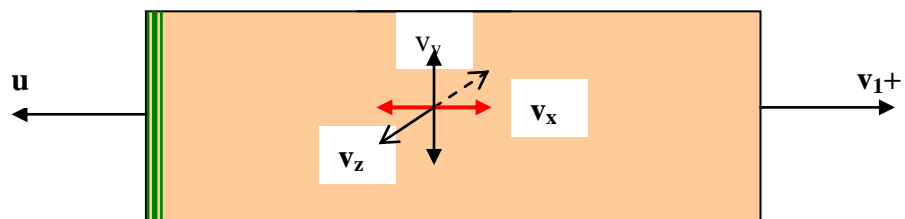


Fig. 2

Los choque de las partículas con el fondo del cilindro:

El impulso que recibe el cilindro por el choque de las partículas gaseosas con su fondo cerrado cuando el pistón lo abandona incrementan su velocidad en una cantidad v_2 que podemos calcular teniendo en cuenta que cada átomo varía su cantidad de movimiento :

$$p = 2m_A \cdot \Delta \bar{v}_x$$

donde m_A es la masa del átomo $m_A = M/N_A$ y \bar{v}_x puede obtenerse por ser la componente de la velocidad cuadrática media \bar{v}^2 $\bar{v}_x = \sqrt{\frac{\bar{v}^2}{3}}$, de donde el

$$\text{momento es } p = 2 \frac{M}{N_A} \sqrt{\frac{\bar{v}^2}{3}}$$

Asumiendo que la velocidad térmica molecular es mucho mayor que la velocidad del cilindro, y describiendo el movimiento en un sistema solidario con éste.

Hay que tener presente que solamente la mitad de los átomos que se mueven según v_x chocan con el fondo del cilindro, el momento total que recibe éste de los choques de los átomos del gas es.

$$p_t = \frac{1}{2} p \cdot n \cdot N_A = nM \sqrt{\frac{\bar{v}^2}{3}}$$

que proporciona un incremento adicional v_2 de la velocidad del cilindro

$$v_2 = \frac{p_t}{m_1} = n \frac{M}{m_1} \sqrt{\frac{\bar{v}^2}{3}},$$

y usando la fórmula de la velocidad cuadrática media en función de la temperatura, $\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT_f}{M}}$, y teniendo en cuenta que $T_f = T_0 \cdot 2^{-2/3}$, queda para v_2 ,

$$v_2 = \frac{nM}{m_1} \sqrt{\frac{3RT_0 * 2^{-\frac{2}{3}}}{3M}} = 2^{-1/3} \frac{n\sqrt{MRT_0}}{m_1}$$

que aplicando los datos numéricos vale:

$$v_2 = 0,79 \frac{25\sqrt{0,004,8,314,273}}{0,6} = 99 \text{ m/s}$$

Así que la velocidad final del cilindro es, $v = v_1 + v_2$

$$v = v_1 + v_2 = 164 + 99 = 263 \text{ m/s}$$

2.-Una bombilla eléctrica de resistencia $R_o = 2\Omega$ funciona a un voltaje $U_o = 4,5\text{ V}$. Se conecta a una batería de resistencia interna despreciable y fuerza electromotriz $U = 6\text{ V}$ mediante un reóstato de cursor que funciona como un potenciómetro. Se desea que la eficiencia ($e = \text{potencia consumida en la bombilla} / \text{Potencia total de la batería}$) no sea menor que 0,6. Calcular el valor de la resistencia del reóstato.

¿Cuál es la máxima eficiencia posible y en este caso cómo se debe conectar la bombilla al reóstato?

12ª Olimpiada Internacional de Física. Bulgaria 1981.

El esquema del circuito eléctrico es el de la figura 1.

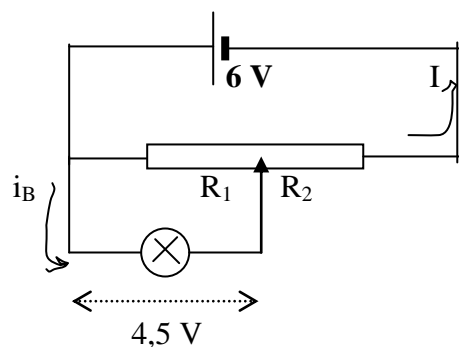


Fig 1

La resistencia total del reóstato es $R_1 + R_2$

La intensidad que circula por la batería y por R_2 es I

La intensidad que circula por la bombilla es $i_B = \frac{U_o}{R_o} = \frac{4,5}{2} = 2,25\text{ A}$

La potencia consumida en la bombilla es $P_o = i_B^2 R_o = 2,25^2 * 2 = 10,125\text{ W}$

La potencia total es: $e = \frac{P_o}{P_t} \Rightarrow P_t = \frac{P_o}{e} = \frac{10,125}{0,6} = 16,875\text{ W}$

La intensidad que circula por la batería y R_2 es: $I = \frac{P_t}{U} = \frac{16,875}{6} = 2,8125\text{ A}$

La intensidad que circula por R_1 es: $2,8125 - 2,25 = 0,5625\text{ A}$

$$R_1 = \frac{4,5}{0,5625} = 8\ \Omega \quad ; \quad R_2 = \frac{6 - 4,5}{2,8125} = 0,53\ \Omega$$

La resistencia del reóstato es $R = R_1 + R_2 = 8,53\ \Omega$

Si la bombilla funciona correctamente consume una potencia de 10,125 W, su tensión es de 4,5 V y por ella circula una corriente de 2,25 A

$$e = \frac{P_o}{UI} \Rightarrow eI = \frac{P_o}{U}$$

Tanto la potencia de la bombilla como la fem de la batería son datos fijos. La eficiencia y la intensidad son inversamente proporcionales.

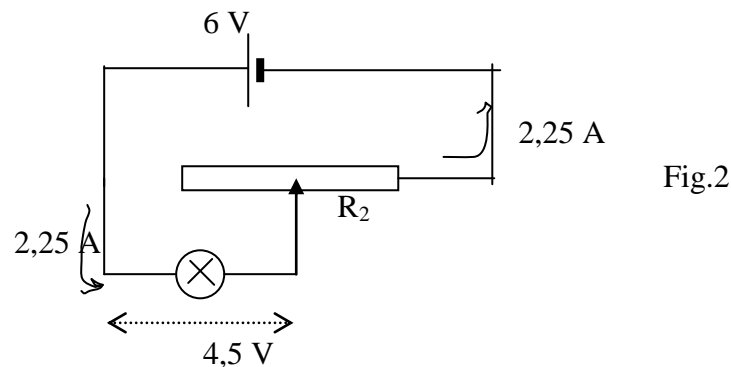
Si la eficiencia en lugar de ser 0,6 fuese menor, por ejemplo, 0,5, entonces la potencia de la batería valdría $10,125/0,5 = 20,25 \text{ W}$ y la intensidad de la corriente $20,25/6 = 3,375 \text{ A}$. Se deduce que cuanto menor sea la intensidad I que pase por la batería mayor será la eficiencia, por tanto, si deseamos que la eficiencia sea máxima hemos de lograr que I sea mínima.

Para que la bombilla no corra peligro de fundirse será necesario que $i_B \leq 2,25 \text{ A}$, pero si es menor que $2,25 \text{ A}$ su potencia $P_o = i_B^2 R_o$ también lo será y no alumbrará bien.

Con estas limitaciones el mínimo de $I = 2,25 \text{ A}$ que ha de pasar por la batería es también el máximo que ha de pasar por la bombilla y la eficiencia máxima

$$e = \frac{P_o}{UI} = \frac{10,125}{6 * 2,25} = 0,75$$

Para poder ajustar mejor estos datos se logra con el circuito de la figura2.



Ahora la intensidad $I = 2,25 \text{ A}$ y el valor de la resistencia que se toma en el reóstato es:

$$R_2 = \frac{6 - 4,5}{2,25} = 0,67 \ \Omega$$

La eficiencia máxima es 0,75

3.- El receptor de un observatorio radioastronómico está situado a una altura de 2 m sobre el nivel del mar. Registra solamente las componentes horizontales de los campos eléctricos. Cuando una radioestrella está en el horizonte radiando ondas de $\lambda = 21$ cm el receptor recoge máximos y mínimos a) Determinar la dirección de las ondas cuando se observan máximos y mínimos. La dirección se expresará mediante el ángulo respecto de la horizontal b) La intensidad aumentará o disminuirá cuando la estrella aparece sobre el horizonte? c) calcular la relación de intensidad entre los sucesivos máximos y mínimos.

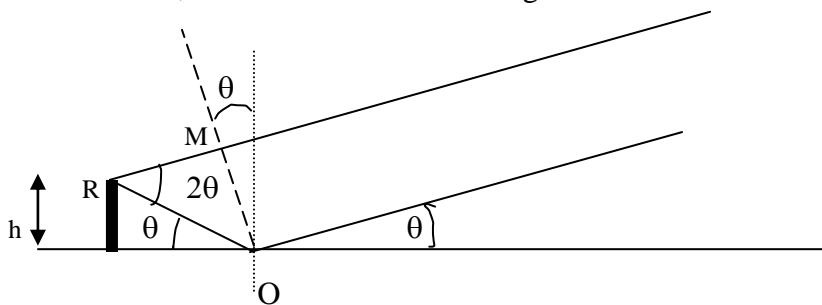
Nota.- La relación de amplitudes de las ondas incidentes y reflejadas es

$$\frac{n - \text{sen } \theta}{n + \text{sen } \theta}$$

siendo θ el ángulo de la onda incidente medido sobre la horizontal y n el índice de refracción que para las ondas electromagnéticas cortas es $n = 9$.

12ª Olimpiada Internacional de Física. Bulgaria 1981.

a) El receptor del observatorio recibe la radiación directamente de la estrella o después de reflejarse en el mar, tal como se indica en la figura inferior



Una vez que las ondas llegan a M y a O, desde ahí al receptor recorren distintos caminos, siendo la diferencia de distancias recorridas OR-MR.

$$\text{sen } \theta = \frac{h}{\text{OR}} \quad ; \quad \text{cos } 2\theta = \frac{\text{MR}}{\text{OR}} \quad ; \quad \text{OR} - \text{MR} = \frac{h}{\text{sen } \theta} - \text{OR} \text{cos } 2\theta = \frac{h}{\text{sen } \theta} (1 - \text{cos } 2\theta),$$

$$\text{OR} - \text{MR} = \frac{h}{\text{sen } \theta} [1 - (\text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta)] = 2 h \text{ sen } \theta$$

Además, la onda que se refleja en el agua al hacerlo en un medio de mayor índice de refracción sufre una inversión de fase, lo que equivale a recorrer media longitud de onda. En consecuencia la diferencia de caminos es:

$$\delta = 2 h \text{ sen } \theta + \frac{\lambda}{2}$$

Los **máximos** ocurren cuando la diferencia de marcha sea un múltiplo entero de la longitud de onda

$$2h \sin\theta + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\lambda \left(k - \frac{1}{2}\right)}{2h} \quad \text{siendo } k = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Los **mínimos** ocurren cuando la diferencia de marcha sea un múltiplo impar de la semilongitud de onda

$$2h \sin\theta + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{k\lambda}{2h}, \quad \text{siendo } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

b) Cuando la radioestrella aparece sobre el horizonte el ángulo $\theta = 0$, esta condición la cumple la ecuación (2) por tanto corresponde a un mínimo, a medida que se eleve sobre el horizonte la intensidad irá aumentando

c) Cuando haya mínimo hemos de restar el campo de la onda directa del de la onda reflejada en el agua

$$E_{\min} = E - E \frac{n - \sin\theta}{n + \sin\theta} = E \left[1 - \frac{n - \frac{k\lambda}{2h}}{n + \frac{k\lambda}{2h}} \right] = \frac{2k\lambda}{2nh + k\lambda} E; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

La intensidad es proporcional al cuadrado de E. Para los mínimos se sustituyen valores en la ecuación (3)

$$k=0, \quad \theta = 0, \quad I = 0; \quad k=1, \quad \theta = 3^\circ, \quad I_1 \approx \left(\frac{2 * 21.10^{-2}}{2 * 2 * 9 + 21.10^{-2}} \right)^2 E^2 \approx 1,35.10^{-4} E^2$$

$$k=2, \quad \theta = 6^\circ, \quad I_2 \approx \left(\frac{2 * 2 * 21.10^{-2}}{2 * 2 * 9 + 2 * 21.10^{-2}} \right)^2 E^2 \approx 5,32.10^{-4} E^2$$

$$k=3, \quad \theta = 9,1^\circ, \quad I_3 = 11,8.10^{-4} E^2; \quad k=4, \quad \theta = 12,1^\circ, \quad I_4 = 20,8.10^{-4} E^2$$

Para los máximos se sustituyen valores en la ecuación (1)

$$E_{\max} = E + E \frac{n - \sin\theta}{n + \sin\theta} = E \left[1 + \frac{n - \frac{\lambda(2k-1)}{4h}}{n + \frac{\lambda(2k-1)}{4h}} \right] = \frac{8hn}{4nh + \lambda(2k-1)} E; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Sustituyendo valores en la ecuación (4)

$$k=1, \quad \theta = 1,5^\circ, \quad I_1 \approx \left(\frac{8 \cdot 2 \cdot 9}{4 \cdot 9 \cdot 2 + 21 \cdot 10^{-2} (2 \cdot 1 - 1)} \right)^2 E^2 = 3,98 \cdot E^2$$

$$k=2, \quad \theta = 4,5^\circ, \quad I_2 \approx \left(\frac{8 \cdot 2 \cdot 9}{4 \cdot 9 \cdot 2 + 21 \cdot 10^{-2} (2 \cdot 2 - 1)} \right)^2 E^2 = 3,93 \cdot E^2$$

$$k=3, \quad \theta = 7,5^\circ, \quad I_2 \approx \left(\frac{8 \cdot 2 \cdot 9}{4 \cdot 9 \cdot 2 + 21 \cdot 10^{-2} (2 \cdot 3 - 1)} \right)^2 E^2 = 3,88 \cdot E^2$$

$$k=4, \quad \theta = 10,6^\circ, \quad I_2 \approx \left(\frac{8 \cdot 2 \cdot 9}{4 \cdot 9 \cdot 2 + 21 \cdot 10^{-2} (2 \cdot 4 - 1)} \right)^2 E^2 = 3,84 \cdot E^2$$

Relación entre los máximos sucesivos $I_1:I_2:I_3:I_4 : \dots = 3,98 : 3,93 : 3,88 : 3,84$

El contraste entre máximos y mínimos sucesivos:

$$k=1; \quad \text{Re } l_1 = \frac{I_1(\text{max})}{I_1(\text{min})} = \frac{3,98}{1,35} \cdot 10^4 = 2,95 \cdot 10^4 ;$$

$$k=2; \quad \text{Re } l_2 = \frac{I_2(\text{max})}{I_2(\text{min})} = \frac{3,93}{5,32} \cdot 10^4 = 0,74 \cdot 10^4$$

$$k=3; \quad \text{Re } l_3 = \frac{I_3(\text{max})}{I_3(\text{min})} = \frac{3,88}{11,8} \cdot 10^4 = 0,33 \cdot 10^4$$

$$k=4; \quad \text{Re } l_4 = \frac{I_4(\text{max})}{I_4(\text{min})} = \frac{3,84}{20,8} \cdot 10^4 = 0,18 \cdot 10^4$$

La relación de intensidades entre máximo y mínimo del mismo orden, aunque se mantiene en órdenes de magnitud de 10^4 , los mínimos crecen rápidamente y los máximos decrecen lentamente, y por tanto el contraste se va reduciendo.

$$\text{Rel}_1 : \text{Rel}_2 : \text{Rel}_3 : \text{Rel}_4 : \dots = 2,95 : 0,74 : 0,33 : 0,18 : \dots$$