PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

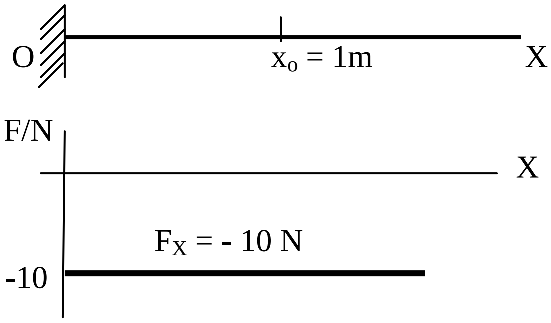
José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

14ª OLIMPIADA DE FÍSICA. RUMANIA. 1983

1.-Una partícula se mueve a lo largo del eje OX tal como se indica en la figura inferior. Sobre la partícula actúan dos fuerzas una señalada en el gráfico y la otra

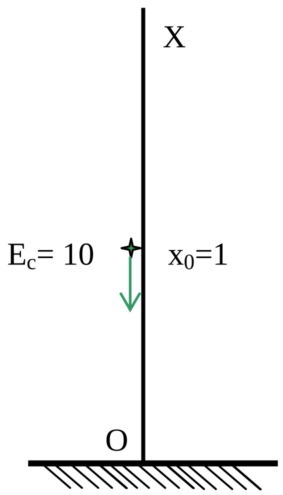


corresponde a una fuerza de rozamiento Fr = 1,00 N. La pared O se comporta como perfectamente reflectante.
La partícula sale del punto de coordenada xo= + 1m y posee en ese instante una energía cinética de 10,0 J

a) Calcular la longitud que recorre la partícula hasta que finalmente se detiene
b) Representar gráficamente la energía potencial de la partícula Ep(X) en el campo F
c) Realizar un dibujo cualitativo de la velocidad de la partícula en función de x

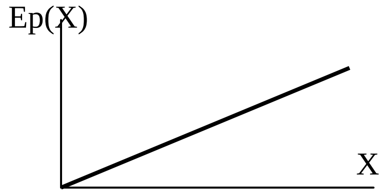
14ª Olimpiada Internacional de Física. Rumania. 1983.

a) El problema es más familiar si se piensa que el eje OX es vertical y la pared O el suelo de la Tierra. La partícula en el punto x_o= 1m posee además de energía cinética una energía potencial dada por la expresión Ep(X) = Fx_o . La partícula se parará necesariamente en el punto O cuando haya agotado su energía cinética y potencial, debido al trabajo de rozamiento que realiza en su movimiento de acercamiento y alejamiento de O. Por consiguiente:



$$10 + Fx_o = Fr\ \Delta s \qquad \Rightarrow \qquad \Delta s = \frac{10 + 10*1}{1} = 20\ \text{m}$$

b) La energía potencial en cualquier punto es Fx + Cte. La constante la podemos anular para el punto O, esto es para x =0. En consecuencia la gráfica de la energía potencial frente a la coordenada x es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas



c) Supongamos que en el punto xo=1 y en el tiempo t=0 , la partícula se dirige hacia la pared con una velocidad inicial vo. Hasta llegar a la pared la partícula es acelerada debido a la fuerza resultante que en este caso es –F+Fr = ma. La velocidad al chocar con la pared es $v=\sqrt{v_o^2+2as}$, siendo s la distancia x_oO, v tiene signo negativo pues está dirigida hacia el eje X negativo.

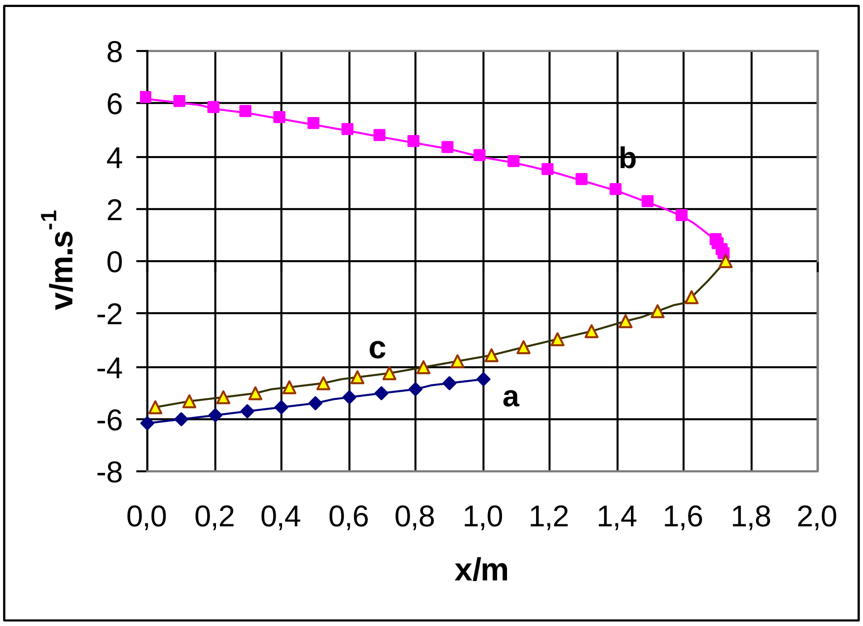
Dado que la pared es perfectamente reflectante rebota con la velocidad +v y comienza a decelerarse debido a que actúan dos fuerzas –F-Fr = $ma_{1,}$ siendo a_1 >a , lo que equivale a decir que realiza un movimiento retardado tal que al pasar por la posición x_o=1m su velocidad en valor absoluto es menor que cuando t=0. La partícula sobrepasa esa posición hasta que se anula su velocidad y de nuevo se dirige hacia O con movimiento acelerado y aceleración a, pero al llegar a O su velocidad es menor que cuando llegó la vez anterior. El movimiento se repite así una y otra vez hasta agotar la energía mecánica de la partícula.
Para entender la forma de la gráfica vamos a hacer unos cálculos con valores numéricos y una hoja de cálculo.
Supongamos que la masa es la unidad y que inicia el movimiento es la posición xo=1 m dirigiéndose hacia O. Dado que su energía cinética es 10 J, se deduce que su velocidad inicial es $v_0=\sqrt{20}=4{,}47\ \frac{m}{s}$. Tomamos como sentido positivo OX
La aceleración de bajada es -10+1 = 1*a_B , a_B =-9 m/s^2

La aceleración de subida -10-1 = 1*a_S ; a_S = -11 m/s^2

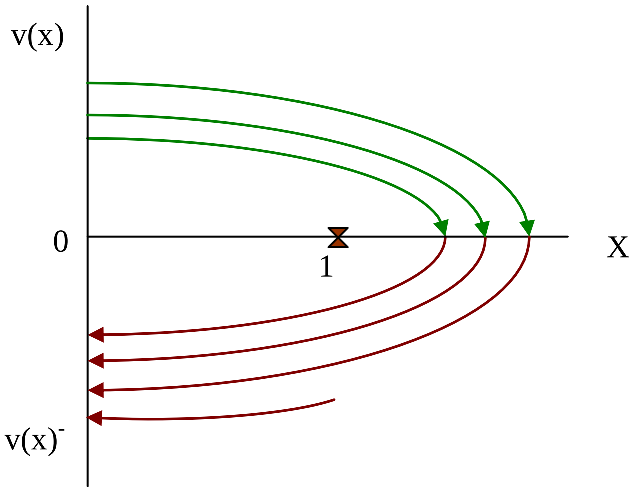
Las ecuaciones del movimiento son $x=x_o+v_ot+\frac{1}{2}at^2$, $v=v_o+at$. Si se elimina t en las dos ecuaciones se llega a:

$$v=\sqrt{v_o+2a(x-x_o)}$$

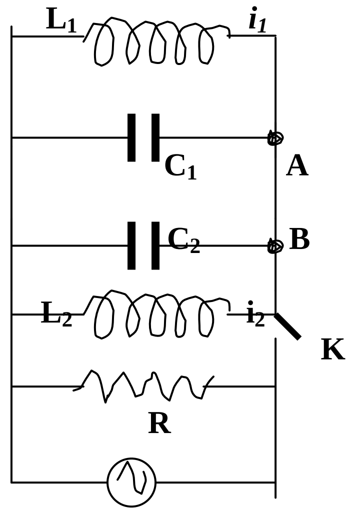
Dando valores en la ecuación vo=4,47, a = -9m/s^2 y x = 1 , 0,9 ; 0,8 …… se obtiene la rama a de la figura. Al llegar a x=0 rebota con velocidad positiva e incia la rama b , pero ahora la aceleración es -11 m/s^2 y los valores de x son 0, 0,1 , 0,2 ….. Se observa que al pasar por x=1 m su velocidad ha disminuido y se hace nula a x =1,725 m. A partir de ahí desciende con aclaración -9 m/s^2 y comienza la rama c, se observa que cuando x= 0 la velocidad es menor



El ciclo se repite y la gráfica tiene la forma de la figura inferior



2.-En el circuito de la figura inferior L_1 = 10 mH , L_2 = 20 mH , C_1 = 10μF, C_2= 5μF y R = 100 kΩ



Se cierra el interruptor K durante un largo tiempo. La frecuencia de la fuente de corriente alterna pude variar, mientras que la amplitud de la onda que genera, esto es, el voltaje máximo o eficaz, se mantiene constante.
a) Llamando f_m a la frecuencia que corresponde a la potencia máxima P_m y f_1 y f2 a las frecuencias correspondientes a ½ Pm. Calcular la relación entre f_m y $\Delta f = f_1 - f_2$.
b) El interruptor K se abre y un tiempo t_o después de abrirlo, las intensidades de corriente a través de L_1 y L_2 son: i_1=0,1 A e i_2 = 0,2 A y el voltaje Uo = 40 V. Calcular la frecuencia de oscilación del circuito L_1,C_1,L_2,C_2.
c) Determinar la intensidad de la corriente en el conductor AB
d) Calcular la amplitud máxima de la corriente que circula por la bobina L_1.
14ª Olimpiada Internacional de Física. Rumania. 1983.

Vamos a calcular la impedancia del circuito equivalente al dado

$$\frac{1}{\mathbf{Zeq}} = \frac{1}{\mathbf{Z_{L1}}} + \frac{1}{\mathbf{Z_{C1}}} + \frac{1}{\mathbf{Z_{L2}}} + \frac{1}{\mathbf{Z_{C2}}} + \frac{1}{\mathbf{Z_R}}$$

(Se emplea letra negrita para designar a las impedancias complejas. En lugar de usar el complejo i se sustituye por la letra j para evitar confusiones con las intensidades).

$$\mathbf{Z_{L1}} = L_1\omega\mathbf{j} \;\; ; \;\; \mathbf{Z_{C1}} = \frac{-1}{C_1\omega}\mathbf{j} \;\; ; \;\; \mathbf{Z_{L2}} = L_2\omega\mathbf{j} \;\; ; \;\; \mathbf{Z_{C2}} = \frac{-1}{C_2\omega}\mathbf{j} \;\; ; \;\; \mathbf{Z_R} = R$$

$$\frac{1}{Zeq}=\frac{1}{L_1\omega j}-\frac{1}{\frac{1}{C_1\omega}j}+\frac{1}{L_2\omega j}-\frac{1}{\frac{1}{C_2\omega}j}+\frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{Zeq}=-\frac{1}{L_1\omega}j+C_1\omega j-\frac{1}{L_2\omega}j+C_2\omega j+\frac{1}{R}$$

Si en la expresión anterior hacemos $C = C_1+C_2$, $C = 15\ \mu F$
y $\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}=\frac{1}{L}$; $L = 20/3$ mH , resulta finalmente :

$$\frac{1}{Zeq}=\frac{1}{R}+j\left[C\omega-\frac{1}{L\omega}\right]=Y \qquad (1)$$

(la inversa de la impedancia **Z** es la admitancia **Y**)

Vamos a designar al voltaje aplicado al circuito con el número complejo **V +0j** con lo que la intensidad que circula por el circuito es de acuerdo con la ley de Ohm para alterna

$$I=\frac{V}{Zeq}=V\cdot Y=(V+0j)\cdot\left[\frac{1}{R}+j\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)\right]=\frac{V}{R}+V\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)j$$

La potencia compleja **S** de un circuito de alterna, también llamada potencia aparente es

S = V.I*

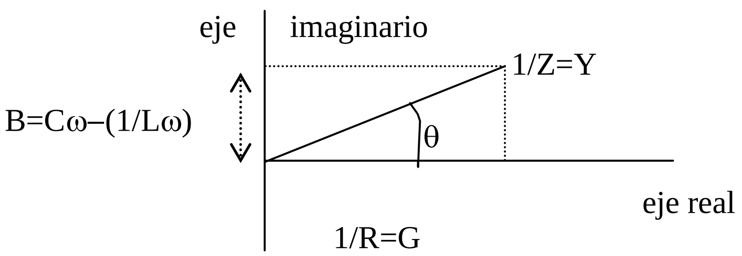
Siendo **I*** el complejo conjugado de la intensidad.

$$S=(V+0j)\cdot\left[\frac{V}{R}-V\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)j\right]=\frac{V^2}{R}-V^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)j \qquad (2)$$

La parte real de la potencia compleja o aparente **S** se llama **potencia activa** del circuito y su valor para este circuito es $P= V^2/R$, la parte imaginaria se llama **potencia reactiva** Q.
Al mismo resultado se puede llegar recordando que la potencia activa es:

$$P = V\ I\ \cos\theta$$

$$I=V\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2} \quad ; \quad \cos\theta=\frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$



$$P = VI\cos\theta = V * V\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2} * \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}} = \frac{V^2}{R}$$

Del anterior resultado se deduce que la potencia activa es independiente de la frecuencia y por tanto no puede hablarse de un valor máximo, tal como indica el enunciado,(salvo si se entiende que el máximo aprovechamiento de la potencia es cuando su potencia reactiva es nula que es cuando el circuito está en resonancia) en consecuencia el problema podría quedar redactado así:

a) Calcular el valor de la fm para que en el circuito la potencia reactiva <u>sea nula</u> y los valores de las frecuencias f_1 y f_2 para los que en el circuito la potencia reactiva sea la mitad de la potencia activa. Hallar el cociente entre fm y $\Delta f = f_1 - f_2$

De la ecuación (2) se deduce que para que la potencia reactiva sea nula se debe cumplir que

$$C\omega = \frac{1}{L\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad \Rightarrow \quad fm = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Esto significa que el circuito se encuentra en resonancia ya que la parte compleja de la admitancia es nula.

Si la potencia reactiva es la mitad de la potencia activa se cumple

$$\frac{1}{2}\frac{V^2}{R} = V^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2R} = C\omega - \frac{1}{L\omega} \Rightarrow \quad LC\omega^2 - \frac{L}{2R}\omega - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultan dos soluciones:

$$\omega_1 = \frac{\frac{L}{2R}+\sqrt{\frac{L^2}{4R^2}+4LC}}{LC} \quad ; \quad \omega_2 = \frac{\frac{L}{2R}-\sqrt{\frac{L^2}{4R^2}+4LC}}{LC}$$

y de aquí se deduce:

$$\Delta f = f1 - f2 = \frac{\sqrt{\frac{1}{4R^2C}+\frac{4}{LC}}}{2\pi} ; \frac{fm}{\Delta f} = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}{\frac{\sqrt{\frac{1}{4R^2C}+\frac{4}{LC}}}{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{4R^2C}+4}} \approx 2R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

a) De la ecuación (1) se deduce que al abrir el conmutador K nos queda un circuito equivalente de valor $C\omega - \frac{1}{C\omega}$, cuya frecuencia propia de oscilación es:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{20}{3}.10^{-3} * 15.10^{-6}}} = 503 \ \text{Hz}$$

La frecuencia de oscilación del circuito L_1C_1 es igual a L_2C_2 y vale

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{10.10^{-3} * 10.10^{-6}}} = 503 \ \text{Hz}$$

Por tanto, los dos circuitos L_1C_1 y L_2C_2 oscilan independientemente uno del otro con la frecuencia de 503 Hz.

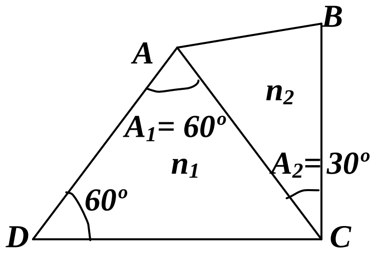
a) Por el ramal AB no pasa corriente ya que el punto A y B están al mismo potencial.

b) La máxima corriente que pasa por L_1 se puede calcular aplicando el principio de conservación de la energía:

c)

$$\frac{1}{2}L_1 I_m^2 = \frac{1}{2}L_1 0{,}1^2 + \frac{1}{2}C_1 U_o^2 \Rightarrow I_m = \sqrt{0{,}1^2 + \frac{10.10^{-6} * 40^2}{10.10^{-3}}} = 1{,}27 \ \text{A}$$

3.- Dos prismas de ángulos A_1 = 60º y A_2 = 30º se pegan juntos tal como indica la figura inferior. El ángulo en C es de 90º.



Los índices de refracción están dados por las siguientes expresiones

$$n_1 = 1,1 + \frac{10^5}{\lambda^2} \qquad ; \qquad n_2 = 1,3 + \frac{5.10^4}{\lambda^2}$$

a) Determinar la longitud de onda λo para la que los rayos de luz, atraviesen la superficie de separación AC sin refractarse b) Dibujar la trayectoria de tres rayos diferentes de longitudes de onda λrojo, λo y λazul que tienen el mismo ángulo de incidencia c)

b) Calcular el ángulo de desviación mínima del prisma total

c) Calcular la longitud de onda de una radiación cuyos rayos llegan paralelos a DC y abandonan el prisma manteniéndose paralelos a DC
14ª Olimpiada Internacional de Física. Rumania. 1983.

a) Para que no haya refracción tiene que ocurrir que los índices de refracción de los dos medios separados por la superficie AC sean iguales:

$$n_1 = n_2 \quad ; \qquad 1,1 + \frac{10^5}{\lambda_o^2} = 1,3 + \frac{5.10^4}{\lambda_o^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = 500 \ \text{nm}$$

b) La longitud de onda del color rojo es mayor que 500 nm y la del azul es menor. Para decidir cuál es la trayectoria de los rayos debemos determinar los índices de refracción para cada longitud de onda.

1) Para el rayo rojo tanto n_1 como n_2 son mayores que la unidad, esto es, ambos índices superan el índice de refracción del aire. Ahora comparamos n_1 y n_2 para el rayo rojo

$$n_1 - n_2 = -0,2 + \frac{1}{\lambda_{rojo}^2}\left(10^5 - 5.10^4\right) = -0,2 + \frac{5.10^4}{\lambda_{rojo}^2} \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación anterior es igual a cero si se sustituye la longitud de onda por 500, al sustituir la longitud de onda por la del rojo que es mayor que 500 nm el resultado es negativo y por tanto $n_2 > n_1$

En la figura 1 se ha representado, de forma cualitativa, la marcha de un rayo rojo

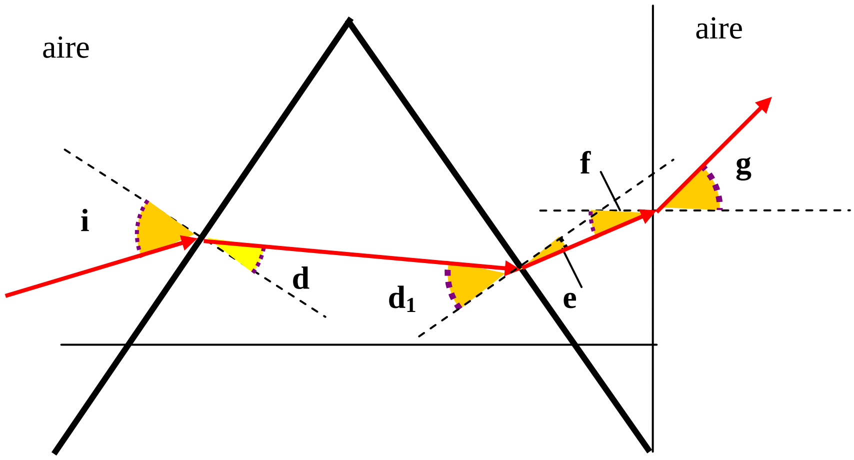


Fig. 1

Al ángulo de incidencia i le corresponde en el primer prisma un ángulo de refracción d, siendo d<i, ya que se pasa del aire a un medio de índice $n_1 > n_{aire} = 1$. Al ángulo de incidencia d_1 le corresponde un refractado menor e ya que $n_2 > n_1$. Al ángulo de incidencia f le corresponde un refractado mayor g , pues se pasa de un índice $n_2 > n$ aire = 1

2) Para el color azul, al ser λ_{azul} menor que λo, la ecuación (1) nos indica que $n_1 > n_2$. La figura 2 indica también de forma cualitativa la marcha de un rayo azul.

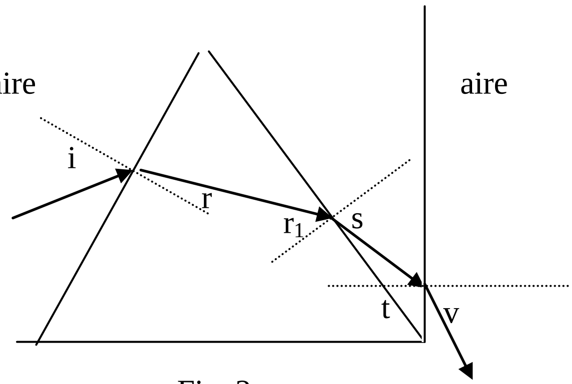


Fig. 2

Al incidente i le corresponde un refractado r siendo i>r, ya que se pasa de menor a mayor índice de refracción. Al incidente r_1 le corresponde un refractado s siendo $s > r_1$, ya que al ser $n_1 > n_2$ se pasa de mayor a menor índice de refracción y finalmente al incidente t le corresponde un refractado v, siendo v>t.

d) La agrupación de los dos prismas es semejante a un solo prisma de ángulo 30º, siendo para la longitud de onda λo , su índice igual a:

$$n_1 = n_2 = 1{,}1 + \frac{10^5}{500^2} = 1{,}5$$

En la figura 3 se han representado los dos prismas (en línea continua) y el prisma equivalente añadiendo lo que falta en línea discontinua.

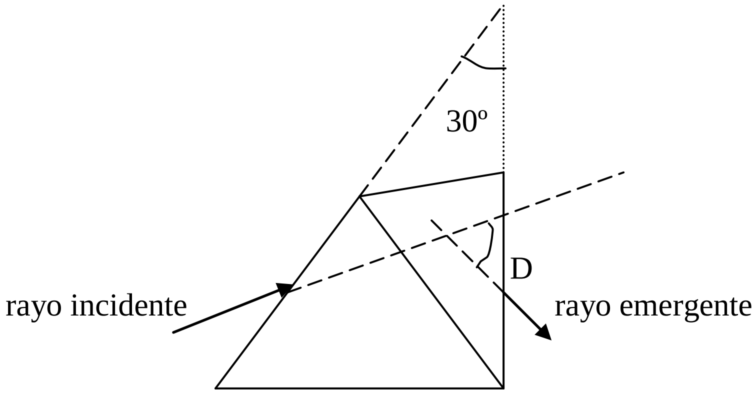


Fig. 3

El ángulo de desviación D es el ángulo que forma la dirección del rayo incidente con la dirección del rayo emergente. El valor de D es mínimo cuando el ángulo incidente y el ángulo emergente son iguales. En una primera aproximación se puede calcular el ángulo de desviación mínima mediante la expresión

$$D_{mínimo} = (n-1) * \text{Ángulo del prisma} = 0{,}5 * 30 = 15º$$

De manera rigurosa se encuentra la siguiente relación en la que A es el ángulo del prisma:

$$n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{D_{mínimo} + A}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} \quad ; \quad 1{,}5 = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{D_{mínimo} + 30º}{2}\right)}{\operatorname{sen}15º} \quad \Rightarrow \quad D_{mínimo} = 15{,}69º$$

Si se utiliza una hoja de cálculo puede obtenerse la curva del ángulo de desviación frente a ángulo incidente mediante el siguiente cálculo (en la figura 4 están representados los distintos ángulos)

$$1 * \operatorname{sen} i = 1{,}5 \operatorname{sen} d_1 \Rightarrow d_1 \quad ; A = d_1 + d_2 \Rightarrow d_2 \quad ; 1{,}5 \operatorname{sen} d_2 = 1 * \operatorname{sen} e \Rightarrow e \quad ;$$

$$D = i + e - A$$

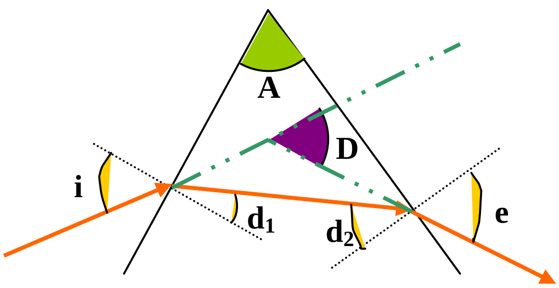


Fig. 4

La gráfica resultante es la siguiente:

d) En la figura 5 se indica la marcha de los rayos a través del prisma cuando el ángulo de incidencia es paralelo a DC

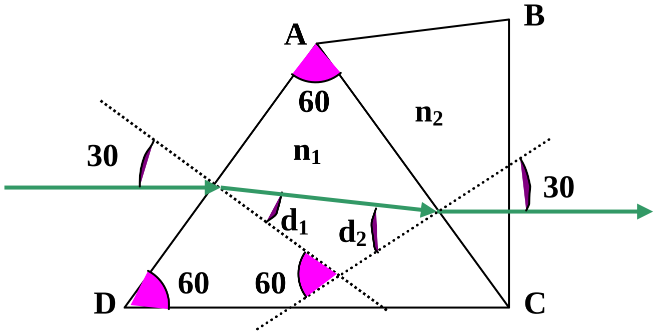


Fig. 5

El ángulo de incidencia es 30º, por tanto: 1 sen 30º = n_1 sen d_1

El ángulo del prisma de índice de refracción n_1 , es 60º, luego 60 = d_1+d_2

El ángulo que forma el rayo que incide sobre AC es d_2 y el refractado vale 30º

$$n_1 \text{ sen } d_2 = n_2 \text{ sen } 30$$

Si se combinan estas ecuaciones resulta:

$$\text{sen}(60 - d_1) = \frac{n_2}{n_1}\text{sen}30 \quad ; \quad \text{sen}60 * \cos d_1 - \cos 60 * \text{sen} d_1 = \frac{n_2}{n_1}\text{sen}30$$

se sustituye el valor de d_1

$$\mathrm{sen}60 * \sqrt{1-\frac{\mathrm{sen}^2 30}{n_1^2}} - \cos 60 * \frac{\mathrm{sen}30}{n_1} = \frac{n_2}{n_1}\mathrm{sen}30$$

Elevando al cuadrado

$$\mathrm{sen}^2 60\left(1-\frac{\mathrm{sen}^2 30}{n_1^2}\right) = \cos^2 60 * \frac{\mathrm{sen}^2 30}{n_1^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2}\mathrm{sen}^2 30 + 2 * \cos 60 * \frac{\mathrm{sen}30}{n_1} * \frac{n_2}{n_1}\mathrm{sen}30$$

Sustituyendo los senos y cosenos por sus valores se llega a:

$$3n_1^2 = n_2^2 + n_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 3\left(1,1+\frac{10^5}{\lambda^2}\right)^2 = \left(1,3+\frac{5.10^4}{\lambda^2}\right)^2 + 1,3 + \frac{5.10^4}{\lambda^2} + 1$$

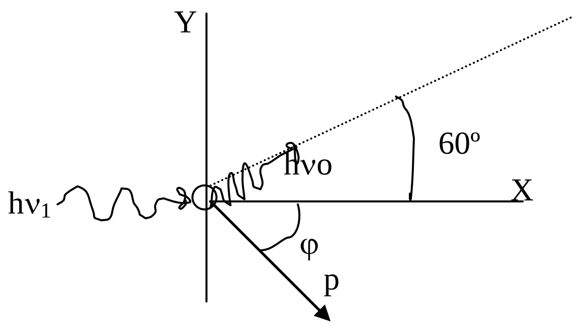
Si $\frac{1}{\lambda^2} = B^2$, resulta la siguiente ecuación $B^2 + 1{,}61344.10^6 B - 1{,}21001.10^{-12} = 0$

cuya solución positiva es $5{,}57.10^{-7}$ y de aquí $\lambda = 1{,}34.10^3$ nm

4.- Un fotón de longitud de onda λ_1 colisiona con un electrón que se mueve libremente. Como consecuencia del choque el electrón queda en reposo y el fotón se mueve en una dirección 60º respecto de la inicial que tenía y con una longitud de onda λo.
Este fotón choca con otro electrón que está en reposo y como resultado el fotón pasa a tener una longitud de onda λ_2 = 1,250.10^{-10} m y su dirección es también de 60º con respecto a la inicial. Calcular la longitud de onda del primer electrón de acuerdo con el principio de De Broglie.
Datos: h = 6,626.10^{-34} J.s ; masa del electrón = 9,109.10^{-31} kg, c = 2,998.10^{8} m/s
14ª Olimpiada Internacional de Física. Rumania. 1983.

Antes del **primer** choque: energía del fotón = $h\nu_1$; cantidad de movimiento del fotón = $p_\lambda = \frac{h\nu_1}{c}$; Ec energía cinética del electrón, p cantidad de movimiento

Después del **primer** choque: energía del fotón = $h\nu_o$; cantidad de movimiento del fotón = $p_\lambda = \frac{h\nu_o}{c}$; Energía del electrón =0 , cantidad de movimiento =0



Conservación de la energía : $h\nu_1 = h\nu_o + Ec$ (1)

Conservación de la cantidad de movimiento sobre el eje X : $\frac{h\nu_1}{c} = \frac{h\nu_o}{c}\cos 60 + p\cos\varphi$

Conservación de la cantidad de movimiento sobre el eje Y : $\frac{h\nu_o}{c}\operatorname{sen}60 = p\operatorname{sen}\varphi$

En las dos últimas ecuaciones elevamos al cuadrado y las sumamos, con el fin de eliminar el ángulo φ.

$$p^2 = \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_o}{c}\right)^2 - \frac{2h^2\nu_o\nu_1}{c^2}\cos 60 \quad (2)$$

La energía total del electrón: $E_c + m_oc^2 = \sqrt{m_o^2c^4 + p^2c^2}$.

Elevando al cuadrado resulta : $E_c^2 + 2E_c m_o c^2 = p^2c^2$. En esta ecuación se sustituye el valor de p de la ecuación (2) y de la energía cinética de la (1)

$$h^2(\nu_o - \nu_1)^2 + 2h(\nu_o - \nu_1)m_o c^2 = (h\nu_1)^2 + (h\nu_o)^2 - 2h^2\nu_1\nu_o \cos 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_o} = \frac{h}{m_o c^2}(1 - \cos 60) \qquad (3)$$

Antes del **segundo** choque: energía del fotón = $h\nu_o$; cantidad de movimiento del fotón $= p_\lambda = \dfrac{h\nu_o}{c}$; energía cinética del electrón = 0, cantidad de movimiento = 0

Después del **segundo** choque: energía del fotón = $h\nu_o$; cantidad de movimiento del fotón = $p_\lambda = \dfrac{h\nu_o}{c}$; Energía del electrón = E_2 , cantidad de movimiento = p_2

Conservación de la energía : $h\nu_o = h\nu_2 + E_2$

Conservación de la cantidad de movimiento sobre el eje X : $\dfrac{h\nu_o}{c} = \dfrac{h\nu_2}{c}\cos 60 + p_2 \cos\beta$

Conservación de la cantidad de movimiento sobre el eje Y : $\dfrac{h\nu_2}{c}\text{sen}60 = p_2 \text{sen}\beta$

Si se opera de manera análoga a como se hizo en el primer choque se llega al siguiente resultado:

$$\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_o} = \frac{h}{m_o c^2}(1 - \cos 60) \qquad (4)$$

Al comparar las ecuaciones (3) y (4) resulta: $\dfrac{1}{\nu_1} - \dfrac{1}{\nu_o} = \dfrac{1}{\nu_2} - \dfrac{1}{\nu_o} \Rightarrow \nu_1 = \nu_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Si se sustituyen los valores numéricos en la ecuación (4):

$$\lambda_o = \lambda_1 - \frac{h}{m_o c}(1 - \cos 60); \lambda_o = 1{,}250.10^{-10} - \frac{6{,}626.10^{-34}}{9{,}109.10^{-31} * 2{,}998.10^{8}}(1 - \cos 60)$$

$$\lambda_o = 1{,}238.10^{-10}\,\text{m}$$

Haciendo lo mismo en la ecuación (2) resulta:

$$p^2 = \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_o}{c}\right)^2 - \frac{2h^2\nu_o\nu_1}{c^2}\cos 60$$

$$p^2 = \left(\frac{6{,}626.10^{-34}}{1{,}250.10^{-10}}\right)^2 + \left(\frac{6{,}626.10^{-34}}{1{,}238.10^{-10}}\right)^2 - \frac{2\left(6{,}626.10^{-34}\right)}{1{,}250.10^{-10} * 1{,}238.10^{-10}}\cos 60 \Rightarrow$$

$$p = 5{,}33.10^{-24}\ \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

De acuerdo con el principio de De Broglie

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{6{,}626.10^{-34}}{5{,}33.10^{-24}} = 1{,}24.10^{-10}\,\mathrm{m}$$