

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

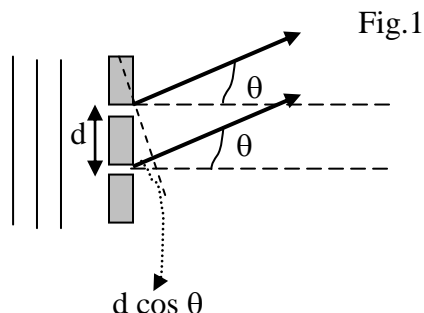
José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

17ª OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. GRAN BRETAÑA. 1986

1.-Una onda luminosa monocromática de longitud de onda λ y frecuencia f incide normalmente sobre dos rendijas estrechas iguales, separadas por una distancia d , tal como indica la figura 1.



La onda de luz emergiendo de cada rendija a una distancia x y para un tiempo t viene dada por

$$y = a \cos 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Siendo a la amplitud que es la misma para las dos ondas, (se supone que $x \gg d$)

1) Mostrar que las dos ondas observadas para un ángulo θ con la normal a las rendijas, tiene una amplitud resultante A , la cual se puede calcular sumando dos vectores cada uno de ellos con un módulo a y con una dirección asociada, determinada por la fase de la onda de luz.

Verificar geoméricamente, a partir del diagrama vectorial, que

$$A = 2a \cos \beta, \quad \text{siendo} \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

2) La doble rendija se sustituye por un red de difracción con N rendijas igualmente espaciadas, con una distancia d entre dos rendijas consecutivas. Utilice el método vectorial de sumar amplitudes, para mostrar que los vectores amplitud, cada uno de módulo a , forman parte de un polígono regular con vértice en un círculo de radio R de valor

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta}$$

Deducir que la amplitud resultante es: $\frac{a \sin N\beta}{\sin \beta}$ y obtener la diferencia de fase relativa

3) Dibujar en la misma gráfica, $\text{sen } N\beta$ y $\frac{1}{\text{sen } \beta}$ en función de β . En otra gráfica mostrar como la intensidad de la onda resultante varía en función de β .

4) Determinar las intensidades de los máximos principales

5) Calcular el número de máximos principales

6) Mostrar que dos longitudes de onda λ y $\lambda + \delta\lambda$, donde $\delta\lambda \ll \lambda$ producen máximos principales con una separación angular

$$\Delta\theta = \frac{n \Delta\lambda}{d \cos \theta}, \text{ con } n = 0, \pm 1; \pm 2, \dots \text{etc}$$

Calcular la separación para las líneas D del sodio

$$\lambda = 589,0 \text{ nm}, \lambda + \Delta\lambda = 589,6 \text{ nm}, n = 2 \text{ y } d = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Recordar; $\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

1) La diferencia de caminos recorridos por las dos ondas (ver la figura 1) es $d \text{ sen } \theta$, lo que se traduce en un ángulo de desfase Φ

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{d \text{ sen } \theta}{\Phi} \Rightarrow \Phi = \frac{2\pi d \text{ sen } \theta}{\lambda}$$

El diagrama vectorial, para las dos ondas está en la figura 2.

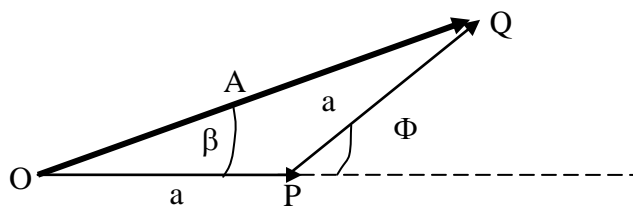


Fig.2

OPQ es un triángulo isósceles cuyos lados iguales valen cada uno a .

$$\beta + \beta + (180 - \Phi) = 180 \Rightarrow 2\beta = \Phi \Rightarrow \beta = \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi d \text{ sen } \theta}{\lambda}$$

De la figura 2 se deduce:

$$A \cos \beta = a + a \cos \Phi \Rightarrow A = \frac{a(1 + \cos \Phi)}{\cos \beta} = \frac{a(1 + \cos 2\beta)}{\cos \beta} = \frac{a \cdot 2 \cos^2 \beta}{\cos \beta} = 2a \cos \beta$$

2) El método vectorial de sumar amplitudes es ir colocando vectores uno a continuación del otro con un ángulo entre ellos Φ , como indica la figura 3

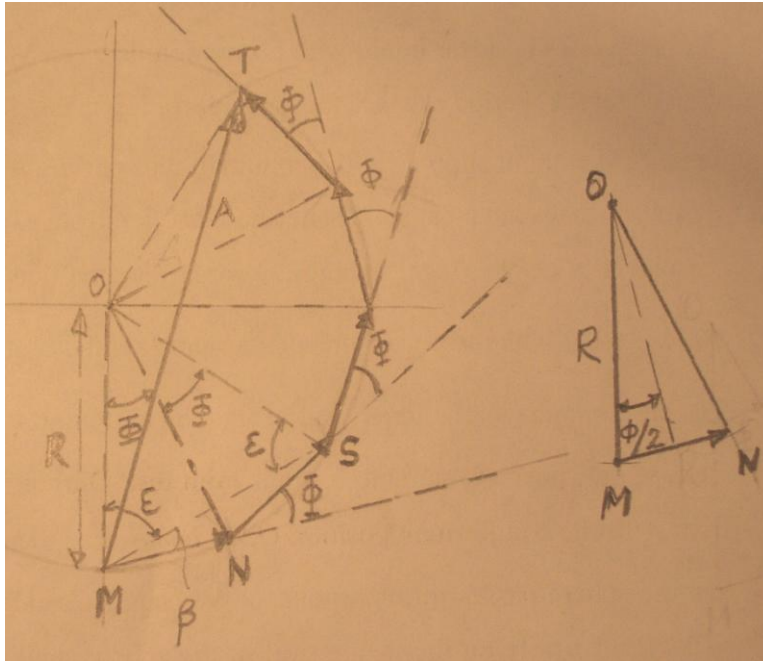


Fig.3

Veamos por qué el ángulo MON es igual a Φ . En el triángulo MON (fig.3), se cumple $MON + 2(\epsilon + \beta) = 180^\circ$. En el triángulo MOS se cumple

$$MOS + 2\epsilon = 2MON + 2\epsilon = 180^\circ.$$

Combinando ambas ecuaciones

$$MON - 2\beta = 0 \Rightarrow MON = 2\beta = \Phi$$

En el triángulo MON trazamos la bisectriz del ángulo Φ que corta a MN a la mitad, por tanto:

$$\text{sen} \frac{\Phi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \text{sen} \frac{\Phi}{2}} = \frac{a}{2 \text{sen} \beta}$$

La figura 4 es la misma que la 3, aunque simplificada. El ángulo MOT es 5Φ . OW es perpendicular a MT .

$$\text{sen} \frac{5\Phi}{2} = \frac{\frac{A}{2}}{R} \Rightarrow A = 2R \text{sen} \frac{5\Phi}{2} \Rightarrow A = 2 \cdot \frac{a}{2 \text{sen} \beta} \cdot \text{sen} \frac{5\Phi}{2} = \frac{a}{\text{sen} \beta} \cdot \text{sen} 5\beta$$

$$\rho = \varepsilon + \beta - \delta = \varepsilon + \beta - \left(\varepsilon + \Phi - N \frac{\Phi}{2} \right) = \beta - 2\beta + N\beta = \beta(N-1)$$

3) La gráfica $\frac{1}{\text{sen } \beta}$ tenderá a infinito cuando beta sea 0° , 180° y en ese intervalo tendrá valores positivos; tenderá a infinito para 180° y 360° , pero sus valores serán negativos. La gráfica $\text{sen}(N\beta)$ es una función senoidal.(fig.5).

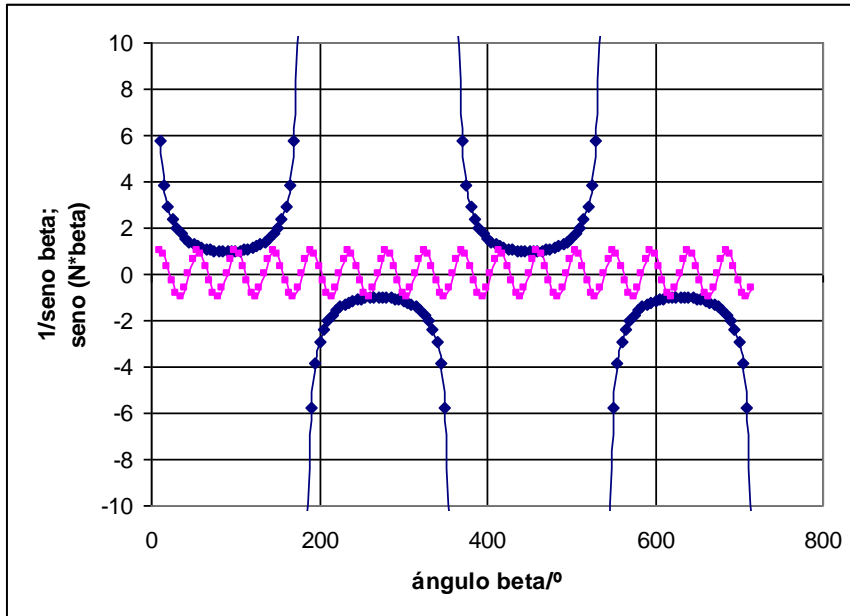


Fig.5

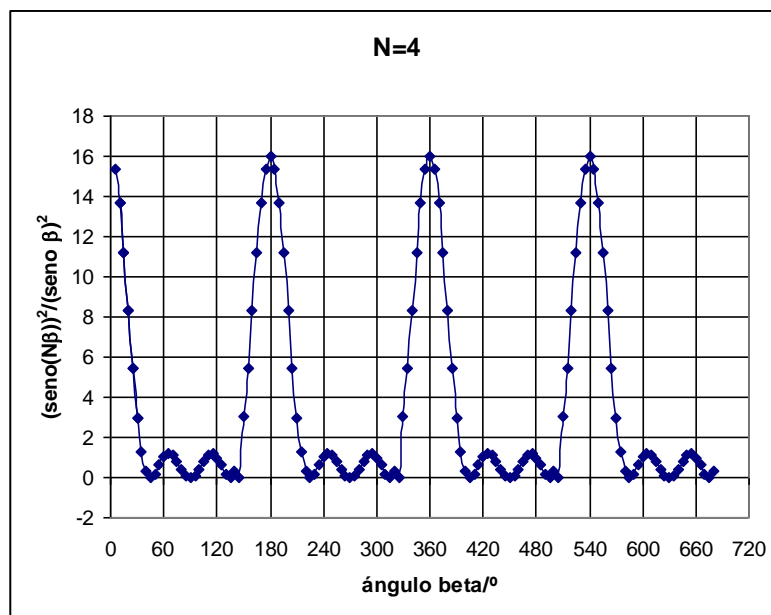


Fig.6

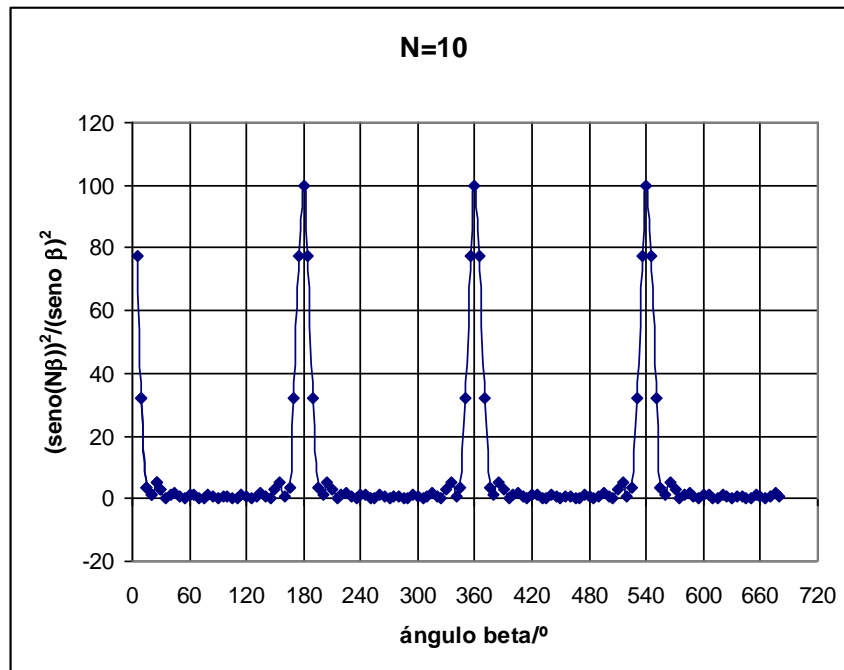


Fig 7

La figura 6 se ha realizado para $N=4$ y la figura 7 para $N=10$. A medida que N aumenta los máximos principales son más agudos y menos destacados los secundarios.

4) La ecuación (1) $I = I_0 \frac{\text{sen}^2(N\beta)}{\text{sen}^2\beta}$ nos da las intensidades en función de β . El cociente

$\frac{\text{sen}^2(N\beta)}{\text{sen}^2\beta}$ indeterminado para los máximos, se puede calcular sustituyendo los senos por los

ángulos $\frac{(N\beta)^2}{\beta^2} = N^2$. La intensidad de los máximos es:

$$I_{\max} = I_0 N^2$$

5) Los máximos principales, recogidos en una pantalla lejana de la red, se producen cuando la diferencia de marcha es un múltiplo entero de la longitud de onda, $d \text{ sen } \theta = n\lambda \Rightarrow n = \frac{d}{\lambda} \text{ sen } \theta$, el valor máximo de n está condicionado porque el seno no puede ser mayor que 1, y el número de máximos es igual a los valores que puede tomar $n=0,1,2,\dots \leq \frac{d}{\lambda}$.

Por ejemplo para una red de difracción con 600 líneas por mm y empleando una luz de 5000 Å

$$d = \frac{1}{600 \text{ mm}^{-1}} = \frac{10^{-3}}{600} \text{ m} \Rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{10^{-3}}{600 \cdot 5000 \cdot 10^{-10}} = 3,3$$

El número de máximos es 4, que corresponde a los valores $n=0,1,2,3$

$$\text{sen } \theta = n \frac{\lambda}{d}, \text{ para } n = 0, \quad \text{sen } \theta = 0$$

$$\text{para } n = 1, \quad \text{sen } \theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{1}{3,3} \Rightarrow \theta = 17,6^\circ$$

$$\text{para } n = 2, \quad \text{sen } \theta = 2 \frac{\lambda}{d} = \frac{2}{3,3} \Rightarrow \theta = 37,3^\circ$$

$$\text{para } n = 3, \quad \text{sen } \theta = 3 \frac{\lambda}{d} = \frac{3}{3,3} \Rightarrow \theta = 65,3^\circ$$

para $n = 4$ es imposible ya que el seno es mayor que la unidad

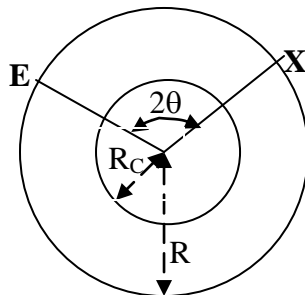
6) Diferenciamos la ecuación

$$d \text{ sen } \theta = n d\lambda \Rightarrow d \cos \theta d\theta = n d\lambda \Rightarrow d\theta = \frac{n d\lambda}{d \cos \theta} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{n \Delta\lambda}{d \cos \theta}$$

$$\Delta\theta = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-9}}{1,2 \cdot 10^{-6} \cdot \cos \theta} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \lambda^2}{d^2}}} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{1 - \frac{4 \cdot (589,0 \cdot 10^{-9})^2}{(1,2 \cdot 10^{-6})^2}}} =$$

$$\Delta\theta = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

2.-A principios de este siglo se propuso un modelo para la constitución de la tierra, consistente en una capa esférica homogénea sólida isotrópica de radio R , concéntrica con ella existe un núcleo en estado líquido de radio R_C (ver figura 1).



Fig,1

Las ondas longitudinales (ondas P) y transversales (ondas S) de un terremoto se propagan con velocidades constantes V_P y V_S por el manto de la tierra. Por el núcleo se propagan solamente las ondas P con una velocidad $V_{CP} < V_P$.

Un terremoto que ocurre en la superficie terrestre en E , produce ondas sísmicas que se desplazan a través de la Tierra y son detectadas por un observador que puede estar situado en cualquier punto de la superficie terrestre, designando esta posición con X en la figura 1. La separación angular entre E y X se determina mediante el ángulo 2θ , siendo O el centro de la Tierra.

1) Mostrar que las ondas sísmicas que viajan a través del manto en línea recta llegarán a X en un tiempo t después de ocurrir el terremoto

$$t = \frac{2R \operatorname{sen} \theta}{v} \quad \text{para } \theta \leq \arccos\left(\frac{R_C}{R}\right)$$

Siendo $v = V_P$, para las ondas P y V_S , para las ondas S .

2) Existen posiciones de X para las que las ondas sísmicas llegan después de refractarse en la superficie manto-núcleo. Dibujar el camino de tales ondas P . Obtener una relación entre θ e i , siendo i el ángulo con que inciden las ondas en la superficie de separación manto-núcleo

3) A partir de los siguientes datos: $R = 6370 \text{ km}$, $R_C = 3470 \text{ km}$, $V_P = 10,8 \text{ km/s}$, $V_S = 6,31 \text{ km/s}$, $V_{CP} = 9,02 \text{ km/s}$, y el resultado obtenido en el apartado 2, dibujar una gráfica θ frente a i . Comentar qué ondas le

llegan a un observador X dependiendo de su situación en la superficie terrestre. Hacer un bosquejo del tiempo de viaje que emplean las ondas P y S en función de θ para $\theta \leq 90^\circ$.

4) Después de un terremoto, un observador mide que el tiempo de demora con que le llegan las ondas P y S es de 2 minutos y 11 segundos. Deducir la separación angular de este observador respecto del terremoto (ángulo 2θ).

5) El observador del apartado 4 detecta que después de la llegada de las ondas P y S , su sismómetro registra la llegada de nuevas ondas P y S con un intervalo entre ellas de 6 minutos y 37 segundos. Explicar este hecho y verificar que el resultado es consistente con la posición que ocupa el observador.

En la figura 2, E indica la posición del terremoto y X la del observador, siendo $EX=L$ la distancia en línea recta entre ambos. EXO es un triángulo isósceles de lados iguales a R .

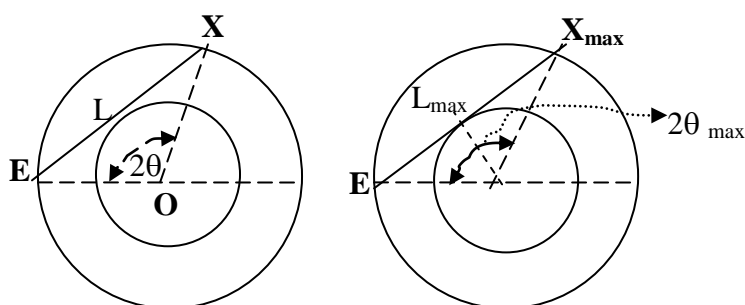


Fig.2

$$v = \frac{L}{t}; \quad \text{sen } \theta = \frac{L}{2R} \Rightarrow t = \frac{2R \text{ sen } \theta}{v} \Rightarrow t_p = \frac{2R \text{ sen } \theta}{V_p} \text{ y } t_s = \frac{2R \text{ sen } \theta}{V_s}$$

Si X ocupa una posición tal que la recta L es tangente a la esfera del núcleo, las ondas le pueden llegar directamente. Esa posición marca precisamente el valor de $2\theta_{\text{máximo}}$, para valores inferiores a ese máximo las ondas P y S le llegan directamente al observador.

$$\cos \theta_{\text{max}} = \frac{R_c}{R} \Rightarrow \theta \leq \arccos \left(\frac{R_c}{R} \right)$$

2) Una onda P que se genera en E se desplaza por el manto hasta llegar a la interfase manto-núcleo donde se refracta siguiendo la ley de Snell

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{V_p}{V_{cp}} \quad (1)$$

Al llegar de nuevo a la interfase se vuelve a refractar. La marcha de este rayo se indica en la figura 3, la cual se ha hecho a escala con los datos del problema.

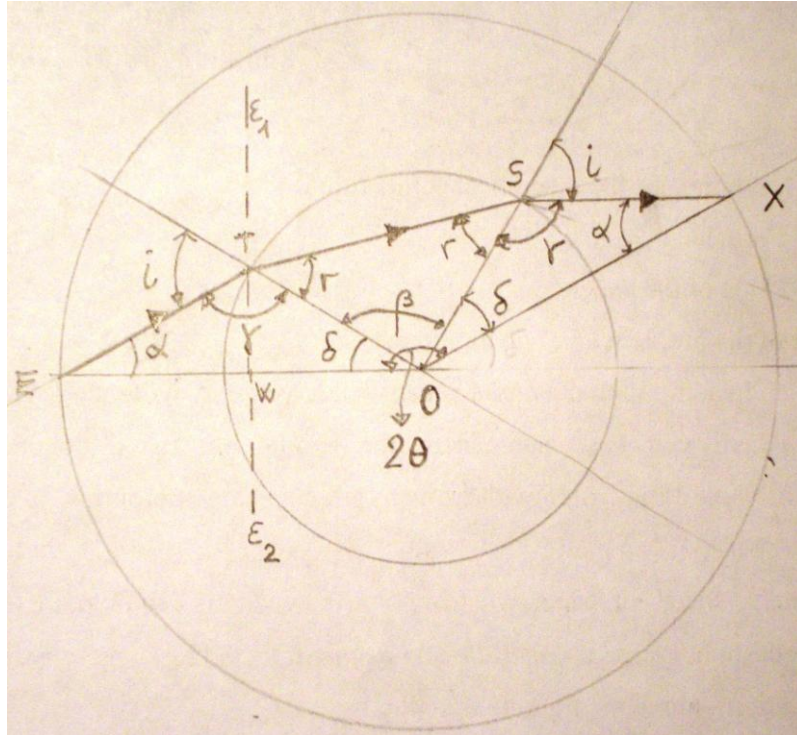


Fig.3

De dicha figura se observan las siguientes relaciones entre los ángulos

$$\begin{aligned} 2\theta &= \beta + 2\delta, \\ \alpha + \delta + \gamma &= \pi ; \quad \gamma + i = \pi \quad \Rightarrow \delta = i - \alpha \\ \beta + 2r &= \pi \end{aligned}$$

En la mencionada figura se ha trazado la recta $\epsilon_1\epsilon_2$ que es perpendicular a OE

$$\text{sen } \alpha = \frac{WT}{ET} ; \quad \text{sen } \delta = \frac{WT}{R_c} \quad \Rightarrow \quad ET \cdot \text{sen } \alpha = R_c \text{sen } \delta$$

Aplicamos la regla de los senos en el triángulo EOT

$$\frac{\text{sen } \gamma}{R} = \frac{\text{sen } \delta}{ET} \quad \Rightarrow \quad ET = \frac{R \text{sen } \delta}{\text{sen } \gamma}$$

De las dos últimas ecuaciones:

$$\frac{R \text{sen } \delta}{\text{sen } \gamma} \cdot \text{sen } \alpha = R_c \text{sen } \delta \quad \Rightarrow \quad \text{sen } \alpha = \frac{R_c \text{sen } \gamma}{R} ; \quad \text{como } \delta = i - \alpha$$

$$\delta = i - \text{arco seno} \left(\frac{R_c}{R} \text{sen } \gamma \right) = i - \text{arco seno} \left(\frac{R_c}{R} \text{sen} (\pi - i) \right) = i - \text{arco seno} \left(\frac{R_c}{R} \text{sen } i \right)$$

$$\text{Como } \beta = \pi - 2r = \pi - 2 \text{arco seno} \left[\frac{V_{CP}}{V_P} \text{sen } i \right]$$

$$2\theta = \beta + 2\delta = \pi - 2 \arcsen\left(\frac{V_{CP}}{V_P} \sen i\right) + i - \arcsen\left(\frac{R_C}{R} \sen i\right) \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + i - \arcsen\left(\frac{V_{CP}}{V_P} \sen i\right) - \arcsen\left(\frac{R_C}{R} \sen i\right)$$

$$\frac{V_{CP}}{V_P} = \frac{9,02}{10,85} = 0,831 ; \quad \frac{R_C}{R} = \frac{3470}{6370} = 0,545$$

$$\theta = 90^\circ + i - \arcsen(0,831 \cdot \sen i) - \arcsen(0,545 \cdot \sen i) \quad (2)$$

Con ayuda de la calculadora damos valores a i en la ecuación (2).

$$i=10, \theta=100-8,296-5,430=86,30 \quad i=20, \theta=110-16,512-10,743=82,75$$

$$i=30, \theta=120-24,550-15,813=79,64 \quad i=40, \theta=130-32,287-20,507=77,21$$

$$i=50, \theta=140-39,537-24,676=75,79 \quad i=60, \theta=150-46,027-28,163=75,81$$

$$i=70, \theta=160-51,342-30,806=77,85 \quad i=80, \theta=170-54,922-32,461=82,62$$

$$i=90, \theta=180-56,202-33,025=90,77$$

Los datos anteriores nos dicen que la función presenta un mínimo entre 50° y 60°

$$i=55, \theta=145-42,900-26,515=75,59 \quad i=56, \theta=146-43,545-26,861=75,59$$

Tomamos como mínimo $i=55^\circ$ al cual corresponde $\theta=75,6^\circ$

La gráfica θ frente a i es la figura 4.

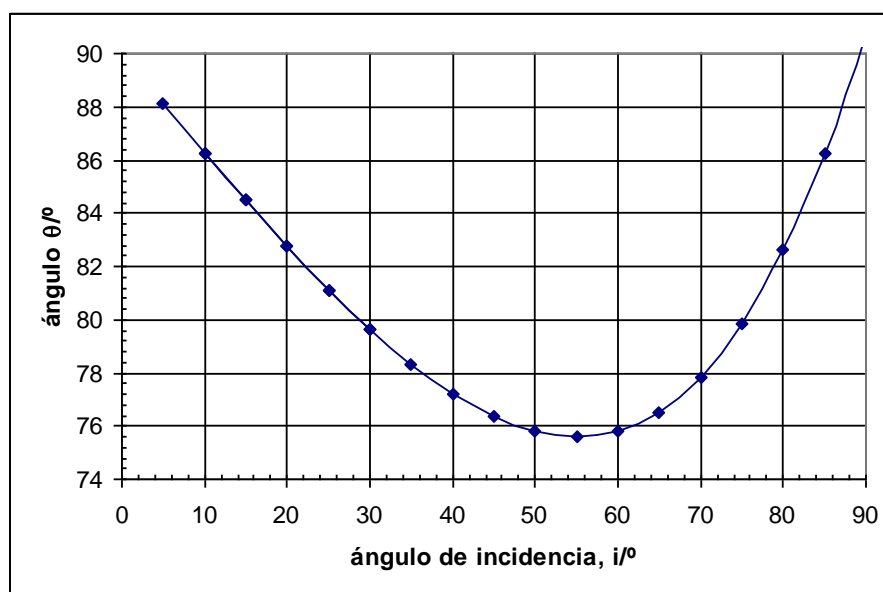


Fig.4

La figura 5 se ha dibujado a escala con el ángulo de incidencia mínimo de 55° , al que corresponde un ángulo $2\theta = 2 \cdot 75,6 = 151,2^\circ$

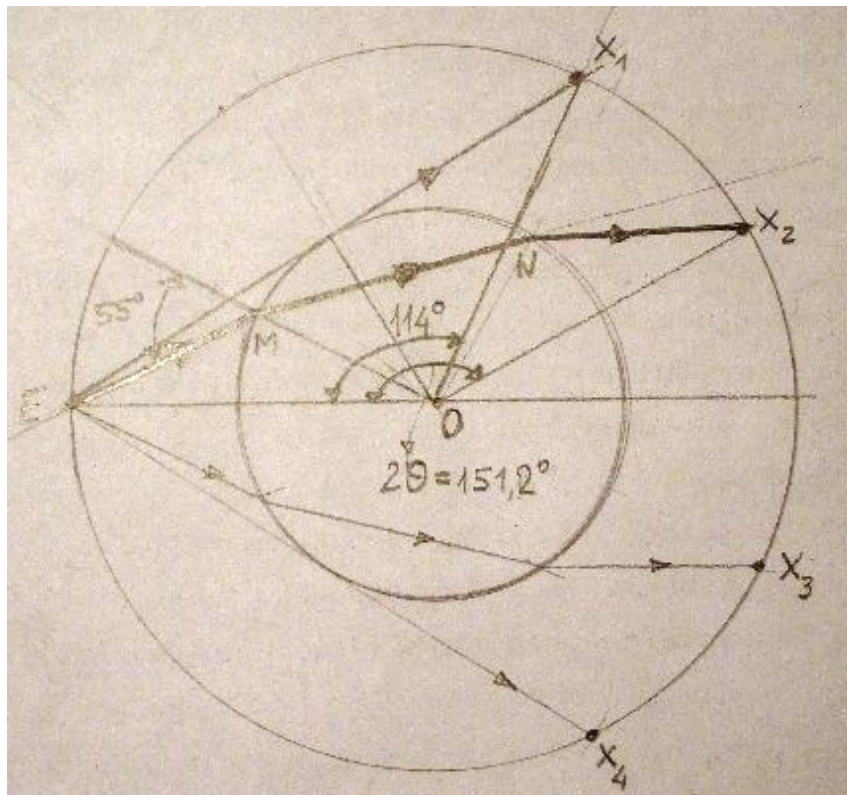


Fig.5

Al punto X_1 de la figura 5 le corresponde un ángulo

$$\cos \theta_{\max} = \frac{R_c}{R} = \frac{3470}{6370} = 0,545 \Rightarrow \theta_{\max} = 57^\circ \Rightarrow 2\theta_{\max} = 114^\circ$$

Todos los observadores situados entre E y X_1 y entre E y X_4 pueden recibir ondas sísmicas directas P y S . Los observadores situados entre X_2 y X_3 pueden recibir ondas P refractadas en el núcleo.

Los observadores situados entre X_1 y X_2 y entre X_3 y X_4 no reciben ondas ya que según la gráfica de la figura 4, cuando el ángulo de incidencia es mayor de 55° $2\theta > 151,2^\circ$ y cuando $i < 55^\circ$, $2\theta > 151,2^\circ$.

Como las ondas P son más veloces que las S , el tiempo de llegada a un lugar será menor, las ondas P que se refractan se propagan en el núcleo con menor velocidad que en el manto. Un bosquejo del tiempo frente a está en la figura 6.

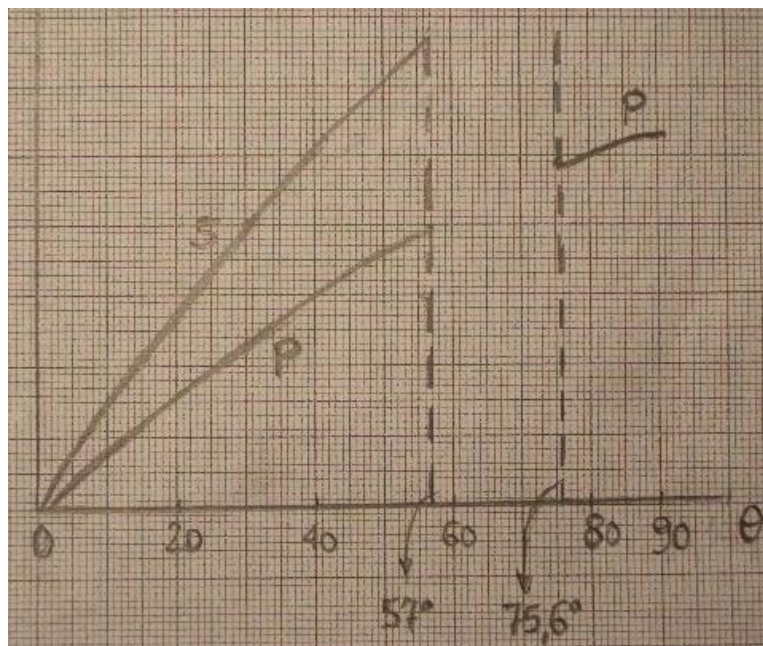


Fig.6

4) Designamos con L a la distancia que existe de E al punto X del observador

$$t_P = \frac{L}{V_P} ; \quad t_S = \frac{L}{V_S} \Rightarrow t_S - t_P = L \left(\frac{1}{V_S} - \frac{1}{V_P} \right) \Rightarrow L = \frac{(t_S - t_P)V_P V_S}{(V_P - V_S)}$$

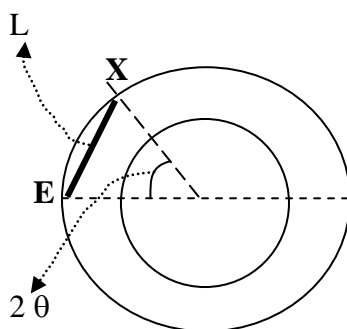


Fig.7

De la figura 7 se deduce:

$$\text{sen } \theta = \frac{\frac{L}{2}}{R} = \frac{(t_S - t_P)V_P V_S}{2R(V_P - V_S)} = \frac{131 \cdot 10,85 \cdot 6,31}{2 \cdot 6370(10,85 - 6,31)} = 0,155 \Rightarrow 2\theta = 17,8^\circ$$

5) Al observador situado en X le llegan de forma directa, esto es, recorriendo el camino L las ondas P y S . Pero también le llegan las ondas que inciden en la superficie de separación manto-núcleo y que se reflejan en ella y que por ello siguen el camino $D+D=2D$

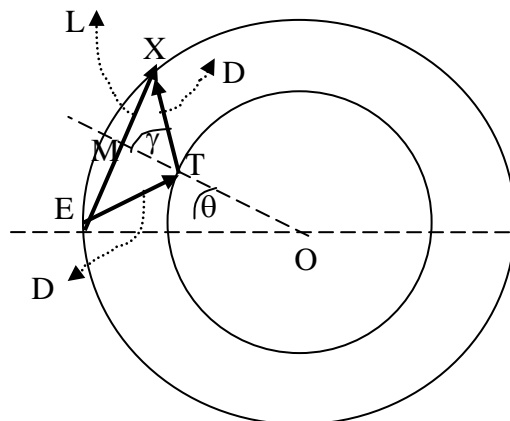


Fig.8

De la figura 8 se deduce:

$$\sin \theta = \frac{\frac{L}{2}}{R} \Rightarrow L = 2R \sin \theta = 2 \cdot 6370 \cdot \sin \frac{17,8}{2} = 1971 \text{ km}$$

$$OM = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{6370^2 - 985,5^2} = 6293 \text{ km}; TM = OM - R_c = 6293 - 3470 = 2823 \text{ km}$$

$$\tan \gamma = \frac{\frac{L}{2}}{TM} = \frac{985,5}{2823} \Rightarrow \gamma = 19,24^\circ; \quad \sin 19,24 = \frac{\frac{L}{2}}{D} \Rightarrow D = \frac{\frac{L}{2}}{\sin 19,24} = \frac{985,5}{0,3296} = 2990 \text{ km}$$

Designamos que en el lugar en que se produce el terremoto $t=0$. Los tiempos que tardan en llegar las ondas P y S a X siguiendo el camino D+D son:

$$T_P = \frac{2D}{V_P}; T_S = \frac{2D}{V_S} \Rightarrow T_S - T_P = 6 \text{ min } 37 \text{ s} = 397 \text{ s} = \frac{2D}{V_S} - \frac{2D}{V_P} \Rightarrow 397 \cdot V_S \cdot V_P = 2D(V_P - V_S) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{397 \cdot V_S \cdot V_P}{2(V_P - V_S)} = \frac{397 \cdot 10,85 \cdot 6,31}{2 \cdot 4,54} = 2993 \text{ km}$$

3.-Tres partículas cada una de masa m , están en equilibrio y unidas por muelles no estirados, sin masa, los cuales obedecen a la ley de Hooke, siendo su constante k . Las masas están obligadas a moverse por una circunferencia tal como indica la figura 3.1.

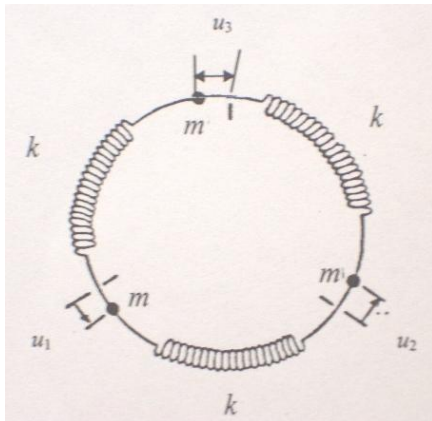
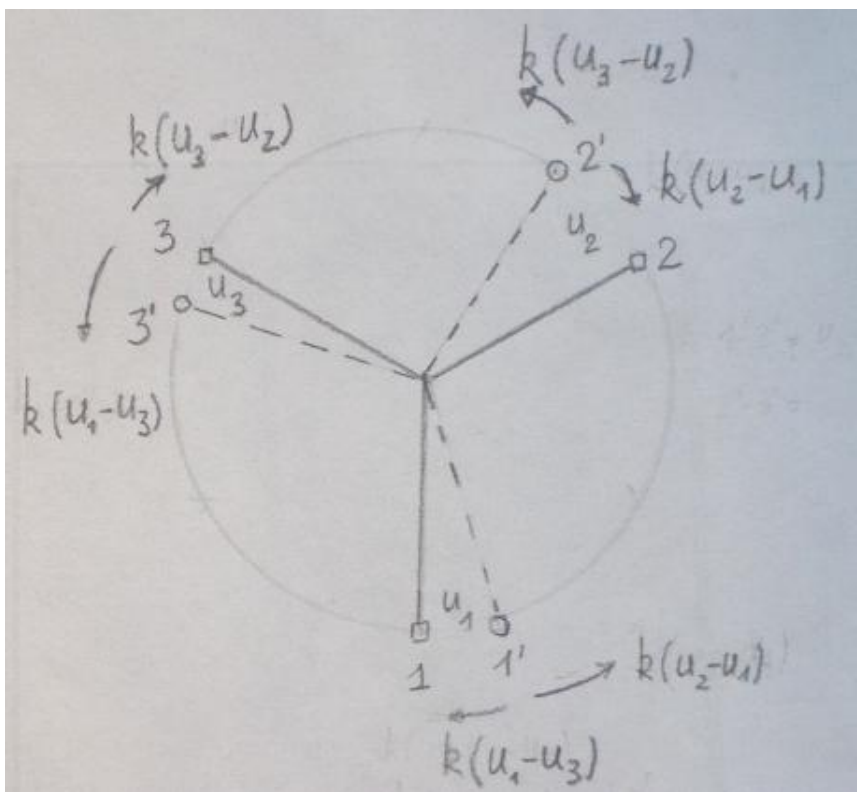


Fig.3.1

I.- Cada masa sufre un pequeño desplazamiento respecto su posición de equilibrio: u_1 , u_2 , u_3 respectivamente, escribir la ecuación de cada una de las masas.

En la figura inferior se indican los desplazamientos y las fuerzas sobre cada partícula



$$\begin{aligned} m \frac{d^2 u_1}{dt^2} &= k(u_2 - u_1) - k(u_1 - u_3) \Rightarrow \frac{d^2 u_1}{dt^2} = \omega_0^2(u_2 - u_1) - \omega_0^2(u_1 - u_3) \\ m \frac{d^2 u_2}{dt^2} &= k(u_3 - u_2) - k(u_2 - u_1) \Rightarrow \frac{d^2 u_2}{dt^2} = \omega_0^2(u_3 - u_2) - \omega_0^2(u_2 - u_1) \\ m \frac{d^2 u_3}{dt^2} &= k(u_1 - u_3) - k(u_3 - u_2) \Rightarrow \frac{d^2 u_3}{dt^2} = \omega_0^2(u_1 - u_3) - \omega_0^2(u_3 - u_2) \end{aligned}$$

II.- Verificar que el sistema tiene una solución armónica $u_n = u_n(0) \cos \omega t$ con $n=1, 2, 3$ y ω la frecuencia angular, con tres posibles valores

$$\omega_0 \sqrt{3}, \omega_0 \sqrt{3} \text{ y } 0, \quad \text{donde } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$u_1 = u_1(0) \cos \omega t \rightarrow \frac{du_1}{dt} = -u_1(0) \cdot \omega \cdot \text{sen } \omega t \rightarrow \frac{d^2 u_1}{dt^2} = -u_1(0) \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t = -\omega^2 u_1$$

$$u_2 = u_2(0) \cos \omega t \rightarrow \frac{du_2}{dt} = -u_2(0) \cdot \omega \cdot \text{sen } \omega t \rightarrow \frac{d^2 u_2}{dt^2} = -u_2(0) \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t = -\omega^2 u_2$$

$$u_3 = u_3(0) \cos \omega t \rightarrow \frac{du_3}{dt} = -u_3(0) \cdot \omega \cdot \text{sen } \omega t \rightarrow \frac{d^2 u_3}{dt^2} = -u_3(0) \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t = -\omega^2 u_3$$

Sustituyendo en las ecuaciones

$$\begin{aligned} -\omega^2 u_1 &= \omega_0^2(u_2 - u_1) - \omega_0^2(u_1 - u_3) \Rightarrow u_1(2\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2(u_2 + u_3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (u_1(0) \cos \omega t)(2\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2 \cos \omega t [u_2(0) + u_3(0)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_1(0)(2\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^2 u_2(0) - \omega_0^2 u_3(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 u_2 &= \omega_0^2(u_3 - u_2) - \omega_0^2(u_2 - u_1) \Rightarrow u_2(2\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2(u_3 + u_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (u_2(0) \cos \omega t)(2\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2 \cos \omega t [u_3(0) + u_1(0)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_2(0)(2\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^2 u_3(0) - \omega_0^2 u_1(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 u_3 &= \omega_0^2(u_1 - u_3) - \omega_0^2(u_3 - u_2) \Rightarrow u_3(2\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2(u_1 + u_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (u_3(0) \cos \omega t)(2\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2 \cos \omega t [u_1(0) + u_2(0)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_3(0)(2\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^2 u_1(0) - \omega_0^2 u_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Ordenamos cada una de las ecuaciones formando un sistema de ecuaciones y hacemos $p = 2\omega_0^2 - \omega^2$

$$\begin{array}{rcl} + p u_1(0) & - \omega_0^2 u_2(0) & - \omega_0^2 u_3(0) = 0 \\ - \omega_0^2 u_1(0) & + p u_2(0) & - \omega_0^2 u_3(0) = 0 \\ - \omega_0^2 u_1(0) & - \omega_0^2 u_2(0) & + p u_3(0) = 0 \end{array}$$

El sistema es compatible si el determinante de los coeficientes es nulo.

$$\begin{vmatrix} p & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & p & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p \begin{vmatrix} p & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & p \end{vmatrix} - (-\omega_0^2) \begin{vmatrix} -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & p \end{vmatrix} + (-\omega_0^2) \begin{vmatrix} -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ p & -\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando os determinantes de segundo orden

$$\begin{aligned} p(p^2 - \omega_0^4) + \omega_0^2(-p\omega_0^2 - \omega_0^4) - \omega_0^2(\omega_0^4 + p\omega_0^2) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow p^3 - p\omega_0^4 - p\omega_0^4 - \omega_0^6 - \omega_0^6 - p\omega_0^4 &= 0 \Rightarrow p^3 - 3p\omega_0^4 - 2\omega_0^6 = 0 \Rightarrow \\ (2\omega_0^2 - \omega^2)^2(2\omega_0^2 - \omega^2) - 3(2\omega_0^2 - \omega^2)\omega_0^4 - 2\omega_0^6 &= 0 \Rightarrow \\ (4\omega_0^4 + \omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2)(2\omega_0^2 - \omega^2) - 6\omega_0^6 + 3\omega^2\omega_0^4 - 2\omega_0^6 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 8\omega_0^6 + 2\omega^4\omega_0^2 - 8\omega^2\omega_0^4 - 4\omega^2\omega_0^4 - \omega^6 + 4\omega^4\omega_0^2 - 6\omega_0^6 + 3\omega^2\omega_0^4 - 2\omega_0^6 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\omega^6 + 6\omega^4\omega_0^2 - 9\omega^2\omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega^2(\omega^4 - 6\omega^2\omega_0^2 + 9\omega_0^4) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación son $\omega=0$ y si $x=\omega^2$

$$x = \frac{6\omega_0^2 \pm \sqrt{36\omega_0^4 - 4 \cdot 9\omega_0^4}}{2} = 3\omega_0^2 \Rightarrow \omega^2 = 3\omega_0^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{3}\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Existe una raíz doble.

III.-El sistema de muelles se extiende a N partículas, cada una de masa m y unidas por muelles de constante k . inicialmente los muelles no están estirados y se encuentran en equilibrio. Escribir la ecuación de movimiento de la masa n ($n=1,2,\dots,N$) en función de su desplazamiento y masas adyacentes cuando las partículas se desplazan de su posición de equilibrio.

$$u_n(t) = u_n(0) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{N} + \phi\right) \cos \omega_s t$$

Son soluciones oscilatorias, donde $s=1,2,\dots,N$, $n=1,2,\dots,N$ y ϕ es una constante de fase arbitraria, con la condición de que las frecuencias angulares estén dadas por

$$\omega_s = 2\omega_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{N}\right)$$

Establecer el rango de posibles frecuencias para una cadena que contiene un número infinito de masas.

En la primera parte hemos visto la ecuación para la masa 2

$$m \frac{d^2 u_2}{dt^2} = k(u_3 - u_2) - k(u_2 - u_1) \Rightarrow \frac{d^2 u_2}{dt^2} = \omega_0^2(u_3 - u_2) - \omega_0^2(u_2 - u_1)$$

Si generalizamos para la masa n

$$\frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} = \omega_0^2(u_{n+1} - u_n) - \omega_0^2(u_n - u_{n-1}) = \omega_0^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

Suponemos que $\phi = 0$

$$\frac{du_n(t)}{dt} = -u_n(0)\omega_s \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{N}\right) \operatorname{sen} \omega_s t \Rightarrow \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} = -u_n(0)\omega_s^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{N}\right) \cos \omega_s t$$

Sustituyendo en la ecuación

$$-u_n(0)\omega_s^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{N}\right) \cos \omega_s t = \omega_0^2 \left[\begin{array}{l} u_n(0) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(n+1)s}{N}\right) \cos \omega_s t - \\ - 2u_n(0) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{N}\right) \cos \omega_s t + \\ + u_n(0) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(n-1)s}{N}\right) \cos \omega_s t \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\omega_s^2}{\omega_0^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{N}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(n+1)s}{N}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(n-1)s}{N}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi ns}{N}\right)$$

De acuerdo con la relación trigonométrica

$$\operatorname{sen} C + \operatorname{sen} D = 2 \operatorname{sen} \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \Rightarrow C = \frac{2\pi(n+1)s}{N} \text{ y } D = \frac{2\pi(n-1)s}{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C+D}{2} = \frac{2\pi s(n+1+n-1)}{2N} = \frac{2\pi s n}{N}; \quad \frac{C-D}{2} = \frac{2\pi s(n+1-n+1)}{2N} = \frac{2\pi s}{N}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$\Rightarrow -\frac{\omega_s^2}{\omega_0^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi ns}{N}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s n}{N}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi s}{N}\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi ns}{N}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\omega_s^2}{\omega_0^2} = 2 \cos\left(\frac{2\pi s}{N}\right) - 2 \Rightarrow \frac{\omega_s^2}{\omega_0^2} = 2 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi s}{N}\right) \right]$$

Aplicando la relación trigonométrica: $2 \operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos 2A$; $A = \frac{\pi s}{N}$

$$\omega_s^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\pi s}{N} \Rightarrow \omega_s = 2\omega_0 \sin \frac{\pi s}{N}; \quad s=1,2,\dots,N$$

Cuando $s = N$; $\omega_s = 0$. Cuando $s=(1/2)N$; $\omega_s = 2\omega_0$

IV.-Determinar la relación $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ para N grande en los dos casos: a) solución de baja frecuencia, b) $\omega = \omega_{max}$, donde ω_{max} es la solución de frecuencia máxima.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n(0) \sin\left(\frac{2\pi n s}{N}\right) \cos \omega t}{u_n(0) \sin\left[\frac{2\pi(n+1)s}{N}\right] \cos \omega t} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n s}{N}\right)}{\sin\left[\frac{2\pi(n+1)s}{N}\right]} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n s}{N}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi n s}{N} + \frac{2\pi s}{N}\right)}$$

Como $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n s}{N}\right)}{\sin \frac{2\pi n s}{N} \cdot \cos \frac{2\pi s}{N} + \cos \frac{2\pi n s}{N} \sin \frac{2\pi s}{N}}$$

Si w es pequeño lo es s y, por tanto, $\frac{\pi s}{N} \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \frac{2\pi s}{N} \rightarrow 1 \quad \sin \frac{2\pi s}{N} \rightarrow 0$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \approx \frac{\sin\left(\frac{2\pi n s}{N}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi n s}{N}\right) + 0} \approx 1$$

La frecuencia máxima ocurre cuando $s=(1/2)N$.

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{\sin\left(\frac{2\pi n s}{N}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi n s}{N} + \frac{2\pi s}{N}\right)} = \frac{\sin(\pi n)}{\sin(\pi n + \pi)} = \frac{\sin(\pi n)}{\sin(\pi n)\cos(\pi) + \cos(\pi n)\sin(\pi)} \approx \\ &\approx \frac{\sin(\pi n)}{-\sin(\pi n)} \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} \approx -1 \end{aligned}$$