

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

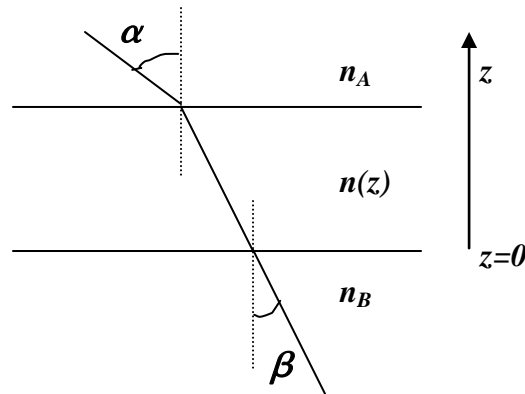
José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

15ª OLIMPIADA DE FÍSICA. SUECIA. 1984

1.- Tenemos una lámina transparente de caras paralelas, cuyo índice de refracción varía con la distancia z , contada a partir de su cara inferior, tal como indica la figura



- Demostrar que $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$
- En un desierto plano y a una gran distancia se puede ver como una superficie de agua, explicar el porqué a medida que nos acercamos a esa supuesta mancha de agua parece como si ésta se alejase y se mantuviera de nosotros a la misma distancia.
- Calcular la temperatura del suelo para el fenómeno descrito en b), admitiendo que nuestros ojos se encuentran a una altura sobre el suelo de 1,60 m y la distancia de la mancha de agua a 250 metros. El índice de refracción del aire a la temperatura de 15°C y a la presión atmosférica normal (101,3 kPa) es 1,000276. Se supone que la temperatura, 1 m por encima del suelo, se mantiene constante a 30°C. También se supone que la densidad del aire, n , cumple la siguiente relación $n-1 = k d$, siendo d la densidad del aire.

15ª Olimpiada Internacional de Física. Suecia . 1984

- Supongamos que entre n_A y n_B existen tres capas de densidades $n_1 > n_2 > n_3$ respectivamente.

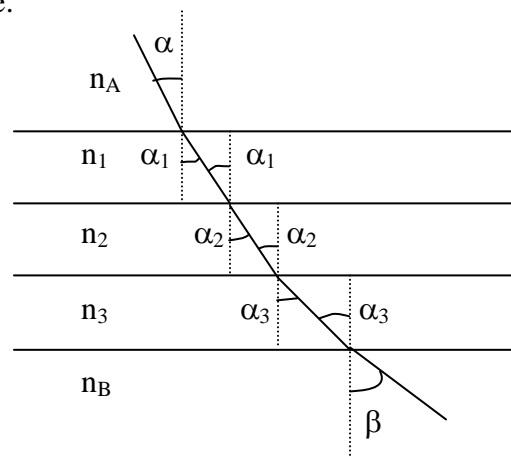


Fig.1

Aplicamos la ley de Snell

$$n_A \operatorname{sen} \alpha = n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = n_3 \operatorname{sen} \alpha_3 = n_B \operatorname{sen} \beta$$

La ecuación se cumple cualquiera que sea el número de capas comprendidas entre n_A y n_B .

b) Este fenómeno se debe a que la radiación solar calienta fuertemente el suelo del desierto y las capas de aire que están por encima. Se produce un gradiente de temperatura desde el suelo hacia el aire de modo que las capas más próximas al suelo se encuentran más calientes que las más alejadas. Como consecuencia de este gradiente de temperatura el índice de refracción de las capas de aire varía de modo que las más próximas al suelo tienen menor índice que las más alejadas. Un rayo de luz que venga de las capas altas se acerca al suelo y en su marcha atraviesa aire cuyo índice de refracción es cada vez menor. De este modo el rayo llega a una capa de aire y no se refracta sino que se refleja por haber alcanzado el ángulo límite. Si ese rayo alcanza un ojo humano se tiene la impresión que procede del suelo o que éste se comporta como un espejo y aparece el fenómeno de “ver agua” donde sólo hay arena. La figura 2 indica un esquema de esta situación.

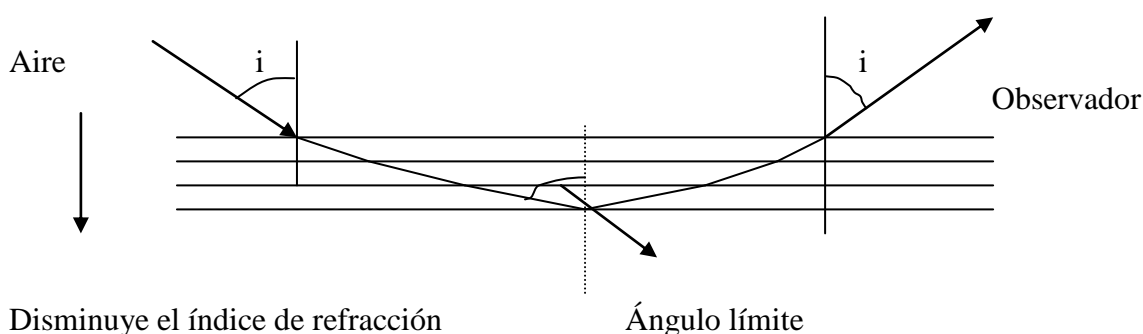


Fig. 2

Si el observador se mueve hacia la izquierda toda la figura se desplaza hacia la izquierda para que el fenómeno se repita. Si el observador se mueve hacia la derecha entonces toda la figura se desplaza hacia la derecha para que siga observando lo mismo que antes. En consecuencia el observador tiene la impresión de que “ el agua “ que cree percibir, se mueve del mismo modo que él lo hace. Este fenómeno es fácilmente observable cuando en días de verano se viaja en una carretera recta, el pasajero del coche ve “una mancha de agua” sobre la carretera que se desplaza en el mismo sentido que lo hace el coche.

b) Si nos fijamos en la figura 2 el rayo incidente proviene de una capa de aire superior a 1 metro sobre el suelo, por tanto, y de acuerdo con los datos del problema, ese aire se encuentra a 30°C . Admitimos que la reflexión total se produce en la capa de aire que se encuentra junto al suelo y cuya temperatura tratamos de averiguar y designamos con T . Se aplica la ley de Snell

$$n_{30} \text{sen} i = n_T \text{sen} 90$$

Para averiguar n_T tenemos el dato de la densidad del aire y el índice de refracción a 15°C

$$n_{30} = 1 + kd_{30} \quad ; \quad n_{15} = 1 + kd_{15} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_{30} - 1}{n_{15} - 1} = \frac{d_{30}}{d_{15}} \quad (1)$$

Si consideramos al aire como un gas perfecto

$$P = \frac{d_{15}}{M} RT \quad ; \quad P = \frac{d_{30}}{M} RT \quad \Rightarrow \quad \frac{d_{30}}{d_{15}} = \frac{T_{15}}{T_{30}} \quad (2)$$

Llevando la ecuación (2) a la (1) resulta:

$$\frac{n_{30} - 1}{n_{15} - 1} = \frac{T_{15}}{T_{30}} = \frac{208}{303} \quad \Rightarrow \quad n_{30} = 1,000262$$

Para averiguar el ángulo i , tenemos que el observador tiene sus ojos a 1,6 metros del suelo y ve la mancha de “agua” a 250 m, de la figura 2 (que no está a escala) se deduce que

$$\text{tg } i = \frac{250}{1,6} \quad \Rightarrow \quad i = 89,6333^\circ$$

$$n_{30} \text{sen} i = n_T = 1,000262 * 0,9999795 = 1,000242$$

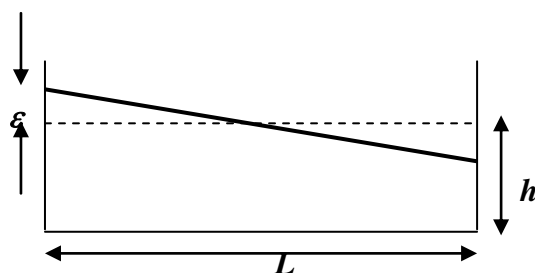
Finalmente

$$\frac{n_T - 1}{n_{15} - 1} = \frac{T_{15}}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{(1,0000276 - 1) \cdot 288}{1,0002452 - 1} = 328\text{K} \quad \Rightarrow \quad t = 55^\circ\text{C}$$

Los cálculos se han hecho bajo la suposición de que las longitudes de 250 m y 1,6 m son números exactos, así como las temperaturas de 15°C y 30°C .

2.-En algunos lagos se puede observar ocasionalmente como una especie de vibración del agua, como si toda la masa se moviera, algo parecido a cuando llevamos una taza sobre una bandeja. Normalmente este fenómeno se produce en lagos más bien largos, estrechos y poco profundos. El fenómeno no tiene nada que ver con el oleaje que a veces se puede observar. Con objeto de crear un modelo, llamamos L a la longitud de la vasija y h a la altura del agua. Suponemos que el nivel del agua forma un pequeño ángulo con la horizontal.

El agua comienza a oscilar de forma que su nivel se mantiene plano y lo hace alrededor de un eje horizontal tal como indica la figura



Se trata de encontrar un modelo para el movimiento del agua y que nos dé el periodo de oscilación. Los valores del modelo se comparan con los valores experimentales recogidos en las siguientes tablas

$L = 479 \text{ mm}$		$L = 143 \text{ mm}$	
h/mm	T/s	h/mm	T/s
30	1,78	31	0,52
50	1,40	38	0,48
69	1,18	58	0,43
88	1,08	67	0,35
107	1,00	124	0,28
124	0,91		
142	0,82		

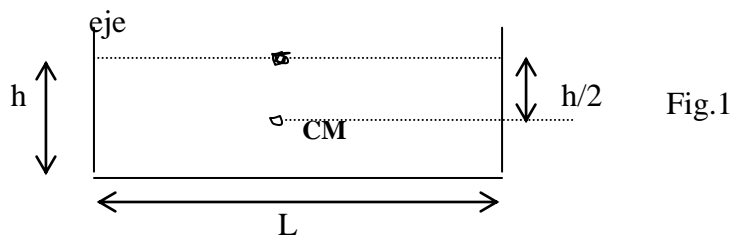
Se admite que $\epsilon \ll h$.

El lago Vättern en Suecia tiene una longitud de 123 km y una profundidad media de 50 m, con el modelo propuesto calcule el tiempo de oscilación del nivel del agua.

15ª Olimpiada Internacional de Física. Suecia . 1984

Primer modelo.

Suponemos que el movimiento de oscilación del agua es vibratorio armónico alrededor del eje que pasa por el centro de la vasija y por el nivel del agua tal como indica la figura 1.



Suponemos que todo gira como un conjunto alrededor del eje. El momento de inercia de la figura plana, respecto de un eje perpendicular al plano de la figura y que pase por el centro de masas (CM) es: $I_{CM} = \frac{1}{12} M(L^2 + h^2)$

Teniendo en cuenta que el eje es paralelo al anterior y a una distancia del anterior $h/2$, al aplicar el teorema de Steiner resulta :

$$I = \frac{1}{12} M(L^2 + h^2) + M \frac{h^2}{4} = \frac{1}{12} ML^2 + M \frac{h^2}{3}$$

El periodo de oscilación vale:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12} ML^2 + M \frac{h^2}{3}}{Mg \frac{h}{2}}} = 2\sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + \frac{h^2}{3}}{gh}} \quad (1)$$

Segundo modelo

Vamos a determinar cuánto se desplaza el centro de masas tanto en la dirección X como en la Y de acuerdo con la figura 2.

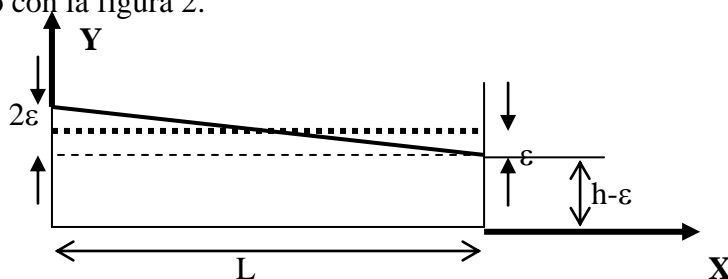
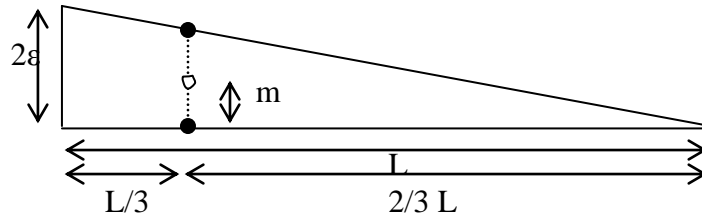


Fig .2

Cuando el agua esté en reposo el centro de masas tiene por coordenadas $(L/2 ; h/2)$. Cuando el agua alcance la oscilación máxima, ha bajado por el lado derecho una altura ε . A_1 es el área del rectángulo de base L y altura $h-\varepsilon$, cuyo centro de masas tiene por coordenadas $(L/2 ; (h-\varepsilon)/2)$. A_2 es el área del triángulo de base 2ε y altura L. La coordenada x_2 del centro de masas de ese triángulo es $L/3$ y su coordenada y_2 se calcula de la siguiente manera:



Comparando triángulos $\frac{L}{2\varepsilon} = \frac{\frac{2}{3}L}{2m} \Rightarrow m = \frac{2}{3}\varepsilon \Rightarrow y_2 = h - \varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = h - \frac{1}{3}\varepsilon$

Las coordenadas del centro de masas cuando el agua se desplaza a su máxima posición hacia la izquierda son:

$$X_{CM} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{L(h-\varepsilon)\frac{L}{2} + L\frac{2\varepsilon}{2}\frac{L}{3}}{L(h-\varepsilon) + L\varepsilon} = \frac{L}{2} - \frac{L\varepsilon}{6h}$$

$$Y_{CM} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{L(h-\varepsilon)\frac{h-\varepsilon}{2} + L\frac{2\varepsilon}{2}\left(h - \frac{1}{3}\varepsilon\right)}{Lh} = \frac{\frac{h^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon h + \varepsilon h - \frac{1}{3}\varepsilon^2}{h} = \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon^2}{6h}$$

Los desplazamientos que sufre el centro de masas son respectivamente

$$\Delta x = \left(\frac{L}{2} - \frac{L\varepsilon}{6h}\right) - \frac{L}{2} = -\frac{L\varepsilon}{6h} \quad \Delta y = \left(\frac{h}{2} + \frac{\varepsilon^2}{6h}\right) - \frac{h}{2} = \frac{\varepsilon^2}{6h}$$

Dado que el valor de ε es muy pequeño comparado con h se deduce que el desplazamiento sobre el eje X es mucho mayor que sobre el eje Y.

Cuando el centro de masas del agua se eleva una altura Δy gana una cierta cantidad de energía potencial que se convierte en cinética al pasar por la posición inicial

$$Mh \frac{\varepsilon^2}{6h} = \frac{1}{2} Mv^2 \Rightarrow v = \varepsilon \sqrt{\frac{g}{3h}}$$

Si admitimos que el movimiento del agua es armónico se cumple que

$$v = \text{Amplitud} * \omega \approx \frac{L\varepsilon}{6h} * \frac{2\pi}{T} = \varepsilon \sqrt{\frac{g}{3h}} \Rightarrow T = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}} \quad (2)$$

Comparamos los resultados que proporcionan los dos modelos con los valores experimentales

h/mm	T experimental	T (primer modelo)	T(segundo modelo)
30	1,78	2,28	1,60
50	1,40	1,79	1,24
69	1,18	1,55	1,06
88	1,08	1,41	0,94
107	1,00	1,31	0,85
124	0,91	1,25	0,79
142	0,82	1,21	0,74

Dado que un modelo da valores superiores y el otro inferiores hacemos una corrección y es utilizar la expresión : $0,3 * T(\text{primer modelo}) + 0,7 * T(\text{segundo modelo})$

Los resultados obtenidos son los siguientes

h/mm	T experimental	T (modelo corregido)
30	1,78	1,80
0	1,40	1,41
69	1,18	1,21
88	1,08	1,08
107	1,00	0,99
124	0,91	0,93
142	0,82	0,89

Para los otros datos experimentales tenemos:

L = 143 mm		
h/mm	T/s	T(modelo corregido)
31	0,52	0,55
38	0,48	0,50
58	0,43	0,43
67	0,35	0,40
124	0,28	0,37

El modelo corregido da muchos mejores resultados cuando los valores de h son más pequeños en donde las discrepancias son del orden máximo de un 6%.

Con el primer modelo el periodo de oscilación del lago Vättern de Suecia es

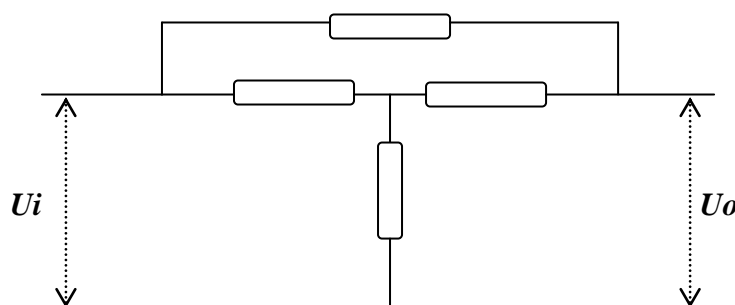
$$T = 2\sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{L^2}{12} + \frac{h^2}{3}} = 2\sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{(123 \cdot 10^3)^2}{12} + \frac{50^2}{3}} = 14246 \text{ s} = 4,0 \text{ horas}$$

Con el segundo modelo

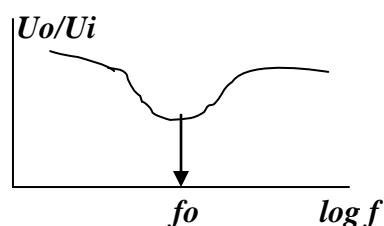
$$T = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}} = \frac{\pi * 123.10^3}{\sqrt{3 * 9,81 * 50}} = 10073 \text{ s} = 2,8 \text{ horas}$$

Con el modelo corregido: $T = 0,3 * 4,0 + 0,7 * 2,8 = 3,2 \text{ horas}$.

3.- La figura inferior representa un filtro electrónico que consta de cuatro componentes. La impedancia de entrada es despreciable y la impedancia de carga se supone que es infinita.



El filtro debe ser tal que el cociente entre U_{salida} (U_o) y $U_{entrada}$ (U_i) dependa de la frecuencia tal como indica la figura inferior. Para la frecuencia f_0 la diferencia de fase entre U salida y U entrada debe ser cero.



Para construir el filtro se pueden usar los siguientes componentes
 2 Resistencias de $10\text{ k}\Omega$; 2 Condensadores de 10 nF
 2 Bobinas de 160 mH

(Las bobinas no tienen entrehierro y su resistencia es despreciable).
 Combinado los componentes anteriores deben planificar un filtro que cumpla las condiciones de la figura. Calcular f_0 y el cociente $U_{entrada}/U_{salida}$ para esta frecuencia en todas las combinaciones posibles.
 15ª Olimpiada Internacional de Física. Suecia . 1984

Para el circuito de la figura 1

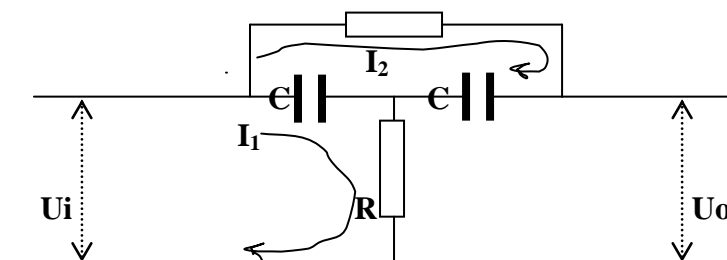


Fig. 1

I_2 representa la intensidad en la malla superior e I_1 en la inferior. Aplicamos la ley de las mallas en forma compleja:

$$\left. \begin{aligned} I_2 R + I_2 X_C + (I_2 - I_1) X_C &= 0 \\ (I_1 - I_2) X_C + I_1 R &= U \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones mediante la regla de Cramer resulta:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & R + 2X_C \\ U_i & -X_C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -X_C & R + 2X_C \\ X_C + R & -X_C \end{vmatrix}} = \frac{-(R + 2X_C)U_i}{X_C^2 - (R + 2X_C)(X_C + R)}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -X_C & 0 \\ X_C + R & U_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -X_C & R + 2X_C \\ X_C + R & -X_C \end{vmatrix}} = \frac{-X_C U_i}{X_C^2 - (R + 2X_C)(X_C + R)}$$

La caída de tensión en la salida vale:

$$U_o = I_2 X_C + I_1 R = \frac{-X_C^2 U_i - (R + 2X_C)R \cdot U_i}{X_C^2 - (R + 2X_C)(X_C + R)}$$

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{-X_C^2 - (R + 2X_C)R}{X_C^2 - (R + 2X_C)(X_C + R)} \Rightarrow \frac{U_o}{U_i} = \frac{X_C^2 + R^2 + 2RX_C}{X_C^2 + R^2 + 3RX_C}$$

Siendo:

$$X_C = -\frac{1}{C\omega} \mathbf{j} \quad ; \quad X_C^2 = \frac{1}{C^2\omega^2} \mathbf{j}^2 = -\frac{1}{C^2\omega^2} \quad ; \quad X_C^3 = \frac{1}{C^3\omega^3} \mathbf{j} \quad ; \quad X_C^4 = \frac{1}{C^4\omega^4}$$

Si llevamos estos valores a la relación U_o/U_i y operamos queda finalmente la relación compleja siguiente:

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{X_C^4 + R^4 - 4R^2 X_C^2 - (RX_C^3 + R^3 X_C) \mathbf{j}}{X_C^4 + R^4 - 7R^2 X_C^2}$$

Si U_o y U_i están en fase, la parte imaginaria del complejo anterior debe ser nula

$$RX_C^3 + R^3X_C = 0 \Rightarrow X_C^2 + R^2 = 0 \quad ; -\frac{1}{C_2\omega^2} + R^2 = 0 \Rightarrow \omega_o = \frac{1}{RC} = 10^4 s^{-1} \Rightarrow$$

$$f_o = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 1,6 \text{ kHz}$$

De la parte real se deduce:

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{X_C^4 + R^4 - 4R^2X_C^2}{X_C^4 + R^4 - 7R^2X_C^2} = \frac{\frac{1}{C^4\omega_o^4} + R^4 + 4R^2 \frac{1}{C^2\omega_o^2}}{\frac{1}{C^4\omega_o^4} + R^4 + 7R^2 \frac{1}{C^2\omega_o^2}}$$

Sustituyendo los siguientes valores en la expresión anterior tenemos:

$$\frac{1}{C\omega_o} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-9} \cdot 10^4} = 10^4 \quad ; \quad \frac{1}{C^2\omega_o^2} = 10^8 \quad ; \quad \frac{1}{C^4\omega_o^4} = 10^{16}$$

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{10^{16} + (10^4)^4 + 4(10^4)^2 \cdot 10^8}{10^{16} + (10^4)^4 + 7(10^4)^2 \cdot 10^8} = \frac{2}{3}$$

La relación en módulo de U_o/U_i depende de la frecuencia. En la figura 2 se ha representado dicho módulo frente al logaritmo decimal de la frecuencia, obteniéndose una curva que presenta un mínimo para la frecuencia $f_o = 1,6 \text{ kHz}$. ($\log f_o = 3,2$)

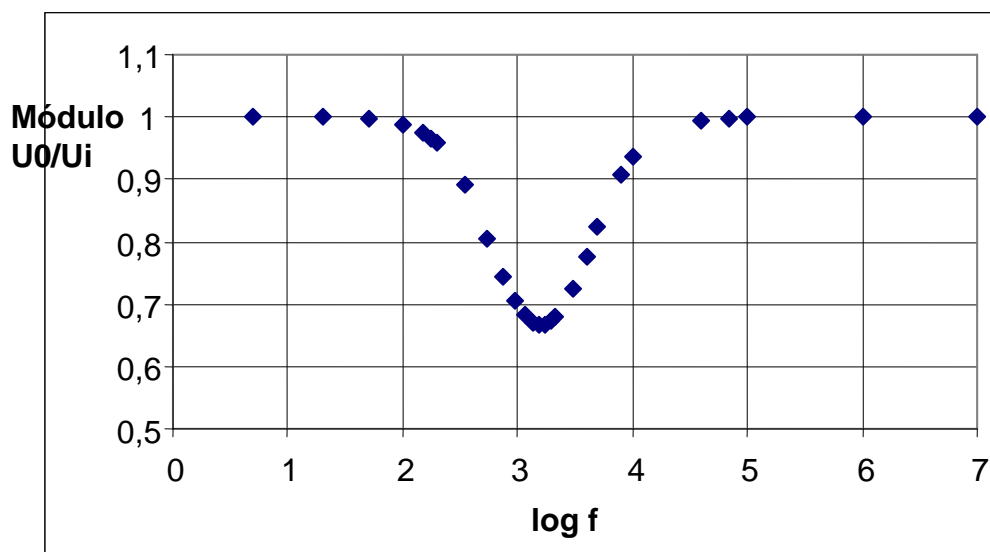


Fig. 2

El circuito de la figura 3, se resuelve de la misma manera anterior.

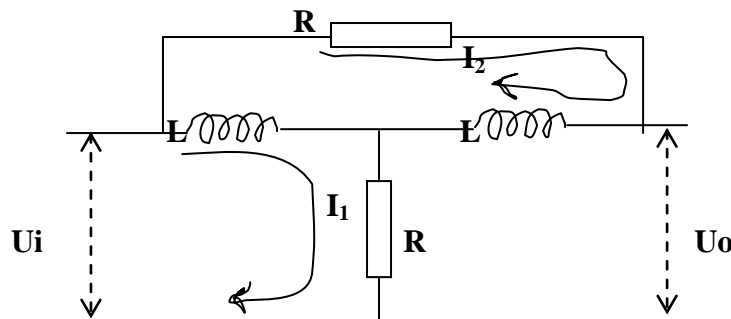


Fig. 3

Es preciso cambiar X_C por X_L

$$\mathbf{X}_L = L\omega \mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{X}_L^2 = L^2\omega^2 \mathbf{j}^2 = -L^2\omega^2 \quad ; \quad \mathbf{X}_L^3 = -L^3\omega^3 \mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{X}_L^4 = L^4\omega^4$$

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{X_L^4 + R^4 - 4R^2 X_L^2 - (RX_L^3 + R^3 X_L)j}{X_L^4 + R^4 - 7R^2 X_L^2}$$

Si se iguala la parte imaginaria a cero resulta:

$$RX_L^3 + R^3 X_L = 0 \quad \Rightarrow \quad X_L^2 + R^2 = 0 \quad ; \quad -L^2\omega^2 + R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{R}{L} = 62500 \text{ s}^{-1} \Rightarrow$$

$$f_o = \frac{R}{2\pi L} = \frac{10 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 160 \cdot 10^{-3}} = 10 \text{ kHz}$$

Si en la parte real de la expresión U_o/U_i se sustituyen valores se llega al resultado:

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{2}{3}$$

La gráfica del logaritmo de la frecuencia frente al modulo está en la figura 4. Es semejante a la de la figura 2 salvo que el mínimo aparece a distinta frecuencia.

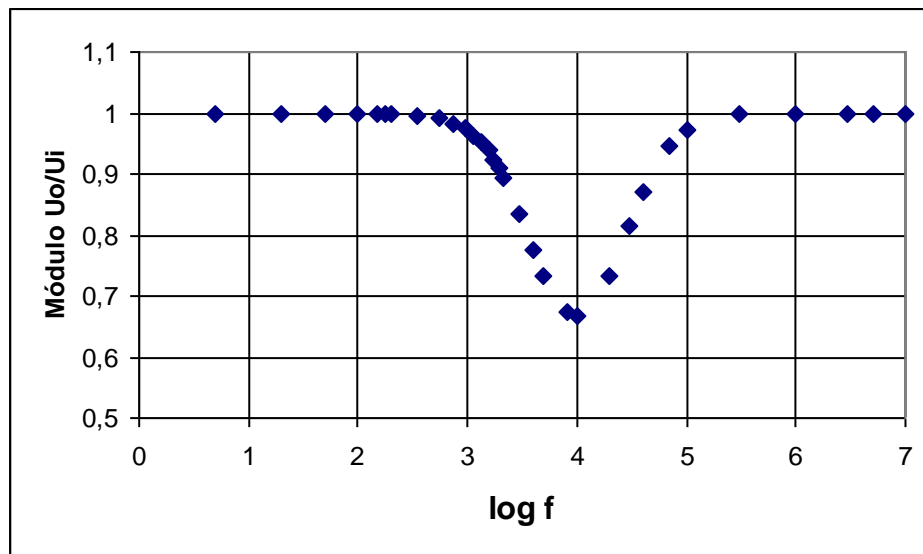


Fig. 4