

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXI OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. HOLANDA .1990

1.- Se desea estudiar la difracción de rayos X por una sustancia que cristaliza en el sistema cúbico. Para comenzar estudiamos la difracción en un plano de una onda monocromática que incide perpendicularmente sobre una red bidimensional que consiste en $N_1 \cdot N_2$ rendijas con separaciones entre ellas d_1 y d_2 respectivamente. La figura de difracción se recoge sobre una pantalla que se encuentra a una distancia L de la red. La pantalla es paralela a la red y el valor de L es mucho mayor que d_1 y d_2 .

a) Determinar la posición y anchura del máximo principal en la pantalla. La anchura se define como la distancia entre los mínimos más próximos que se encuentran a uno y otro lado del máximo central.

Consideremos ahora un cristal perteneciente al sistema cúbico y con una dimensión a de la celdilla unidad y cuyo tamaño es $N_0 \cdot a \times N_0 \cdot a \times N_1 \cdot a$, siendo N_1 mucho menor que N_0 . Un haz de rayos paralelos incide sobre el cristal el cual forma un ángulo θ con el eje Y tal como indica la figura 1. La figura de difracción se observa en una pantalla que está a gran distancia del cristal.

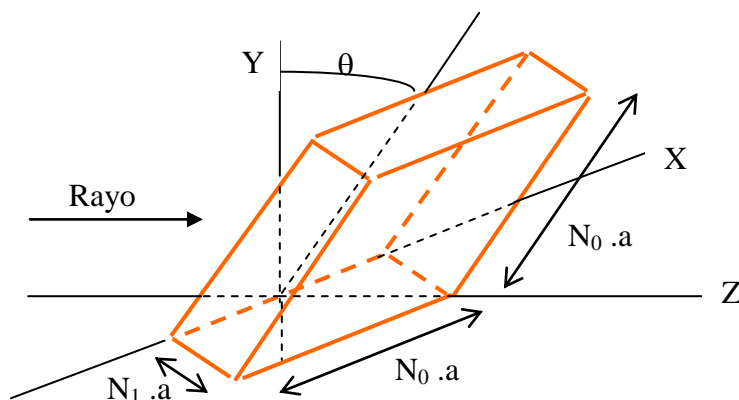


Figura 1.- Difracción de un haz de rayos X paralelos a lo largo del eje z . El ángulo entre el cristal y los rayos X es $\pi/2 + \theta$.

b) Calcular la posición y anchura del máximo en función del ángulo θ (suponer que dicho ángulo es pequeño) ¿Cuáles son las consecuencias de que $N_1 \ll N_0$?

La figura de difracción puede deducirse mediante la ley de Bragg en la que se supone que los rayos X se reflejan en los planos atómicos de la red cristalina. La figura de difracción se forma por la interferencia de estos rayos reflejados entre sí.

c) Mostrar que la llamada reflexión de Bragg da las mismas condiciones para los máximos que los que se encontró en el apartado b.

Para algunas medidas se emplea el método del polvo cristalino. Un haz de rayos X es dispersado al incidir sobre un polvo formado por diminutos cristales que se encuentran orientados al azar. La dispersión de rayos X de longitud de onda 0,15 nm mediante cristales diminutos de cloruro de potasio (KCl), cuya celdilla unidad está en la figura 2 da lugar a una serie de círculos concéntricos cuando los rayos se recogen en una placa fotográfica. La distancia entre los cristales y la placa es 0,1 m y el radio del círculo más pequeño es 0,053 m. El catión K^+ y el anión Cl^- pueden considerarse que tienen el mismo tamaño y ambos pueden ser considerados como idénticos centros de dispersión.

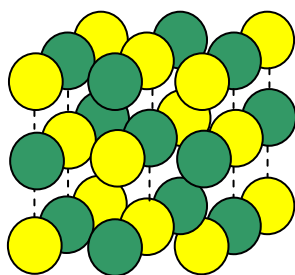


Fig. 2 Red cúbica del cloruro de potasio

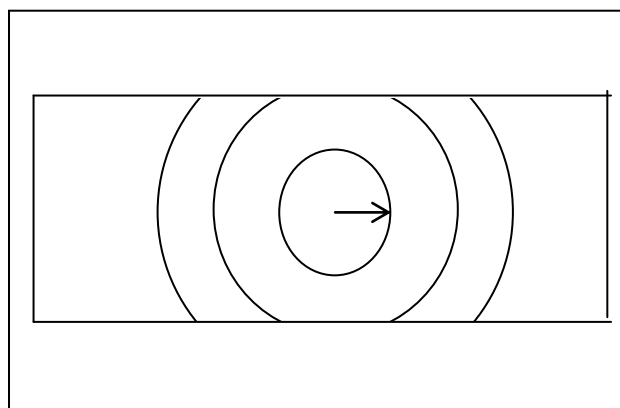


Fig. 3 Difracción de rayos X del polvo de cristales de KCl que produce una serie de círculos concéntricos en una placa fotográfica

d.- Calcular la distancia entre dos iones vecinos de potasio en el cristal

En la figura 1 se representa una red de difracción con una pantalla situada a la distancia L .

Si el punto P de la pantalla corresponde a un máximo en la intensidad luminosa es debido a que todos los rayos procedentes de las distintas rendijas están en fase. Entre los rayos procedentes de la primera rendija y de la segunda existe una diferencia de caminos

$$d_1 \sin \alpha$$

si esa diferencia es una longitud de onda entonces las dos rendijas están en fase en P. También lo estaría si la diferencia fuese 2λ , 3λ , etc.

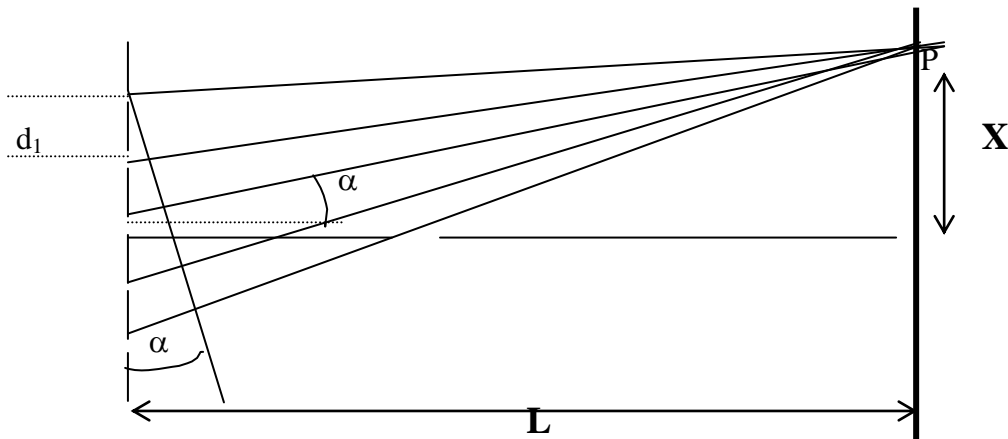


Fig. 1

Entre la primera y la tercera la diferencia de caminos es:

$$2d_1 \text{sen}\alpha$$

Si entre la primera y segunda rendija la diferencia de caminos es $\lambda, 2\lambda, \dots$ ahora la diferencia es $2\lambda, 4\lambda \dots$

Generalizando se llega a la conclusión de que los máximos se producirán cuando

$$d_1 \text{sen}\alpha = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Teniendo en cuenta que la pantalla está muy lejos de la red

$$\text{sen}\alpha \approx \text{tag}\alpha = \frac{X}{L}$$

La situación de los máximos cumple la relación que resulta de combinar las dos últimas ecuaciones

$$\frac{X}{L} = \frac{n\lambda}{d_1} \Rightarrow X = \frac{n\lambda L}{d_1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Si el punto elegido en la pantalla es el primer mínimo se debe a que la luz proveniente de las distintas rendijas están desfasadas, de modo que la suma de los fasores debe ser cero, esto significa que la suma vectorial de ellos forma un polígono.

Si hubiese tres rendijas, cuatro o cinco los ángulos serían $120^\circ, 90^\circ, 72^\circ$ respectivamente

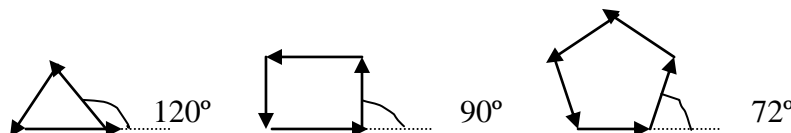


Fig. 2

En general, cuando hay N_1 rendijas el ángulo, expresado en radianes, vale: $\frac{2\pi}{N_1}$

La diferencia de caminos que vale $d_1 \text{ sen } \beta$, es:

$$\frac{2 \pi}{\lambda} = \frac{\frac{2 \pi}{N_1}}{d_1 \text{ sen } \beta} \Rightarrow d_1 \text{ sen } \beta = \frac{\lambda}{N_1}$$

Si designamos con x la posición del primer mínimo y tenemos en cuenta que la pantalla está muy alejada

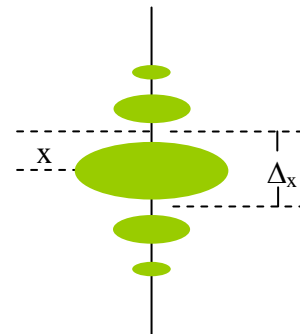
$$\text{sen } \beta \approx \text{tag } \beta = \frac{x}{L}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones

$$x = \frac{\lambda L}{N_1 d_1}$$

El valor del ancho definido en el problema Δ_x es la distancia entre los mínimos consecutivos que están a ambos lados del máximo principal

$$\Delta_x = \frac{2\lambda L}{N_1 d_1} \quad (2)$$



Para la dirección perpendicular, esto es, para el eje Y , el razonamiento es el mismo y las ecuaciones son:

$$Y = \frac{n\lambda L}{d_2} \quad \Delta_y = \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}$$

b) Una red cristalina puede simplificarse como un enrejado de bolas que se encuentran a la misma distancia (fig.3)

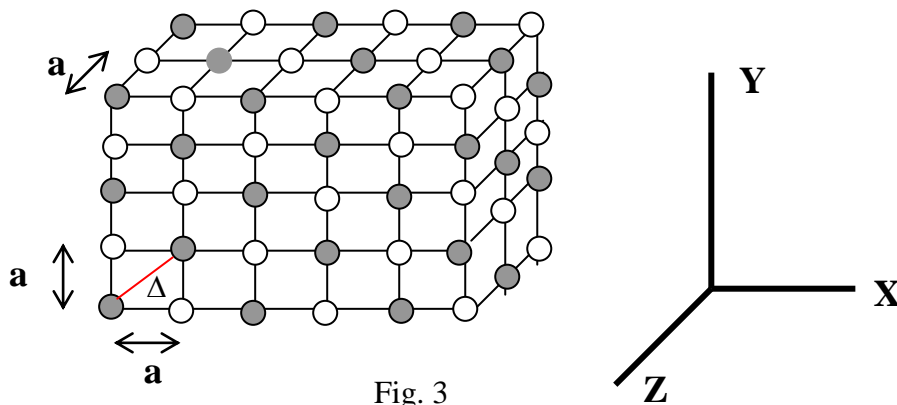


Fig. 3

Si observamos desde el eje Z el enrejado y éste se ha colocado de manera que la cara delantera ocupe el plano XY o lo que es lo mismo que el ángulo θ (figura del enunciado) sea cero grados, veríamos que la distancia entre dos bolas consecutivas

sobre el eje X vale a y sobre el eje Y vale a , y no veríamos nada de distancia sobre el eje Z, ya que las bolas de delante tapan a las de atrás.

Si volcásemos el enrejado hacia atrás, de modo que la cara delantera fuese paralela al plano XZ, o lo que es lo mismo que el ángulo θ fuese de 90° , veríamos desde el eje Z que la distancia sobre X es a , la distancia sobre Z es a y la distancia sobre Y nula.

Si el ángulo θ es menor de 90° entonces sobre el eje X veríamos la distancia a , sobre el eje Y, $a \cos \theta$ (ya que cuando $\theta = 90^\circ$, no se ve distancia) y sobre el eje Z, $a \sin \theta$ (cuando $\theta = 90^\circ$ el seno es la unidad).

Para la dirección del eje X tenemos que la posición del máximo y el ancho

$$X = \frac{n\lambda L}{a} \quad ; \quad \Delta_x = \frac{2\lambda L}{N_0 a}$$

Para la dirección del eje Y

$$Y = \frac{n\lambda L}{a \cos \theta} \quad ; \quad \Delta_y = \frac{2\lambda L}{N_0 a \cos \theta}$$

Para la dirección del eje Z

$$Z = \frac{n\lambda L}{a \sin \theta} \quad ; \quad \Delta_z = \frac{2\lambda L}{N_1 a \sin \theta}$$

El ángulo θ es pequeño y por tanto lo es su seno, luego el valor de Z será muy grande, esto significa que para $n = 1$ el máximo dista mucho del centro. Por otra parte $N_1 \sin \theta$ será pequeño y el ancho del máximo será grande.

c) La ley de Bragg establece que existe interferencia constructiva cuando se cumple la ecuación

$$2d \sin \varphi = n\lambda$$

siendo d la distancia entre dos planos en la red cristalina.

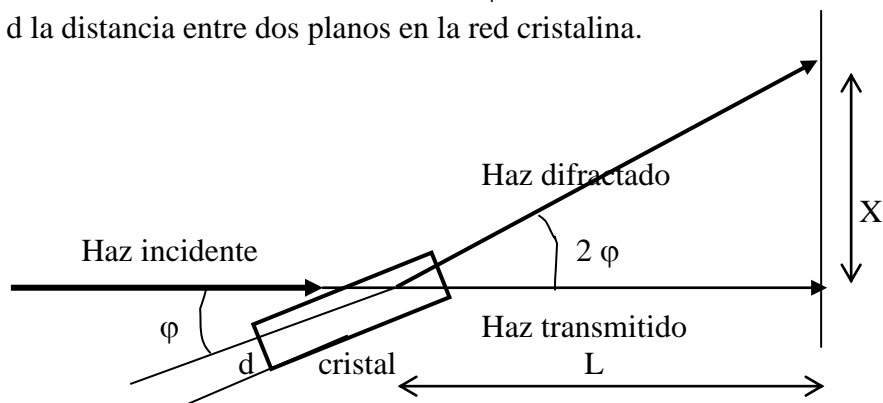


Fig. 4

De la figura 4 se deduce

$$\text{sen}2\varphi = \text{tag}2\varphi = \frac{x}{L}$$

Para ángulos pequeños podemos hacer las aproximaciones siguientes.

$$2d\varphi = n\lambda \quad ; \quad 2\varphi = \frac{X}{L} \Rightarrow X = 2\varphi L = \frac{n\lambda L}{d} = \frac{n\lambda L}{a}$$

a es la distancia entre el ión cloruro y el catión potasio. (En la figura 3 la distancia entre bola blanca y gris)

En la figura 5 se representa de forma esquemática el método del polvo cristalino

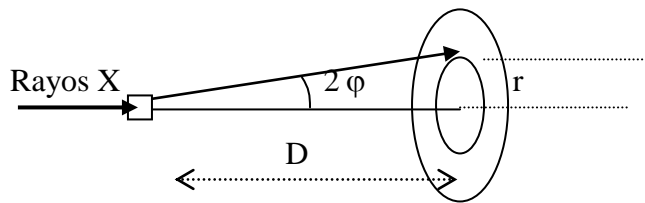


Fig. 5

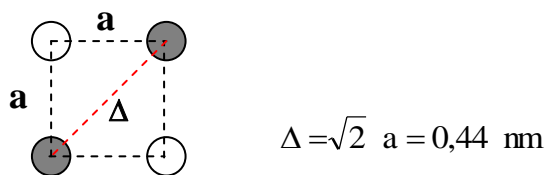
De la figura 5 se deduce:

$$\text{tag} 2\varphi = \frac{r}{D} = \frac{0,053}{0,1} \Rightarrow 2\varphi = 28^\circ \Rightarrow \text{sen}\varphi = 0,24$$

De la ley de Bragg

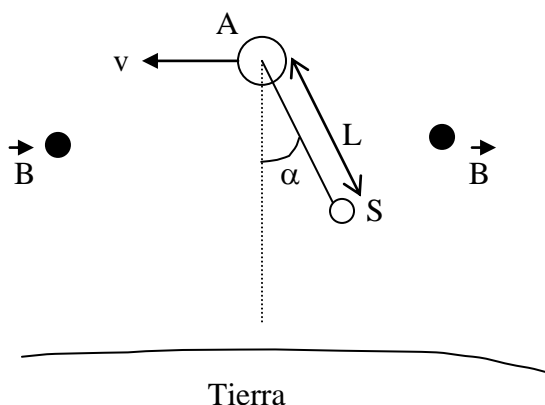
$$2a \text{sen}\varphi = n\lambda \Rightarrow a = \frac{\lambda}{2\text{sen}\varphi} = \frac{0,15\text{nm}}{2 * 0,24} = 0,31 \text{ nm}$$

El valor obtenido es la distancia entre el ión cloruro y el ión potasio. La distancia entre dos iones potasio es la diagonal del cuadrado de lado a (fig. 3), esto es,



$$\Delta = \sqrt{2} a = 0,44 \text{ nm}$$

2.- En el año 1989 se colocó la nave Atlantis en una órbita alrededor de la Tierra. Supondremos que la órbita es circular y que yace en el plano ecuatorial terrestre. En un determinado momento la nave espacial soltó un satélite S , ligado a la nave mediante una barra de longitud L . Admitimos que la barra es rígida, de masa despreciable, y cubierta mediante un aislador eléctrico. Suponemos que no existe rozamiento y α designa al ángulo que forma la barra rígida con la nave Atlantis y el centro de la Tierra (ver figura). S se encuentra también en el plano ecuatorial. La masa del satélite S es mucho menor que la masa de la nave Atlantis y L es mucho menor que el radio de la órbita descrita por la nave.



La nave espacial Atlantis (A) con el satélite (S) se encuentra en una órbita alrededor de la Tierra. La órbita está contenida en el plano ecuatorial terrestre. El campo magnético B es perpendicular al lector y dirigido hacia él.

a1.- Deducir para qué valores de α la configuración de la nave y satélite permanecen sin modificación, con respecto de la Tierra, o en otras palabras, para qué valores de alfa, el ángulo es constante

a2.- Discutir la estabilidad del equilibrio para cada valor de alfa.

b.- Suponer que en un determinado momento la barra rígida se desvía de la configuración estable un ángulo pequeño. El sistema comenzará a oscilar como un péndulo. Expresar el periodo de la oscilación en función del periodo de revolución del sistema alrededor de la Tierra.

c.- En la figura superior el campo magnético terrestre es perpendicular al diagrama y dirigido hacia el lector. Debido a la velocidad orbital de la barra, se origina en ésta una diferencia de potencial entre sus extremos. El medio que rodea al sistema (magnetosfera) es un gas a baja presión . ionizado con buena conductividad eléctrica. Se produce un contacto con el gas ionizado mediante dos electrodos uno situado en el Atlantis (A) y

otro en el satélite (S) y como consecuencia del movimiento surge una corriente a través de la barra

c1.- Determinar en qué dirección fluye la corriente (considerar que $\alpha=0$)

c2.- Existe una fuente de corriente en la nave que permite establecer una corriente eléctrica constante de 0,1 A en la barra y en sentido opuesto a la de c1, se pregunta cuánto tiempo debe durar esta corriente para conseguir cambiar la altitud de la nave en 10 metros, esa altitud aumenta o disminuye. Suponer que $\alpha=0$ y despreciar todas las contribuciones de las corrientes en la magnetosfera.

Datos: Periodo de la Órbita $T = 5,4 \cdot 10^3$ s; Longitud de la barra rígida $L = 2,0 \cdot 10^4$ m; Campo magnético terrestre a la altura del Atlantis $B = 5,0 \cdot 10^{-5}$ Wb.m⁻² Masa del Atlantis $m_1 = 1,0 \cdot 10^5$ kg

Utilizar la relación aproximada $\frac{1}{(a-b)^2} \approx \frac{1}{a^2} + \frac{2b}{a^3}$ cuando $a \gg b$

a1.- La nave Atlantis describe una órbita circular a una distancia R del centro de la Tierra. La fuerza centrípeta necesaria es la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y la nave. Si m_1 designa la masa del Atlantis

$$m_1 \omega^2 R = G \frac{M_T m_1}{R^2} \Rightarrow \omega^2 = G \frac{M_T}{R^3} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{g_0 R_T^2}{R^3} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,8 * (6370 \cdot 10^3)^2 (5,4 \cdot 10^3)^2}{4\pi^2}} = 6647 \text{ km}$$

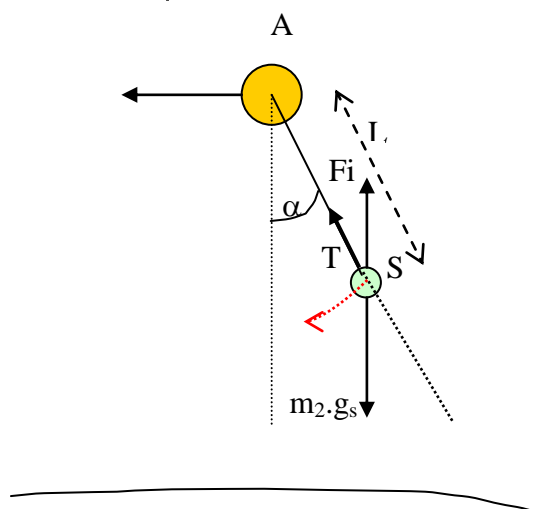


Fig. 1

En la figura 1 se analizan las fuerzas que actúan sobre el satélite S.

Son: la tensión de la barra, T; el peso del satélite en la órbita $m_2 g_s$, y la fuerza de inercia ya que el conjunto está dotado de una aceleración dirigida hacia el centro de la Tierra de valor $\omega^2 R$. Dada la distancia del satélite al centro de la Tierra, admitimos que la fuerza peso y la fuerza de inercia tienen la misma dirección.

La resultante de las fuerzas tienden a llevar al satélite hacia la posición de ángulo cero.

Observando la figura 1 podemos ver que la fuerza resultante en dirección tangencial vale:

$$(m_2 g_s - F_i) \operatorname{sen} \alpha = m_2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 \frac{GM_T}{(R - L \cos \alpha)^2} * \operatorname{sen} \alpha - m_2 \omega^2 (R - L \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha = m_2 a$$

teniendo en cuenta que $\omega^2 = \frac{GM_T}{R^3}$ y que una situación estable del sistema exige que la aceleración **a** sea nula

$$\frac{GM_T}{(R - L \cos \alpha)^2} * \operatorname{sen} \alpha - \frac{GM_T}{R^3} * (R - L \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha = a = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación se cumple cuando $\operatorname{sen} \alpha = 0$, lo que nos da dos posiciones de equilibrio: $\alpha = 0$ y $\alpha = 180^\circ$; las otras soluciones ocurren cuando

$$\frac{1}{(R - L \cos \alpha)^2} - \frac{1}{R^2} + \frac{L \cos \alpha}{R^3} = 0$$

Como $R \gg L \cos \alpha$, podemos utilizar la relación $\frac{1}{(a-b)^2} \approx \frac{1}{a^2} + \frac{2b}{a^3}$ y poner:

$$\frac{1}{(R - L \cos \alpha)^2} \approx \frac{1}{R^2} + \frac{2L \cos \alpha}{R^3}$$

y la ecuación anterior queda de la forma $\frac{3L \cos \alpha}{R^3} = 0$

De donde se deduce que $\cos \alpha = 0$, y por tanto otras dos posiciones son $\alpha = 90^\circ$ y $\alpha = 270^\circ$

a2.- Podemos escribir la ecuación (1) de la siguiente manera

$$\frac{GM_T}{(R - L \cos \alpha)^2} * \operatorname{sen} \alpha - \frac{GM_T}{(R - L \cos \alpha)^2} * \operatorname{sen} \alpha \frac{(R - L \cos \alpha)^3}{R^3} = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{GM_T}{(R - L \cos \alpha)} \left[1 - \frac{(R - L \cos \alpha)^3}{R^3} \right] = a$$

Y para ángulos comprendidos entre 0° y 90° el coseno es positivo, se deduce $\frac{(R - L \cos \alpha)^3}{R^3} < 1$, y, por tanto, $a > 0$. A partir de α igual a 90° hasta 180° el coseno

es negativo y $\frac{(R - L \cos \alpha)^3}{R^3} > 1$, por tanto $a < 0$. Esta situación se repite entre $\alpha = 180^\circ$ y $\alpha = 270^\circ$. A partir de $\alpha = 270^\circ$ y hasta 360° es de nuevo $a > 0$.

En la figura 2 representamos de forma sistemática cómo varía la resultante de los dos primeros miembros de la ecuación (1)

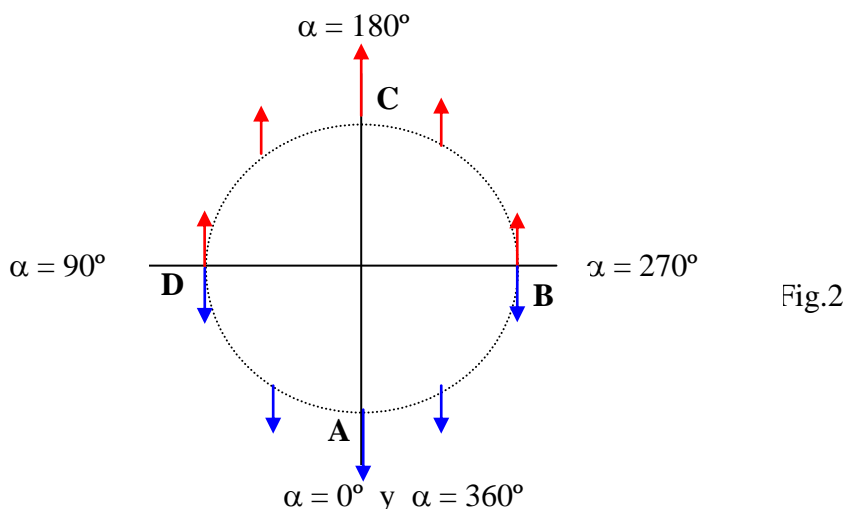


Fig.2

De la figura 2 se deduce que B y D son situaciones inestables ya que cualquier desviación pequeña de esas posiciones llevaría a S a las posiciones A o C, en cambio pequeñas desviaciones de A o C llevan a S a su posición de equilibrio A o C respectivamente, en consecuencia A y C son posiciones de equilibrio estable.

b).- Cuando el satélite S oscila alrededor de A, su aceleración, según hemos, visto vale

$$\frac{GM_T}{(R - L \cos \alpha)^2} * \text{sen} \alpha - \omega^2 (R - L \cos \alpha) \text{sen} \alpha = a$$

de la que hemos obtenido

$$\frac{GM_T}{(R - L \cos \alpha)^2} * \text{sen} \alpha - \frac{GM_T}{R^3} * (R - L \cos \alpha) \text{sen} \alpha = a \quad (1)$$

que con la aproximación dicha y simplificando queda:

$$GM_T \text{sen} \alpha \left[\frac{1}{R^2} + \frac{2L \cos \alpha}{R^3} \right] - \frac{GM_T \text{sen} \alpha}{R^2} + \frac{GM_T L \text{sen} \alpha \cos \alpha}{R^3} \Rightarrow \frac{3GM_T}{R^3} L \text{sen} \alpha \cos \alpha = a$$

teniendo en cuenta que para ángulos α pequeños, $\cos \alpha \cong 1$ y $\text{sen} \alpha \cong \alpha$, la ecuación anterior la podemos poner

$$3 \frac{GM_T}{R^3} L \alpha = a \Rightarrow 3 \frac{GM_T}{R^3} \alpha = \frac{a}{L} = \gamma = - \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 3\omega^2 \alpha = 0 \quad (2)$$

En la expresión anterior γ es la aceleración angular. El signo menos aparece porque cuando el ángulo α es positivo la fuerza que lleva el péndulo a su posición de equilibrio

es negativa y cuando α es negativo la fuerza es positiva. La ecuación (2) es la de un movimiento armónico cuyo periodo es

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega^2} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T}\sqrt{3}} = \frac{T}{\sqrt{3}}$$

En la expresión anterior T es el periodo de rotación del satélite $T = 5,4 \cdot 10^3$ s.

$$T_s = \frac{T}{\sqrt{3}} = 0,58.T = 3,12 \cdot 10^3 \text{ s}$$

c₁.- En la figura 3 se representa la posición de la barra para $a = 0$ y la dirección del campo magnético que es perpendicular a la barra y dirigida hacia el lector

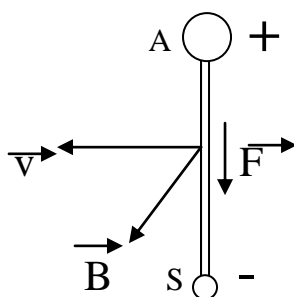


Fig.3

La fuerza magnética vale: $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Teniendo en cuenta que las cargas sobre la barra (suponemos que metálica) son electrones con libertad para desplazarse, éstos se acumulan en la zona del satélite y sobre el Atlantis queda una situación de exceso de carga positiva. A es como el polo positivo de una batería y S el negativo. Si en el exterior se puede establecer una corriente, el sentido convencional irá por el exterior de positivo a negativo y dentro de la barra de negativo a positivo.

c₂.- En la figura 4 se indica la dirección de la corriente establecida en la barra

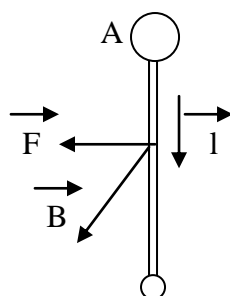


Fig.4

La fuerza magnética vale: $\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B}$, por consiguiente, la fuerza y la velocidad tienen la misma dirección y sentido. La fuerza ejerce un trabajo positivo que aumenta la energía de la nave

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} m \omega^2 R - G \frac{M_T m}{R} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R} \quad ; \quad E_{\text{final}} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R + \Delta R}$$

$$\Delta E = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R + \Delta R} - \left(-\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R} \right) = \frac{1}{2} \frac{GM_T m \Delta R}{R(R + \Delta R)}$$

Si tenemos en cuenta que $\omega^2 = \frac{GM_T}{R^3}$, y que $R \gg \Delta R$, resulta:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \frac{\omega^2 R^2 \Delta R}{R + \Delta R} \quad \Rightarrow \quad \Delta E = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \Delta R$$

Este aumento de energía proviene del trabajo realizado por la fuerza magnética en un desplazamiento de la nave $v \Delta t$. Igualando ambas expresiones del trabajo magnético y del incremento de la energía, tenemos:

$$i l B v \Delta t = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \Delta R \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{m \omega \Delta R}{2 i l B} = \frac{10^5 * \frac{2\pi}{5,4 \cdot 10^3} * 10}{2 * 0,1 * 2 \cdot 10^4 * 5 \cdot 10^{-5}} = 5,8 \cdot 10^3 \text{ s}$$

3.- Un "pulsar de milisegundos" es una fuente de radiación en el Universo que emite pulsos muy cortos con un periodo de uno a varios milisegundos. La radiación emitida está en el rango de las ondas de radio por lo que un receptor de radio adecuado pueden detectarse los pulsos separados y medir el periodo con gran exactitud.

Estos radio pulsos se originan en la superficie de ciertas estrellas, llamadas estrellas de neutrones. Estas estrellas son muy compactas, ya que su masa es semejante a la de nuestro Sol, pero su radio es solamente unos cientos de kilómetros, también poseen una velocidad de rotación muy grande. Debido precisamente a ella las estrellas de neutrones son ligeramente aplanadas (oblatos) y se puede suponer que una sección axial sea una elipse con ejes casi iguales. El factor de achatamiento se define como

$$\alpha = \frac{r_e - r_p}{r_e}$$

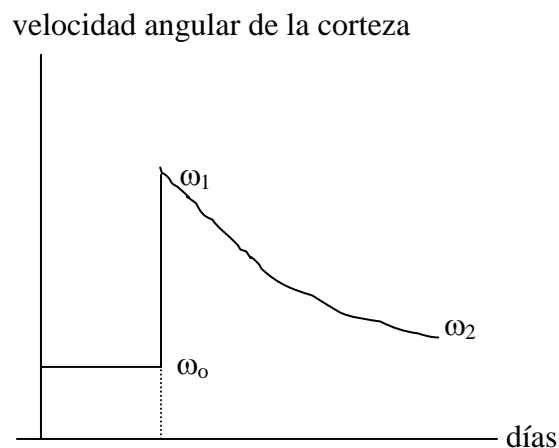
siendo, r_e el radio ecuatorial y r_p el polar.

a.- Calcular el achatamiento de una estrella de neutrones de las siguientes características:

$$\text{Masa, } M = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg ; radio promedio, } r = 1,0 \cdot 10^4 \text{ m}$$

$$\text{Periodo de rotación, } T = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

b.- A lo largo de muchos años el periodo de rotación de la estrella decrece, debido a las pérdidas de energía lo cual conduce a una disminución de su achatamiento. La estrella tiene una corteza sólida que flota sobre un líquido interior y esta corteza ofrece resistencia para ajustarse a una nueva forma de equilibrio. No obstante, ocurre un temblor o agitación en la estrella que da lugar a un cambio repentino en la forma de la corteza. Durante y después de esta agitación el cambio en la velocidad de rotación sigue las indicaciones de la figura siguiente



$$\omega_0 = 314,159 \text{ s}^{-1} ; \omega_1 = 314,164 \text{ s}^{-1} ; \omega_2 = 314,160 \text{ s}^{-1}$$

Calcular el radio medio del líquido interior a partir de los datos suministrados en la figura anterior. Suponer que las densidades de la corteza y del líquido son iguales y despreciar el cambio de forma del líquido interior.

a.- En la figura 1 se representa una elipse cuyos ejes son r_p y r_e . Consideramos en ella un punto de coordenadas x_o, y_o , y la recta tangente a la curva en dicho punto, que forma con el semieje positivo de abscisas un ángulo ε .

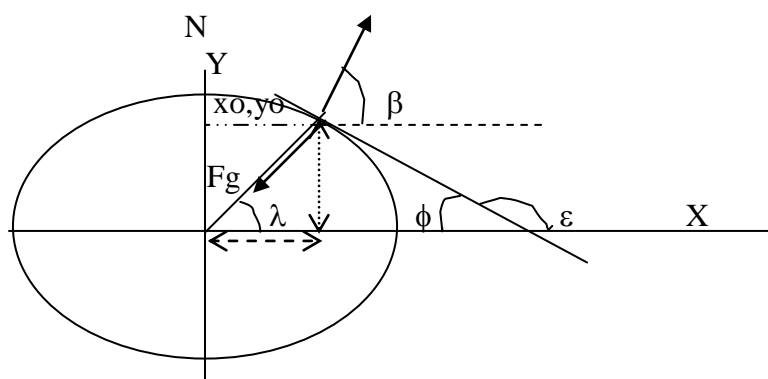


Fig. 1

La resultante de F_g y N sobre el eje X es la fuerza centrípeta necesaria para que una partícula situada en el punto (x_o, y_o) describa una circunferencia de radio $r \cos \lambda$. Para las componentes sobre los ejes podemos escribir:

$$F_g \cos \lambda - N \cos \beta = \omega^2 r \cos \lambda \quad ; \quad N \sin \beta = F_g \sin \lambda$$

Despejando N de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera resulta:

$$F_d \cos \lambda - \frac{F_g \sin \lambda}{\tan \beta} = \omega^2 r \cos \lambda \quad \Rightarrow \quad F_g \cos \lambda - F_g \sin \lambda \tan \phi = \omega^2 r \cos \lambda$$

Sustituimos $F_g = \frac{GM}{r^2}$ y operamos en la última ecuación

$$\frac{GM}{r^2} (1 - \tan \lambda \tan \phi) = \omega^2 r \quad \Rightarrow \quad \tan \lambda \tan \phi = 1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM} \quad (1)$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{r_e^2} + \frac{y^2}{r_p^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{r_p^2 - x^2 \frac{r_p^2}{r_e^2}}$$

La derivada de y respecto de x en la ecuación anterior y aplicada en el punto de coordenadas x_o, y_o nos da la pendiente de la recta, esto es, el valor de $\text{tag } \phi$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x \frac{r_p^2}{r_e^2}}{2\sqrt{r_p^2 - x^2 \frac{r_p^2}{r_e^2}}} = -\frac{x \frac{r_p^2}{r_e^2}}{y \frac{r_p^2}{r_e^2}} \Rightarrow -\frac{x_o \frac{r_p^2}{r_e^2}}{y_o \frac{r_p^2}{r_e^2}} = \text{tag } \phi = -\text{tag } \varepsilon \quad (2)$$

Llevando (2) a (1) y teniendo en cuenta que $\text{tag } \lambda = y_o/x_o$ resulta:

$$\frac{y_o}{x_o} \frac{x_o \frac{r_p^2}{r_e^2}}{y_o \frac{r_p^2}{r_e^2}} = 1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM} \Rightarrow \frac{r_p}{r_e} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM}} = \sqrt{1 - \frac{(3,14 \cdot 10^2)^2 * (1,0 \cdot 10^4)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} * 2,0 \cdot 10^{30}}} = 0,99963$$

El achatamiento es:

$$\alpha = \frac{r_e - r_p}{r_e} = 1 - \frac{r_p}{r_e} = 1 - 0,99963 = 3,7 \cdot 10^{-4}$$

a₁). Podríamos hacer la suposición de que la diferencia de atracción gravitatoria entre el polo y el ecuador de la estrella es la fuerza centrípeta, esto es, que la diferencia del peso de la masa unidad en el polo y en el ecuador es igual a su fuerza centrípeta

$$\frac{GM}{r_p^2} - \frac{GM}{r_e^2} = \omega^2 r_e \Rightarrow \frac{r_p}{r_e} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r_e^3}{GM}} \approx \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM}}$$

a₂). Podríamos hacer la suposición de que la energía potencial en el polo es igual a la potencial en el ecuador más la energía cinética de rotación

$$\frac{GM}{r_p} = \frac{GM}{r_e} + \frac{1}{2} \omega^2 r_e^2 \Rightarrow 1 - \frac{r_p}{r_e} = \frac{\omega^2 r_e^2 r_p}{2GM} \approx \frac{\omega^2 r^3}{2GM} = \frac{(3,14 \cdot 10^2)^2 * (1,0 \cdot 10^4)^3}{2 * 6,67 \cdot 10^{-11} * 2,0 \cdot 10^{30}} = 3,7 \cdot 10^{-4}$$

b.- La corteza de la estrella de neutrones cambia su momento de inercia I_c y su velocidad de rotación. De acuerdo con el principio de conservación del momento angular escribimos:

$$I_c \omega_o = I_{c1} \omega_1 \Rightarrow I_{c1} = I_c \frac{\omega_o}{\omega_1}$$

El segundo paso es que el núcleo líquido que inicialmente tenía una velocidad de rotación ω_o pasa a tener ω_2 , al igual que la corteza

$$(I_c + I_n) \omega_0 = (I_{c1} + I_n) \omega_2$$

De ambas ecuaciones:

$$I_c \omega_0 + I_n \omega_0 = I_c \frac{\omega_0 \omega_2}{\omega_1} + I_n \omega_2 \Rightarrow \frac{I_c}{I_n} = \frac{\omega_0 - \omega_2}{\frac{\omega_0 \omega_2}{\omega_1} - \omega_0} = \frac{\omega_1 (\omega_0 - \omega_2)}{\omega_0 (\omega_2 - \omega_1)}$$

La relación entre el momento de inercia de la parte líquida y del total de la estrella vale:

$$\frac{I_n}{I_c + I_n} = \frac{I_n}{I_n \frac{\omega_1 (\omega_0 - \omega_2)}{\omega_0 (\omega_2 - \omega_1)} + I_n} = \frac{\omega_0 (\omega_2 - \omega_1)}{\omega_2 (\omega_0 - \omega_1)} = \frac{\omega_0 (\omega_1 - \omega_2)}{\omega_2 (\omega_1 - \omega_0)}$$

Dado que se consideran iguales las densidades de la corteza y del líquido, los momentos de inercia son directamente proporcionales a los cuadrados de sus radios y los radios directamente proporcionales a las raíces cuadradas de sus momentos de inercia

$$\frac{I_n}{I} = \frac{r_n^2}{r^2} \Rightarrow \frac{r_n}{r} = \sqrt{\frac{I_n}{I}}$$

$$\frac{r_n}{r} = \sqrt{\frac{\omega_0 (\omega_1 - \omega_2)}{\omega_2 (\omega_1 - \omega_0)}} = \sqrt{\frac{314,159(314,164 - 314,160)}{314,160(314,164 - 314,159)}} = 0,89$$

Si tenemos en cuenta que el radio promedio vale $r = 1,0 \cdot 10^4$ m, queda para el radio del núcleo

$$r_n = 0,89 \cdot 1,0 \cdot 10^4 = 8,9 \cdot 10^3 \text{ m}$$