

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

## XXIV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. ESTADOS UNIDOS.1993

1.- Desde el punto de vista electrostático la Tierra se considera como un buen conductor, dotada de una carga  $Q_0$  y una densidad superficial promedio  $\sigma_0$

1) Cuando las condiciones atmosféricas son buenas, existe un campo eléctrico vertical y hacia abajo,  $E_0$ , que en las proximidades de la superficie terrestre vale  $150 \text{ V/m}$ . Calcular la densidad superficial terrestre y la carga  $Q_0$ .

2) El módulo del campo eléctrico terrestre disminuye con la altura y su valor es  $100 \text{ V/m}$  a una altura de  $100 \text{ m}$  sobre la superficie terrestre. Determinar la carga neta promedio que existe por  $\text{m}^3$  entre la superficie terrestre y la altura de  $100 \text{ m}$

3) La carga neta calculada en 2) es el resultado de existir casi el mismo número de iones positivos y negativos, con una sola carga. En las proximidades de la superficie terrestre y con buenas condiciones atmosféricas  $n_+ \approx n_- \approx 6 \cdot 10^8 \text{ m}^{-3}$ . Estos iones se desplazan por la acción del campo eléctrico, siendo su velocidad proporcional al campo

$$v = 1,5 \cdot 10^{-4} E \quad v \text{ en m/s} \quad \text{y} \quad E \text{ en V/m}$$

¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el movimiento de los iones atmosféricos neutralicen la mitad de la carga superficial terrestre, suponiendo que no existe ningún otro proceso que tienda a restablecerla?

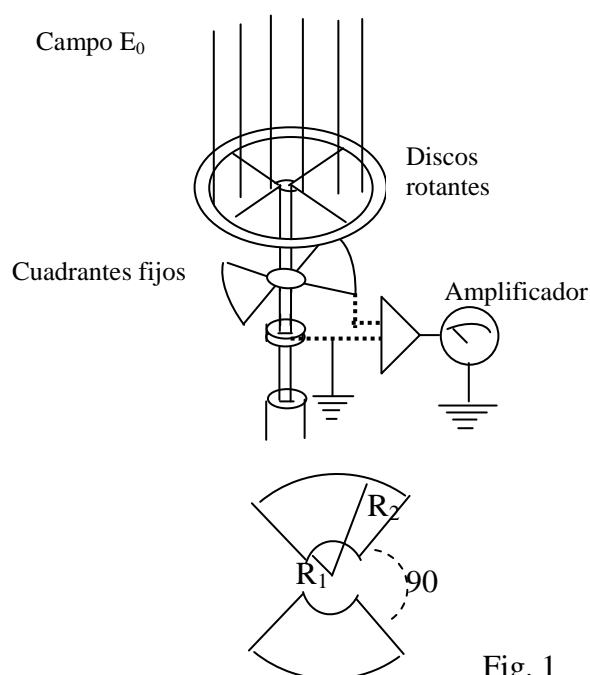


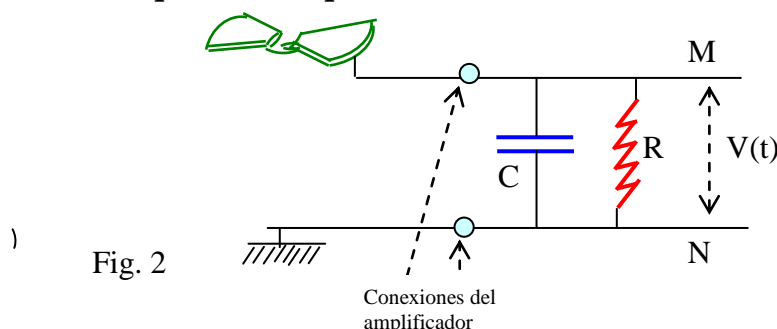
Fig. 1

4) Un procedimiento para medir el campo eléctrico terrestre y a partir de él deducir  $\Delta E_0$ , es el dispositivo que se indica en la figura superior.

Un par de cuadrantes metálicos están aislados de la tierra y unidos entre sí. Se disponen justamente debajo de un disco que gira a velocidad constante. El disco lleva unos huecos que pueden coincidir exactamente con los dos cuadrantes en determinadas posiciones. Por dos veces en cada revolución los cuadrantes quedan totalmente expuestos al campo eléctrico y otras dos veces quedan completamente apantallados. El periodo de rotación del disco es  $T$  y los radios de los cuadrantes  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente.

Considerar que cuando  $t=0$  los cuadrantes están completamente apantallados. Obtener la expresión que relaciona la carga  $q(t)$  inducida en la parte superior de los cuadrantes como función del tiempo, en el intervalo  $t=0$  y  $t=T/2$  y mostrar la gráfica. No considerar el efecto del movimiento de los iones atmosféricos.

5) El dispositivo descrito en 4) se conecta a un amplificador cuyo circuito de entrada es equivalente a un condensador  $C$  y a una resistencia  $R$  dispuestos en paralelo.



Se supone que la capacidad de los cuadrantes es despreciable frente a  $C$ . Establecer la gráfica  $V(t)$  entre  $M$  y  $N$  en función de  $t$ , durante una revolución en los dos casos siguientes:

a)  $T \ll CR$       b)  $T \gg CR$

Se supone que  $C$  y  $R$  tienen valores fijos en los dos casos y  $T$  cambia entre a) y b)

Obtener una expresión aproximada para el cociente  $V_a/V_b$  de los valores máximos en ambos casos

6) Si  $E_0 = 150 \text{ V/m}$ ,  $r_1 = 1 \text{ cm}$ ;  $r_2 = 7 \text{ cm}$ ,  $C = 0,01 \mu\text{F}$ ,  $R = 20 \text{ M}\Omega$  y el disco gira a 50 revoluciones por segundo, cuál es aproximadamente el valor máximo de  $V$  durante una revolución

### 1).-Calcular la densidad superficial terrestre y la carga $Q_0$

Aplicamos el teorema de Gauss

$$\Phi_E = \int E_o dS = E_o 4\pi R_T^2 = \frac{Q_o}{\epsilon_o} \Rightarrow \sigma_s = E_o \epsilon_o = 150 * 8,85 \cdot 10^{-12} = 1,33 \cdot 10^{-9} \frac{C}{m^2}$$

$$Q_o = \sigma_o 4\pi R_T^2 = 1,33 \cdot 10^{-12} * 4\pi * (6,4 \cdot 10^6)^2 = 6,8 \cdot 10^5 C$$

### 2) Determinar la carga neta promedio que existe por $m^3$ entre la superficie terrestre y la altura de 100 m

Consideremos un cilindro cuyas bases tienen la superficie S. En una base el campo eléctrico vale 150 V/ m y en la otra, a 100 m de altura, donde  $E = 100$  V/m. El campo es perpendicular a las bases y dirigido hacia la Tierra. El teorema de Gauss nos dice:

$$\Phi_{NETO} = 100 S - 150 S = \frac{Q_{CILINDRO}}{\epsilon_o} = \frac{\rho * 100 S}{\epsilon_o} \Rightarrow \rho = \frac{50 S \epsilon_o}{100 S} = 4,4 \cdot 10^{-12} \frac{C}{m^3}$$

### 3) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el movimiento de los iones atmosféricos neutralicen la mitad de la carga superficial terrestre

A la superficie de la Tierra llegan las cargas positivas, dado que esa es la dirección del campo eléctrico, y neutralizan las cargas de la superficie terrestre. En una aproximación, supondremos que la neutralización de la carga en la superficie terrestre no hace variar la intensidad del campo eléctrico.

El “caudal” de cargas que llega a la superficie terrestre vale  $S_T v \eta^+$ . Si multiplicamos por la carga de cada ión tenemos la carga que llega por unidad de tiempo. Si  $\Delta t$  representa el tiempo que transcurre para que se neutralice la mitad de la carga de la superficie terrestre, escribimos:

$$S v \eta^+ e \Delta t = \frac{Q_o}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{6,8 \cdot 10^5}{4\pi(6,4 \cdot 10^6)^2 * 1,5 \cdot 10^{-4} * 150 * 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 300 s$$

Un cálculo más realista es admitir que el campo eléctrico terrestre disminuye con el tiempo a medida que se neutraliza la carga. Esto conlleva que la velocidad de llegada de los iones sea más pequeña a medida que transcurre el tiempo y dé lugar a que el tiempo de neutralización sea superior a los trescientos segundos.

Sea q la carga de la superficie terrestre en un determinado instante. El campo eléctrico y la velocidad de los iones vale:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_o} = \frac{q}{4\pi R_T^2 \epsilon_o} \Rightarrow v = 1,5 \cdot 10^{-4} E = 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{q}{4\pi R_T^2 \epsilon_o}$$

A partir del instante anterior y transcurrido un tiempo dt, se neutraliza una carga dq

$$S \text{ v } \eta^+ e^* dt = dq \Rightarrow 4\pi R_T^2 * 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{q}{4\pi R_T^2} * 6 \cdot 10^8 * 1,6 \cdot 10^{-19} dt = dq$$

Operando y separando variables resulta:

$$\int \frac{dq}{q} = \int 1,63 \cdot 10^{-3} dt \Rightarrow \ln q = 1,63 \cdot 10^{-3} t + Cte \quad , \text{ cuando } t = 0, \quad Cte = \ln Q_0$$

$$\ln \frac{q}{Q_0} = 1,63 \cdot 10^{-3} t \Rightarrow \text{ cuando } q = \frac{Q_0}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\ln 2}{1,63 \cdot 10^{-3}} \approx 425 \text{ s}$$

4) **Un procedimiento para medir el campo eléctrico terrestre y a partir de él deducir  $\Delta E_0$ ,**

Cuando  $t=0$ , los cuadrantes están apantallados, un tiempo posterior  $dt$  el ángulo girado es  $d\alpha$  y se ha dejado al descubierto una superficie  $dS$ , véase la figura 1 del enunciado. La superficie expuesta al campo,  $dS_1$ , por un cuadrante se calcula

$$\frac{\pi r_2^2}{2\pi} = \frac{dX_2}{d\alpha} \quad ; \quad \frac{\pi r_1^2}{2\pi} = \frac{dX_1}{d\alpha} \quad ; \quad dS_1 = dX_2 - dX_1 = d\alpha \left( \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \right)$$

La superficie expuesta al campo por los dos cuadrantes es

$$dS = 2dS_1 = d\alpha (r_2^2 - r_1^2)$$

Por otra parte tenemos

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow d\alpha = \frac{2\pi}{T} dt$$

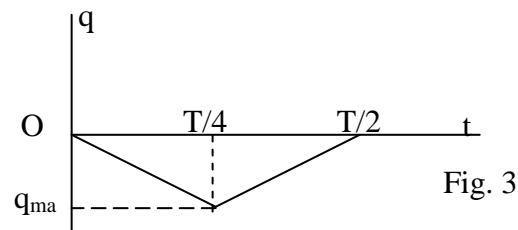
$$\Phi = \int E_0 dS = \int E_0 \frac{2\pi}{T} (r_2^2 - r_1^2) dt = \frac{2\pi E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} t + Cte = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \text{ para } t = 0, \quad \Phi = 0$$

$$q = \frac{2\pi \epsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} t, \quad \text{ válida desde } t=0 \text{ a } t = \frac{T}{4}$$

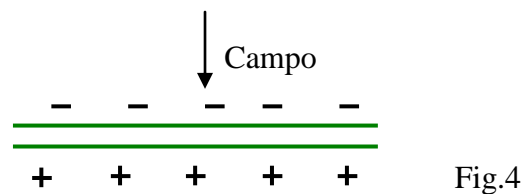
El valor máximo de  $q$  ocurre cuando  $t = T/4$

$$q_{\max} = \frac{2\pi \epsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} * \frac{T}{4} = \frac{\pi \epsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{2}$$

Cuando  $t = T/4$  los cuadrantes están totalmente al descubierto, a partir de ese instante el disco empieza a apantallarlos y éste es total cuando  $t = T/2$ . Ahora el apantallamiento progresivo hace disminuir la carga inducida, hasta anularla cuando  $t = T/2$ . La gráfica es la siguiente:



$q$  en la cara superior del cuadrante es negativa y en la inferior positiva, ya que al ser los cuadrantes metálicos el campo en su interior ha de ser nulo



**5) El dispositivo descrito en 4) se conecta a un amplificador cuyo circuito de entrada es equivalente a un condensador  $C$  y a una resistencia  $R$  dispuestos en paralelo. ....**

**Obtener una expresión aproximada para el cociente  $V_a/V_b$  de los valores máximos en ambos casos**

La carga que deja pasar el cuadrante fluye entrando al amplificador donde encuentra dos caminos, parte pasa a través del condensador,  $C \cdot dV/dt$ , y otra parte pasa por la resistencia,  $V/R$ .

Hay que considerar la cantidad de carga que atraviesa el cuadrante en un cuarto de periodo y compararla con la cantidad de carga que el condensador es capaz de almacenar,  $CV$ .

Consideremos dos casos extremos:

**5.- a)  $T \ll CR$**

Si  $CV \gg (V/R) \cdot (T/4)$ . Esto es cuando  $T = T_a \ll CR$ .

Una pequeña cantidad de carga fluye por  $R$  en un cuarto de periodo  $T/4$ . Cuando los cuadrantes aislados están cargados negativamente por inducción, una carga casi igual y positiva llega a  $C$ .

Entonces,  $V(t)$  crece casi linealmente con  $t$  entre 0 y  $T/4$  y luego decrece de igual forma y en igual cantidad entre  $T/4$  y  $T/2$ .

En este caso el valor máximo del potencial que adquiere el condensador es

$$V_{\max} \approx V_a = \frac{|q_{\max}|}{C}$$

Donde la carga  $q_{\max}$  es la obtenida en (1)

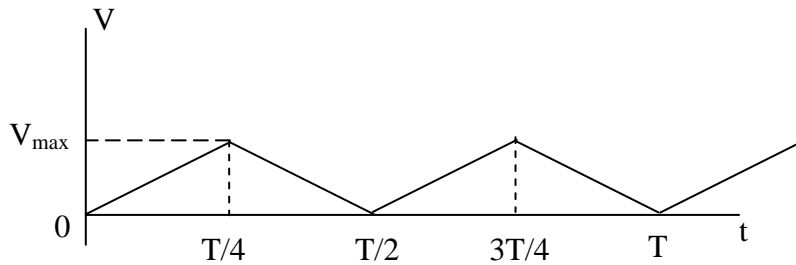


Fig.5

### 5.- b) $T \gg CR$

Por otra parte, si sucede que  $T = T_b \gg CR$ , o sea  $CR \ll T_b$ , la mayor parte de la carga que llega al amplificador pasa por R. Cuando la magnitud de  $q$  está creciendo (y también cuando decrece), la corriente es aproximadamente igual a  $\frac{|q_{\max}|}{T_b/4}$ .

y por consiguiente, el potencial en R es  $V_{\max} \approx V_b = \frac{4|q_{\max}|R}{T_b}$

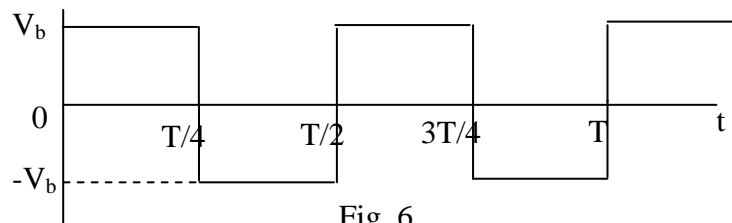


Fig. 6

Si comparamos los resultados e a) y b) podemos encontrar la relación

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{T_b}{4CR}$$

6) Si  $E_0 = 150 \text{ V/m}$ ,  $r_1 = 1 \text{ cm}$ ;  $r_2 = 7 \text{ cm}$ ,  $C = 0,01 \mu\text{F}$ ,  $R = 20 \text{ M}\Omega$  y el disco gira a 50 revoluciones por segundo, ( $T=0,02 \text{ s}$ ) ¿cuál es aproximadamente el valor máximo de  $V$  durante una revolución?

Tenemos que  $CR = 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^7 = 0,2 \text{ s}$ . Entonces es  $CR = 10 \cdot T$  y podemos admitir que se cumple el criterio anterior 5.-a)

$CR \gg T$ .

Tenemos que el área máxima descubierta en cada vuelta es:

$$A_{\max} = \pi/2 \cdot (7^2 - 1^2) = 75 \text{ cm}^2 = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Como  $E_0 = 150 \text{ V/m}$ , la densidad de carga inducida vale:

$$\sigma = \epsilon_0 \cdot E_0 = 150 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

La carga máxima,

$$q_{\max} = \sigma \cdot A_{\max} = 1,33 \cdot 10^{-9} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3} = 1,0 \cdot 10^{-11} \text{ C}.$$

Y el potencial máximo,

$$V_{\max} = \frac{q_{\max}}{C} = \frac{1,0 \cdot 10^{-11}}{1,0 \cdot 10^{-8}} = 10^{-3} \text{ V}$$

2.-Debido a la refracción un potente haz de luz láser puede ejercer fuerzas apreciables sobre pequeños objetos transparentes. De acuerdo con lo anterior, consideremos un pequeño prisma triangular con un ángulo  $A = \pi - 2\alpha$ . El prisma tiene, una longitud  $2h$  y un anchura  $w$ . El índice de refracción del prisma es  $n$  y la densidad  $\rho$ .

Suponer que este prisma se coloca en el camino de un haz de láser que se desplaza horizontalmente a lo largo del eje  $X$ . En este problema se considera que el prisma no rota, lo que significa que su ángulo  $A$  apunta en dirección opuesta al haz de láser, y sus caras triangulares se mantienen paralelas al plano  $xy$  y su base paralela al plano  $YZ$ , tal como indica la figura 1.

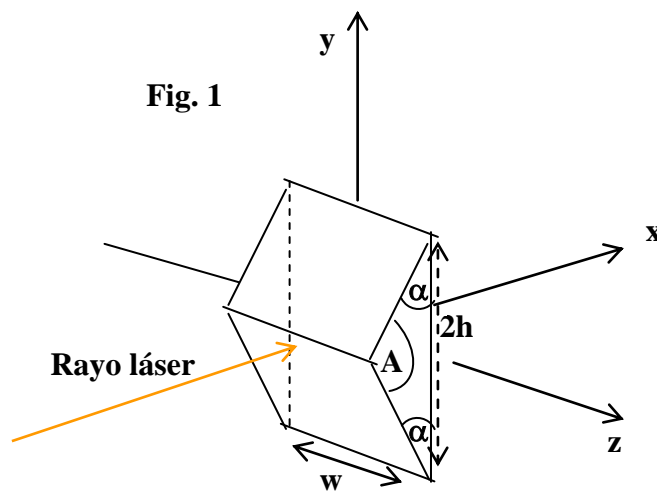


Fig. 2

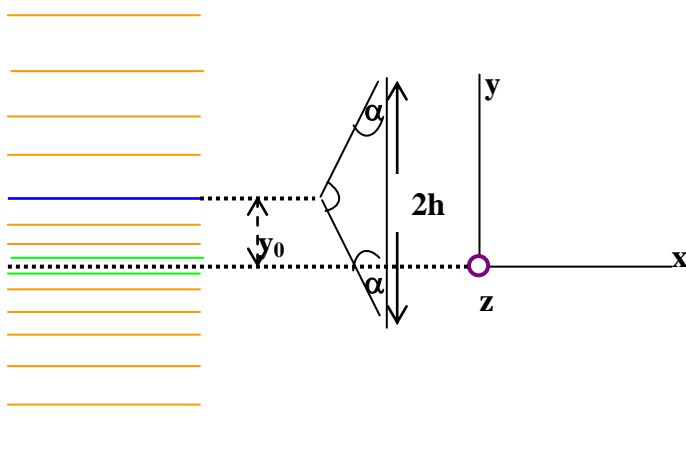
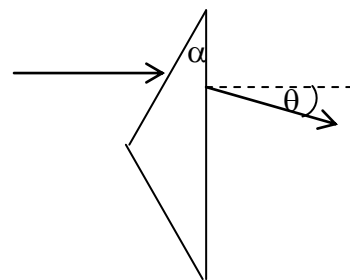


Fig. 3



El índice de refracción del aire que rodea al prisma es 1, y se admite que las caras del prisma están recubiertas con un material antirreflectante, de manera que no existe reflexión.

El haz de láser es de intensidad uniforme en la dirección del eje Z y disminuye linealmente a lo largo del eje Y, de tal modo que la máxima intensidad  $I_0$  se presenta cuando  $y = 0$  y se hace cero a una distancia  $y = \pm 4h$  (figura 2). La intensidad se expresa en  $W/m^2$ .

1) Escribir la ecuación que relaciona el ángulo  $\theta$ , figura 3, en función de  $\alpha$  y  $n$  cuando el haz de láser golpea al prisma en la cara superior.

2) Expresar en función de  $I_0$ ,  $\theta$ ,  $h$ ,  $w$  e  $y_0$  las componentes X e Y de la fuerza ejercida sobre el prisma por el haz de láser cuando el vértice del mismo está desplazado una distancia  $y_0$  del eje X, siendo  $|y_0| \leq 3h$ .

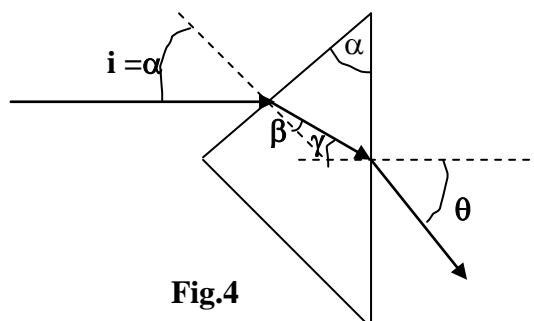
Dibujar las gráficas de las componentes X e Y de la fuerza frente al desplazamiento vertical  $y_0$ .

3) Suponer que el haz de láser tiene 1 mm de anchura en la dirección Z y una anchura de  $80 \mu m$  en la dirección Y. Para ese prisma  $\alpha = 30^\circ$ ,  $h = 10 \mu m$ ,  $n = 1,5$ ,  $w = 1 \text{ mm}$  y  $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$ . Determinar la potencia del láser que pueda equilibrar al peso del prisma cuando el vértice del prisma se encuentre a una distancia  $y_0 = -h/2 = -5 \mu m$ , por debajo del eje del láser (eje X).

4) Suponer que este experimento se ha hecho en ausencia de gravedad con el mismo prisma y el mismo láser que en 3) pero con  $I_0 = 10^8 \text{ W/m}^2$ . Calcular el periodo de las oscilaciones del prisma cuando éste se desplace una distancia  $y = h/20$  de la línea central del haz de láser.

1) Escribir la ecuación que relaciona el ángulo  $\theta$  figura 3, en función de  $\alpha$  y  $n$  cuando el haz de láser golpea al prisma en la cara superior.

De la figura 4 se deduce al aplicar la ley de Snell



$$1 \cdot \text{sen} \alpha = n \cdot \text{sen} \beta \quad ; \quad n \cdot \text{sen} \gamma = 1 \cdot \text{sen} \theta \quad ; \quad \alpha = \beta + \gamma$$

De las tres ecuaciones anteriores

$$n \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = n \operatorname{sen}\left[\alpha - \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{n}\right)\right]$$

Con los valores numéricos del apartado 3)

$$\operatorname{sen}\theta = 1,5 \operatorname{sen}\left[30 - \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}30}{1,5}\right)\right] = 0,274 \Rightarrow \theta = 15,9^\circ$$

2) Expresar en función de  $I_0$ ,  $\theta$ ,  $h$ ,  $w$  e  $y_0$  las componentes X e Y de la fuerza ejercida sobre el prisma por el haz de láser cuando el vértice del mismo está desplazado una distancia  $y_0$  del eje X, siendo  $|y_0| \leq 3h$ .

Cuando el haz de láser atraviesa el prisma y sufre una refracción que lleva aparejado un cambio de dirección, se produce un cambio en el momento lineal. Consideremos que se cumple la condición del enunciado  $|y_0| \leq 3h$  y que en el caso que consideramos todo el prisma se encuentre por encima del eje X (fig. 5), entonces  $h \leq y_0 \leq 3h$

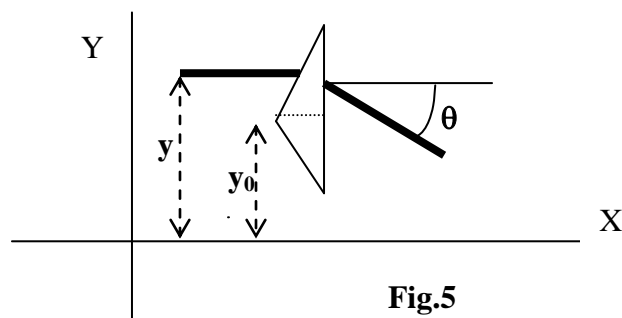


Fig.5

El haz indicado en la figura tiene un espesor  $\delta y$  siendo  $N_y$  el número de fotones contenidos en el haz que llegan por unidad de tiempo al prisma. El momento lineal de un fotón incidentes es  $\mathbf{p} = \frac{E}{c} \mathbf{i}$ , siendo E la energía del fotón y c la velocidad de la luz.

Cuando el haz abandona el prisma el momento lineal es  $\mathbf{p} = \frac{E}{c} \cos\theta \mathbf{i} - \frac{E}{c} \operatorname{sen}\theta \mathbf{j}$ . La variación de la cantidad de movimiento es:

$$\Delta\mathbf{p} = \frac{E}{c} \left[ (\cos\theta - 1) \mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta \mathbf{j} \right]$$

El producto de  $N_y \Delta\mathbf{p}$  representa la fuerza que ejerce el prisma sobre los fotones (por unidad de tiempo)

$$\mathbf{F} = \frac{N_y E}{c} \left[ (\cos\theta - 1) \mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta \mathbf{j} \right]$$

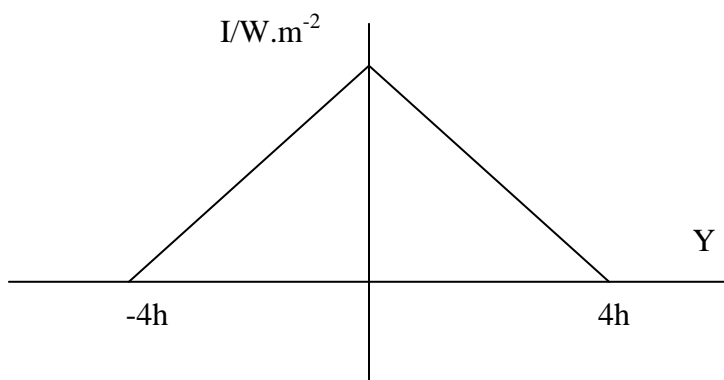
La superficie del haz de láser que se considera a una distancia del eje X representada por  $y$ , vale:  $\delta y \cdot w$ , siendo I la intensidad de esa parte del haz. El producto  $I \cdot \delta y \cdot w$  representa la potencia y es igual a  $N_y \cdot E$

$$\mathbf{F} = \frac{I * \delta y * w}{c} [(\cos \theta - 1) \mathbf{i} - \text{sen} \theta \mathbf{j}]$$

La fuerza que ejerce el haz de láser sobre la parte superior del prisma el prisma vale

$$\mathbf{F} = \frac{I * \delta y * w}{c} [(1 - \cos \theta) \mathbf{i} + \text{sen} \theta \mathbf{j}] \quad (1)$$

En la expresión anterior I no es constante ya que la intensidad varía linealmente con la coordenada y



La ecuación de la recta que representa la variación de la intensidad con la distancia

$$\text{Entre } y = 0 \text{ e } y = +4h \quad I = I_o \left( 1 - \frac{y}{4h} \right)$$

$$\text{Para } y = 0 \text{ e } y = -4h \quad I = I_o \left( 1 + \frac{y}{4h} \right)$$

Si en la expresión (1) se sustituye el valor de la intensidad resulta que la fuerza sobre la cara superior es:

$$\mathbf{F}_{CS} = \frac{w}{c} [(1 - \cos \theta) \mathbf{i} + \text{sen} \theta \mathbf{j}] \int_{y_0}^{y_0+h} I_o \left( 1 - \frac{y}{4h} \right) \delta y = \frac{I_o h w}{c} [(1 - \cos \theta) \mathbf{i} + \text{sen} \theta \mathbf{j}] \left[ \frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h} \right]$$

Si ahora consideramos la cara inferior del prisma. La expresión (1) cambia de signo en el valor de la componente **j**.

$$\mathbf{F} = \frac{I * \delta y * w}{c} [(1 - \cos \theta) \mathbf{i} - \text{sen} \theta \mathbf{j}] \quad (2)$$

Si se sustituye en (2) el valor de I y se integra se obtiene la fuerza sobre la cara inferior del prisma

$$\mathbf{F}_{CI} = \frac{w}{c} \left[ (1 - \cos \theta) \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \right] \int_{y_0-h}^{y_0} I_o \left( 1 - \frac{y}{4h} \right) \delta y = \frac{I_o hw}{c} \left[ (1 - \cos \theta) \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \right] \left[ \frac{9}{8} - \frac{2y_0}{h} \right]$$

Las componentes de la fuerza total sobre todo el prisma son las que resultan de sumar las dos expresiones

#### Componente X

$$F_X = \frac{I_o hw}{c} (1 - \cos \theta) \left( \frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h} + \frac{9}{8} - \frac{y_0}{4h} \right) = \frac{2I_o hw}{c} (1 - \cos \theta) \left( 1 - \frac{y_0}{4h} \right) \quad (3)$$

#### Componente Y

$$F_Y = \frac{I_o hw}{c} \sin \theta \left( \frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h} - \frac{9}{8} + \frac{y_0}{4h} \right) = -\frac{I_o hw}{4c} \sin \theta \quad (4)$$

Con la condición del enunciado  $|y_0| \leq 3h$  puede presentarse otro caso y es que parte del prisma esté por encima del eje X y otra parte por debajo como indica la figura 6

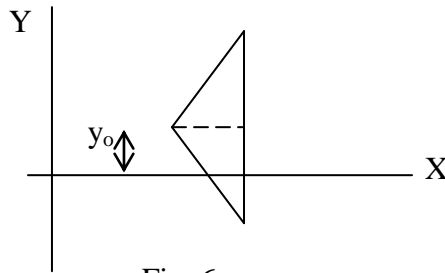


Fig. 6

Ahora tenemos tres casos:

1) La cara superior del prisma por encima del eje X 2) La cara inferior del prisma por encima del eje X y 3) la cara inferior del prisma por debajo del eje X.

Caso 1) Ya se ha resuelto anteriormente.

$$\mathbf{F}_{CS} = \frac{w}{c} \left[ (1 - \cos \theta) \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \right] \int_{y_0}^{y_0+h} I_o \left( 1 - \frac{y}{4h} \right) \delta y = \frac{I_o hw}{c} \left[ (1 - \cos \theta) \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \right] \left[ \frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h} \right]$$

Caso 2) Los límites de la integral son entre 0 e  $y_0$ .

$$\mathbf{F}_{CI} = \frac{w}{c} \left[ (1 - \cos \theta) \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \right] \int_0^{y_0} I_o \left( 1 - \frac{y}{4h} \right) \delta y = \frac{I_o hw}{c} \left[ (1 - \cos \theta) \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \right] \left[ \frac{y_0}{h} - \frac{y_0^2}{8h^2} \right]$$

Caso 3) Los límites de la integral son  $0$  y  $-(h-y_0) = y_0-h$ , además hemos de sustituir la expresión  $I = I_0 \left(1 + \frac{y}{4h}\right)$

$$\mathbf{F}_{Cl} = \frac{w}{c} \left[ (1 - \cos \theta) \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \right] \int_{y_0-h}^0 I_0 \left(1 + \frac{y}{4h}\right) \delta y$$

$$\mathbf{F}_{Cl} = \frac{I_0 hw}{c} \left[ (1 - \cos \theta) \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \right] \left[ \frac{7}{8} - \frac{3y_0}{4h} - \frac{y_0^2}{8h^2} \right]$$

La fuerza total sobre el prisma se obtiene sumando los tres casos

### Componente X

$$F_x = \frac{I_0 hw}{c} (1 - \cos \theta) \left( \frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h} + \frac{y_0}{h} - \frac{y_0^2}{8h^2} + \frac{7}{8} - \frac{3y_0}{4h} - \frac{y_0^2}{8h^2} \right) = \frac{I_0 hw}{c} (1 - \cos \theta) \left( \frac{7}{4} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right)$$

### Componente Y

$$F_y = \frac{I_0 hw}{c} \sin \theta \left[ \frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h} - \frac{y_0}{h} + \frac{y_0^2}{h^2} - \frac{7}{8} + \frac{3y_0}{4h} + \frac{y_0^2}{8h^2} \right] = -\frac{I_0 hw}{c} \sin \theta \left( 1 - \frac{y_0}{2h} \right) \frac{y_0}{2h}$$

Para la representación de la fuerza sobre el eje X, tenemos las ecuaciones siguientes

$$F_x = \frac{2I_0 hw}{c} (1 - \cos \theta) \left( 1 - \frac{y_0}{4h} \right) \quad \text{válida cuando } h \leq y_0 \leq 3h$$

$$F_x = \frac{I_0 hw}{c} (1 - \cos \theta) \left( \frac{7}{4} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right) \quad , \quad \text{válida cuando } 0 \leq y_0 \leq h$$

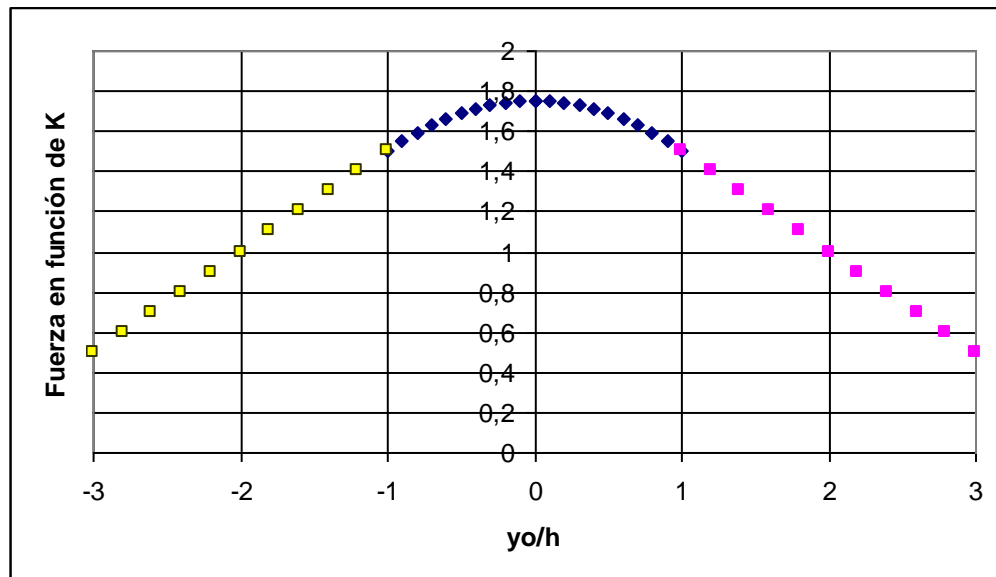
Si a  $\frac{I_0 hw}{c} (1 - \cos \theta) = K$ , entonces, las ecuaciones anteriores quedan así

$$F_x = K \left( 2 - \frac{y_0}{2h} \right) \quad ; \quad F_x = K \left( \frac{7}{4} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right)$$

Cuando  $y_0 = h$ , ambas ecuaciones deben dar el mismo valor.

$$F_x = K \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3K}{2} \quad ; \quad F_x = K \left( \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3K}{2}$$

La representación gráfica se obtiene en función de K



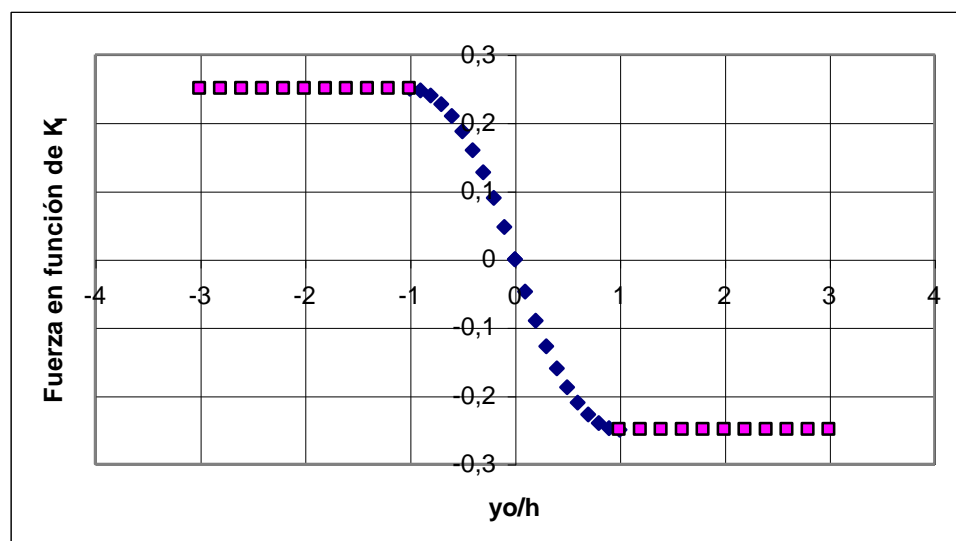
Para la representación de la fuerza sobre el eje Y, tenemos las ecuaciones siguientes

$$F_Y = -\frac{I_o hw}{4c} \text{sen}\theta \quad \text{válida cuando } h \leq y_o \leq 3h$$

$$F_Y = -\frac{I_o hw}{c} \text{sen}\theta \left(1 - \frac{y_o}{2h}\right) \frac{y_o}{2h} \quad \text{válida cuando } 0 \leq y_o \leq h$$

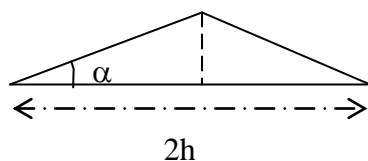
Si llamamos a  $\frac{I_o hw}{c} \text{sen}\theta = K_1$ , las ecuaciones anteriores quedan así

$$F_Y = \frac{K_1}{4} \quad , \quad F_Y = K_1 \left( \frac{y_o}{2h} - \left( \frac{y_o}{2h} \right)^2 \right)$$



### 3) Determinar la potencia del láser que pueda equilibrar al peso del prisma

Calculamos la masa del prisma



El área del triángulo es  $S = \frac{1}{2} 2h * H = h * h \operatorname{tag} \alpha$ ,

El volumen del prisma  $V = h^2 \operatorname{tag} \alpha w$ .

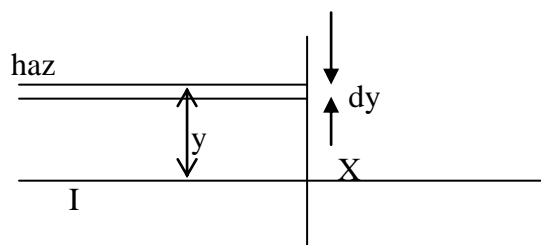
El peso del prisma es:

$$P = h^2 \operatorname{tag} \alpha w * \rho * g = (10 \cdot 10^{-6})^2 * \operatorname{tag} 30 * 2,5 \cdot 10^3 * 9,8 = 1,42 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

Este peso debe equilibrarse con la fuerza del haz que hemos calculado anteriormente

$$F_Y = \frac{I_o hw}{c} \operatorname{sen} \theta \left( 1 - \frac{y_o}{2h} \right) \frac{y_o}{2h} = 1,42 \cdot 10^{-9}$$

$$I_o \frac{10^{-3}}{3 \cdot 10^8} \operatorname{sen} 15,9^\circ \left( 1 - \frac{5 \cdot 10^{-6}}{2 * 10 \cdot 10^{-6}} \right) \frac{5 \cdot 10^{-6}}{2} = 1,42 \cdot 10^{-9} \Rightarrow I_o = 8,3 \cdot 10^8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$



La potencia del haz,  $P_1$ , por encima del eje X vale

$$P_1 = \int_0^{4h} I_o w \left( 1 - \frac{y}{4h} \right) dy = I_o w \left( y - \frac{y^2}{8h} \right)_0^{4h} = I_o w * 2h \Rightarrow$$

$$P_{\text{haz}} = I_o * w * 4h = 8,3 \cdot 10^8 * 10^{-3} * 40 \cdot 10^{-6} = 33,2 \text{ W}$$

### 4) Calcular el periodo de las oscilaciones del prisma

Cuando  $y = h/20$  en la ecuación de la fuerza vertical

$$F_Y = \frac{I_o hw}{c} \text{sen}\theta \left(1 - \frac{y_o}{2h}\right) \frac{y_o}{2h}$$

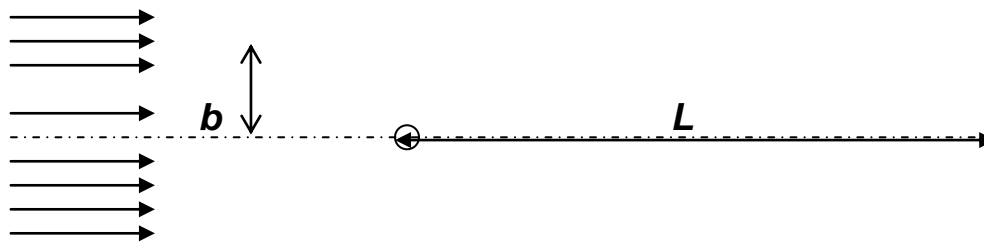
aproximadamente  $1 \gg \frac{h}{20} = \frac{1}{40}$ , con lo que la ecuación es.

$$F_Y = \frac{I_o hw}{c} \text{sen}\theta \left(1 - \frac{y_o}{2h}\right) \frac{y_o}{2h} = \frac{I_o w}{2c} \text{sen}\theta y = Ky$$

El periodo del movimiento armónico es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,42 \cdot 10^{-9}}{\frac{9,8}{10^8 * 10^{-3} * \text{sen}15,9}}} = 11,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

3.-Un voltaje  $V_0$  acelera a electrones dando lugar a un haz uniforme y paralelo. Los electrones pasan sobre un hilo delgado de cobre que está positivamente cargado. Dicho hilo es perpendicular a la dirección del haz (véase la figura)



*El hilo cargado es perpendicular al plano del papel*

*El símbolo  $b$  indica la distancia a la cual pasaría un electrón por encima del hilo si este no tuviese carga. Los electrones inciden sobre una pantalla que está a una distancia  $L \gg b$  del hilo.*

*El valor máximo de  $b$  es  $b_{max}$  siendo positivo por encima del hilo y negativo por debajo de él.*

1) *Calcular el campo eléctrico  $E$  producido por el hilo, expresándolo en función de la distancia al eje del hilo*

2) *Determine la deflexión angular del electrón para aquellos electrones que no choquen con el hilo. Sea  $\varphi_{final}$  el pequeño ángulo entre la velocidad inicial del electrón y la velocidad de éste cuando alcance la pantalla*

3) *Calcule y haga un esquema de los impactos (esto es, la distribución) en la pantalla según la física clásica*

4) *Haga lo mismo pero desde el punto de vista de la física cuántica.*

**Datos:**  $\epsilon_0 = 8,5 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2}$  ;

*radio del hilo  $r_0 = 10^{-6} \text{ m}$  ;*

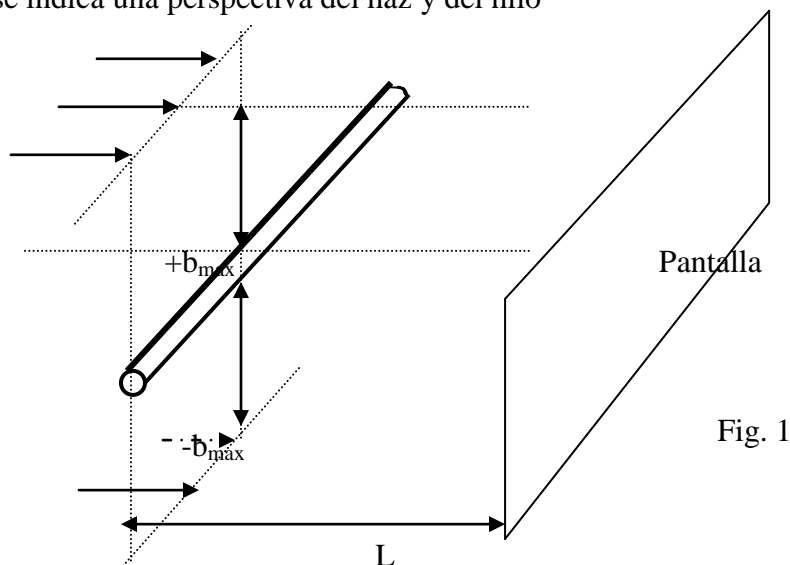
*máximo valor de  $b = b_{max} = 10^{-4} \text{ m}$ ;*

*Carga del hilo por unidad de longitud  $\lambda = 4,4 \cdot 10^{-11} \text{ Cm}^{-1}$ ,*

*$V_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ V}$  ;  $L = 0,3 \text{ m}$  ;*

*carga y masa del electrón  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ;  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$*

En la figura 1 se indica una perspectiva del haz y del hilo



Si el hilo no estuviese cargado los electrones del extremo superior e inferior del haz pasarían a una distancia  $b$ . Como el hilo está cargado positivamente el haz superior de electrones se curva ligeramente hacia abajo y el haz inferior hacia arriba.

**1) Calcular el campo eléctrico  $E$  producido por el hilo, expresándolo en función de la distancia al eje del hilo**

Para calcular el campo eléctrico producido por el hilo conductor utilizamos el teorema de Gauss. Para ello consideramos una longitud de hilo  $Y$ , rodeado de un cilindro de radio  $r$

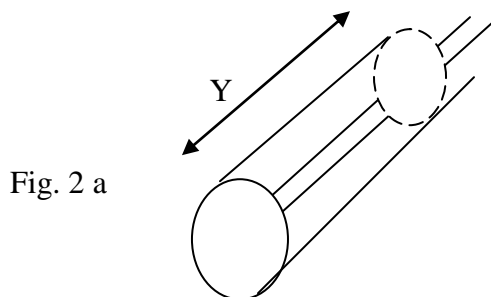


Fig. 2 a

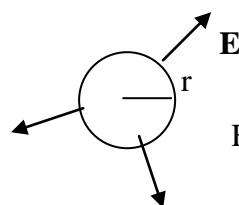


Fig. 2 b

Por simetría el campo eléctrico  $E$  será perpendicular al eje del hilo conductor en cada punto del espacio, tal como se ve en la figura 2b.

La longitud de hilo  $L$  lleva una carga  $Q = \lambda Y$

$$\Phi = \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_s E \cdot dS \cdot \cos 0^\circ = E * 2\pi r Y = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda Y}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

$E$  corresponde a los puntos de la superficie y exterior del hilo, en el interior el campo es nulo por ser el cobre un buen conductor

**2) Determine la deflexión angular del electrón para aquellos electrones que no choquen con el hilo**

En la figura 3 se indican las fuerzas que actúan sobre los electrones. La figura se ha hecho suponiendo que no existe desviación

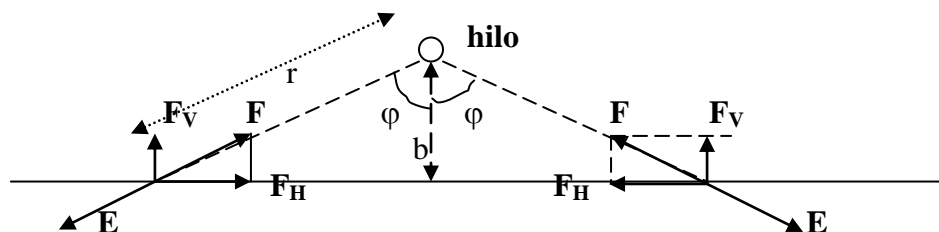


Fig. 3

Obsérvese que la componente vertical de la fuerza  $F_H$  acelera los electrones a la izquierda del hilo y los desacelera a la derecha. Dada la simetría, resulta que cuando el electrón llegue a la pantalla lleva la misma velocidad que le proporcionó el voltaje acelerador. En cambio, la fuerza vertical  $F_V$  tiende a acercar los electrones hacia el hilo.

Hacemos la aproximación de que la velocidad  $v_o$  de los electrones (dirección horizontal) se mantiene constante. La fuerza que sufre un electrón de carga  $e$  cuando la distancia al hilo es  $r$

$$F_V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} * e \cos \varphi = m \frac{dv_v}{dt} \quad (1)$$

De la figura 3 se deduce que  $r = \frac{b}{\cos \varphi}$  (2)

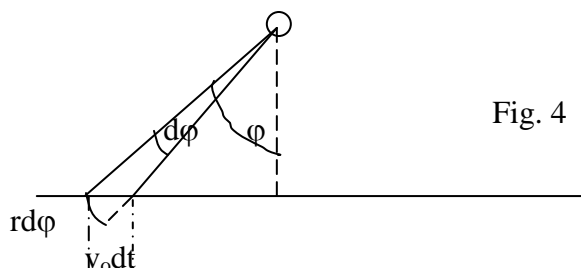


Fig. 4

Si transcurre un tiempo  $dt$  el electrón se ha desplazado  $v_o dt$  y el ángulo vale  $d\varphi$  y el arco  $= r d\varphi$ . De la figura 4 se puede escribir:

$$v_o dt \cos \varphi = r d\varphi \quad (4)$$

La ecuación (1) podemos escribirla, haciendo uso de la relación (4)

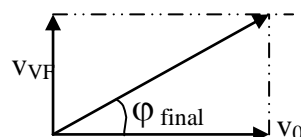
$$F_V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} * e \cos \varphi = m \frac{dv_v}{d\varphi} * \frac{d\varphi}{dt} = m \frac{dv_v}{d\varphi} * \frac{v_o \cos \varphi}{r} \longrightarrow$$

$$\frac{\lambda e}{2\pi \epsilon_0} = m v_o \frac{dv_v}{d\varphi} \Rightarrow \frac{\lambda e}{2\pi \epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = m v_o \int_0^{v_{VF}} dv_v \Rightarrow \frac{\lambda e}{2\pi \epsilon_0} \left[ \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] = m v_o v_{VF} \longrightarrow$$

$$\frac{\lambda e}{2\varepsilon} = m v_o v_{VF} \Rightarrow v_{VF} = \frac{\lambda e}{2\varepsilon m v_o}$$

Se ha hecho la aproximación de que los electrones vienen por la izquierda muy alejados del hilo y que la pantalla está a la derecha del hilo muy alejada, así los ángulos son  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ .

El ángulo final de deflexión tal como dice el enunciado es



$$\text{tag } \varphi_{final} = \frac{v_{VF}}{v_o} = \frac{\frac{\lambda e}{2\varepsilon_0 m v_o}}{v_o} = \frac{\lambda e}{2\varepsilon_0 m v_o^2}$$

La velocidad  $v_o$  la ponemos en función del voltaje acelerador

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = e V_o$$

$$\text{tag } \varphi_{final} = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0 V_o} = \frac{4,4 \cdot 10^{-11}}{4 * 8,85 \cdot 10^{-12} * 2 \cdot 10^4} = 6,2 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \varphi_{final} = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

### 3) Calcule y haga un esquema de los impactos (esto es, la distribución) en la pantalla según la física clásica

El haz electrónico superior al hilo se curva hacia abajo y el haz inferior simétrico del anterior se curva hacia arriba por lo que ambos deben cruzarse en algún lugar

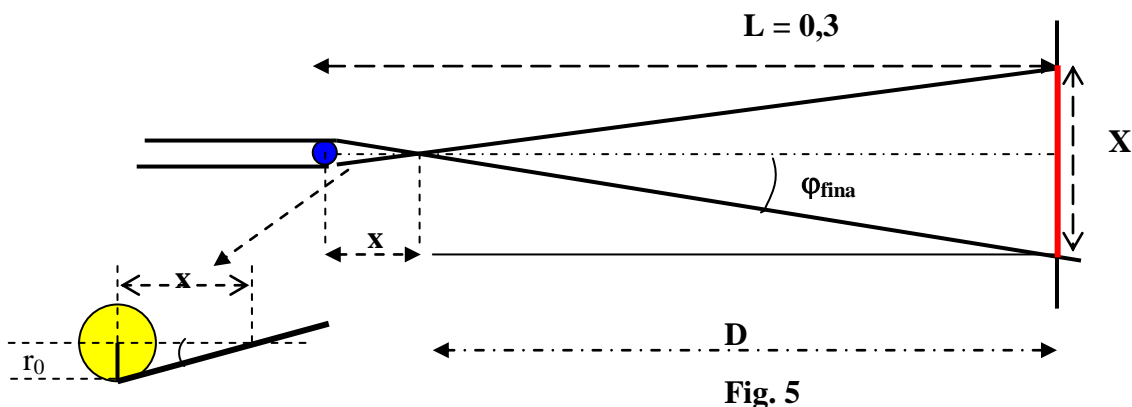


Fig. 5

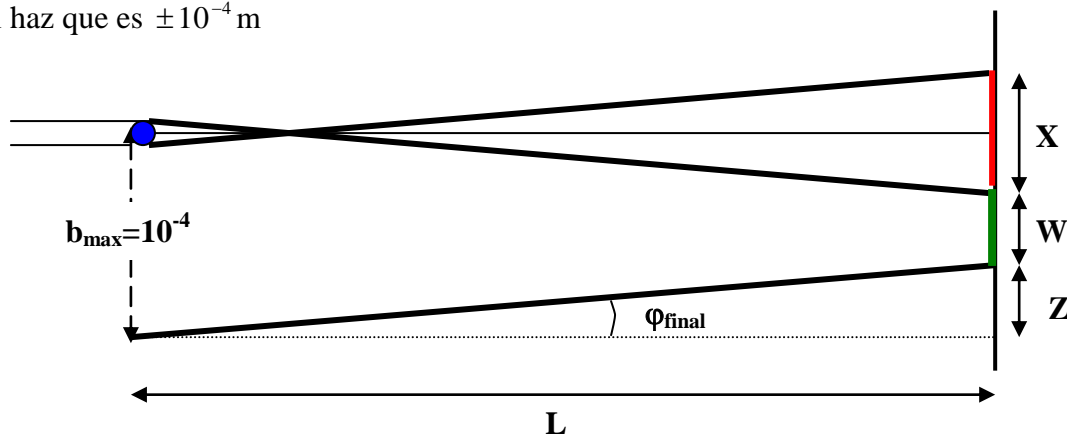
Para calcular el lugar del cruce en la figura 5 se dibuja la marcha de los electrones suponiendo que la deflexión se produce en las proximidades del hilo conductor

$$\operatorname{tag} \varphi_{\text{final}} = \frac{r_0}{x} \Rightarrow x = \frac{r_0}{\operatorname{tag} \varphi_{\text{final}}} = \frac{10^{-6}}{6,2 \cdot 10^{-5}} = 0,016 \text{ m}$$

Se deduce que la pantalla dista del lugar de intersección  $D = 0,3 - 0,016 = 0,284 \text{ m}$ . Existe por tanto una zona de superposición que se produce a partir de  $0,016 \text{ m}$  del hilo y que está representada en la figura 5. La extensión de la zona de superposición en la pantalla vale

$$X = 2 D \operatorname{tag} \varphi_{\text{final}} = 2 * 0,284 * 6,2 \cdot 10^{-5} = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Vamos a calcular la zona en la que no existe superposición, teniendo en cuenta el ancho del haz que es  $\pm 10^{-4} \text{ m}$



**Fig. 6**

De la figura 6 se deduce:

$$\operatorname{tag} \varphi_{\text{final}} = \frac{Z}{L} \Rightarrow Z = 0,3 * 6,2 \cdot 10^{-5} = 1,86 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\frac{X}{2} + W + Z = b_{\text{max}} \Rightarrow W = 10^{-4} - \frac{3,5 \cdot 10^{-5}}{2} - 1,86 \cdot 10^{-5} = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

La pantalla tiene una zona ( $X = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ ) de distribución de densidad electrónica doble que la que existe por encima y por debajo con valores respectivos  $6,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

#### 4) Haga lo mismo desde el punto de vista de la física cuántica

De acuerdo con la hipótesis de De Broglie, al electrón puede dársele carácter ondulatorio, con una longitud de onda dada por la expresión

$$\lambda = \frac{h}{mv_0} = \frac{h}{m \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2emV_0}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 * 1,6 \cdot 10^{-19} * 9,1 \cdot 10^{-31} * 2 \cdot 10^4}} = 8,7 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

En la zona de superposición de la figura 4 y concretamente en la pantalla se producirán interferencias al solaparse los dos frentes de ondas. En la figura 7 se ha hecho un esquema de cómo se produce la interferencia

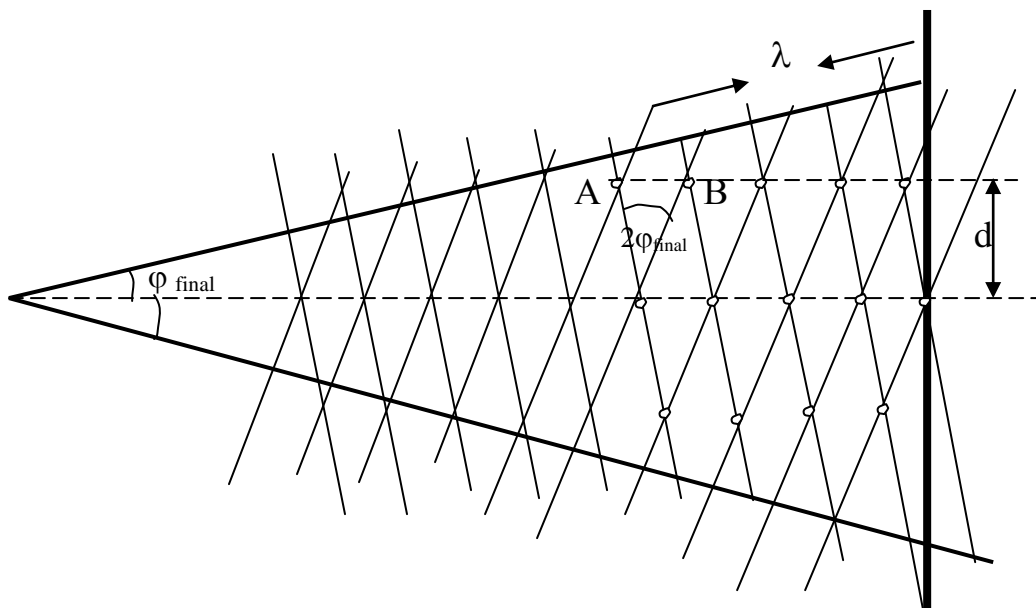


Fig. 7

De la figura 7 se deduce que la distancia en pantalla entre dos máximos de interferencia es  $d$

$$\frac{\lambda}{\cos \varphi_{\text{final}}} = AB; \operatorname{tag} \varphi_{\text{final}} = \frac{AB}{d} = \frac{\lambda}{2 \cos \varphi_{\text{final}} d} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen} \varphi_{\text{final}}} = \frac{\lambda}{2 \varphi_{\text{final}}} = \frac{8,7 \cdot 10^{-12}}{2 * 6,2 \cdot 10^{-5}}$$

$$d = 7,0 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

teniendo en cuenta la extensión de la zona de interferencia, resultan los siguientes máximos

$$N = \frac{3,5 \cdot 10^{-5}}{7 \cdot 10^{-8}} = 500$$