

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

## XXV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. CHINA. 1994

### 1.-PARTÍCULA RELATIVISTA

*En la teoría especial de la relatividad la relación entre la energía  $E$  y el momento  $p$  de una partícula libre de masa en reposo  $m_0$  es:*

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

*Cuando la citada partícula esta bajo la acción de una fuerza conservativa, la energía total de la partícula, la cual es la suma de  $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$  y la energía potencial, se conserva. Si la energía de la partícula es muy grande, su energía en reposo puede despreciarse (tal partícula se denomina ultrarrelativista).*

*1) Considerar el movimiento unidimensional de una partícula ultrarrelativista que está sometida a una fuerza central de módulo  $f$ . Suponer que la partícula está localizada en el origen de la fuerza siendo su momento inicial  $p_0$  en el tiempo  $t=0$ . Describir el movimiento de la partícula dibujando , al menos durante un periodo,  $x$  frente a  $t$  y el momento  $p$  frente a  $x$ . Especificar las coordenadas de los puntos de retorno en función de los parámetros  $p_0$  y  $f$ . Indicar con flechas la dirección del progreso del movimiento en el diagrama  $(p,x)$ . Existen intervalos muy cortos para los que la partícula no es ultrarrelativista , aunque estos deben ser ignorados.*

*2) Un mesón es una partícula formada por dos quarks. La masa en reposo del mesón es  $M$  y esta magnitud multiplicada por  $c^2$  es la energía total de los dos quarks .*

*Considerar un modelo unidimensional para el mesón en reposo, en el cual se supone que los quarks se mueven a lo largo del eje  $x$  atrayéndose entre sí con una fuerza de módulo constante  $f$ . Se admite que ellos pueden pasar uno a través del otro libremente. La masa en reposo de los quarks se desprecia. En el tiempo  $t=0$ , los dos quarks se encuentran en  $x=0$ . Mostrar separadamente el movimiento de los dos quarks en los diagramas  $(x,t)$  y  $(p,x)$  especificando los puntos de retorno en función de  $M$  y  $f$  e indicando la dirección del proceso en el diagrama  $(p,x)$  y determinar la distancia máxima entre ellos.*

*3) El sistema de referencia utilizado en el apartado 2) se denomina sistema  $S$ ; el sistema ligado al laboratorio, referido como  $S'$ , se mueve*

en la dirección negativa del eje X con velocidad constante  $v = 0,6 c$ . Las coordenadas de los dos sistemas de referencia se han elegido de modo que  $x = 0$  en S coincide con  $x' = 0$  en S', en el tiempo  $t = t' = 0$ . Dibujar el movimiento de los dos quarks en un diagrama  $(x', t')$ . Especificar las coordenadas del punto de retorno en función de M, f y c y determine la máxima distancia entre los dos quarks en el sistema del laboratorio S'. Las coordenadas de una partícula observada en los sistemas S y S' están relacionadas por la transformación de Lorentz

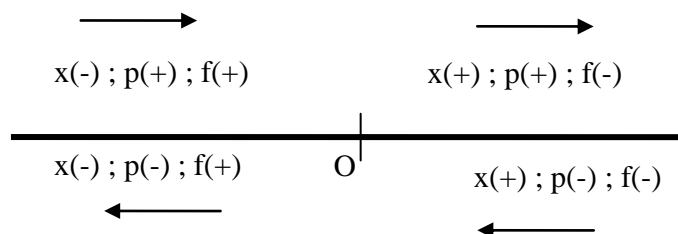
$$x' = \gamma(x + \beta ct) \quad ; \quad t' = \gamma\left(t + \beta \frac{x}{c}\right)$$

Donde  $\beta = \frac{v}{c}$  ;  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , siendo v la velocidad del sistema S moviéndose con relación al sistema S'.

4) Para un mesón con masa en reposo  $Mc^2 = 140 \text{ MeV}$  y velocidad 0,6c relativa al sistema del laboratorio S, determinar la energía E' en dicho sistema

1)

Para entender el problema recurrimos a un movimiento armónico a lo largo del eje X.



Las flechas indican el movimiento, los signos + y - se refieren a las magnitudes, posición x, cantidad de movimiento y fuerza.

De acuerdo con el enunciado del problema para la partícula ultrarrelativista, la suma de energía es constante y en el punto central vale  $p_0 c$ .

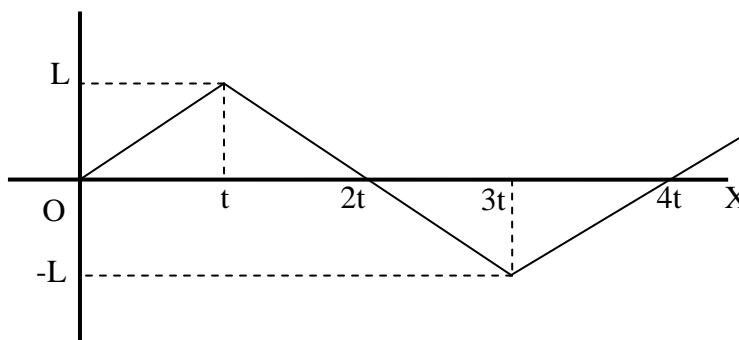
$$E = pc + fx = p_0 c$$

La derivada de p con respecto del tiempo es la fuerza

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{f}{c} * \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v = -\frac{c}{f} f$$

La velocidad de la partícula entre O y el extremo derecho es constante y vale c, lo mismo de L a O, e igual de O a -L e igual de -L a O. Si la velocidad es constante la grafica posición tiempo son líneas rectas de pendiente +c o -c.

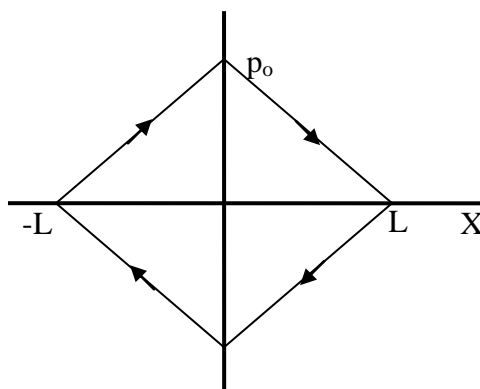
El tiempo transcurrido para que la partícula vaya desde O hasta L es:  $t = \frac{L}{c}$ , siendo L la distancia OL.



En el extremo L la cantidad de movimiento es cero, luego

$$fL = p_0 c \longrightarrow L = \frac{p_0 c}{f}$$

En la expresión  $pc + fx = p_0 c$  despejamos p,  $p = p_0 - \frac{fx}{c}$ , en el origen  $x=0$  y  $p=p_0$ , a medida que la partícula se aleja del origen p disminuye hasta anularse



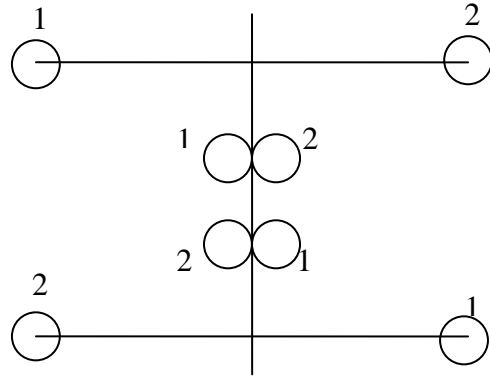
2)

Imaginemos un muelle, sin dimensiones, que esta sobre una mesa horizontal con dos masas iguales en sus extremos. Estiramos el muelle una cierta longitud, las dos masas tienen coordenadas iguales en módulo respecto del centro del muelle. Si dejamos las masas en libertad, y no existe ningún tipo de rozamiento, ambas alcanzarían la posición central. Si admitimos que las masas pueden pasar una sobre la otra terminarían por ocupar las posiciones extremas iniciales, pero la masa 1 en la posición de la 2 y viceversa. La figura inferior aclara esta situación.

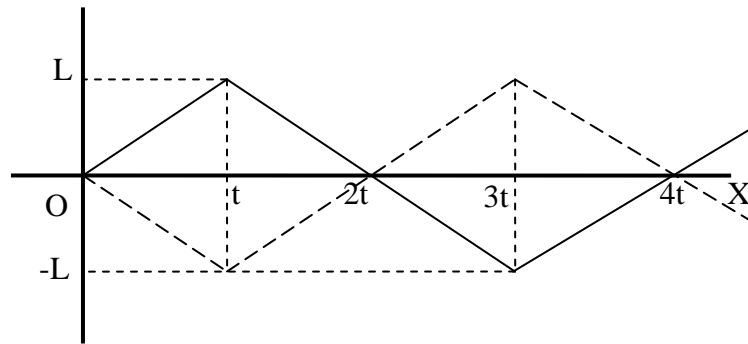
El movimiento de las masas es simétrico, por tanto, tendrán la misma energía y ocuparán posiciones simétricas respecto del centro.

Si nos fijamos en una de las dos masas su movimiento es como si la otra no estuviese, en otras palabras, como en el caso del apartado anterior. El movimiento de los quarks es igual al aquí indicado y cada uno tendrá la misma energía. Como el mesón tiene una

energía  $\frac{M}{c^2}$ , cada quark tendrá la mitad de esa energía.



El diagrama de posición



Utilizando la expresión  $E = pc + fx = p_0c$  en la posición central de uno de los quarks

$$\frac{Mc^2}{2} = p_0c \Rightarrow p_0 = \frac{Mc}{2}$$

En la posición extrema de uno de los quarks

$$\frac{Mc^2}{2} = f L \Rightarrow L = \frac{Mc^2}{2f}$$

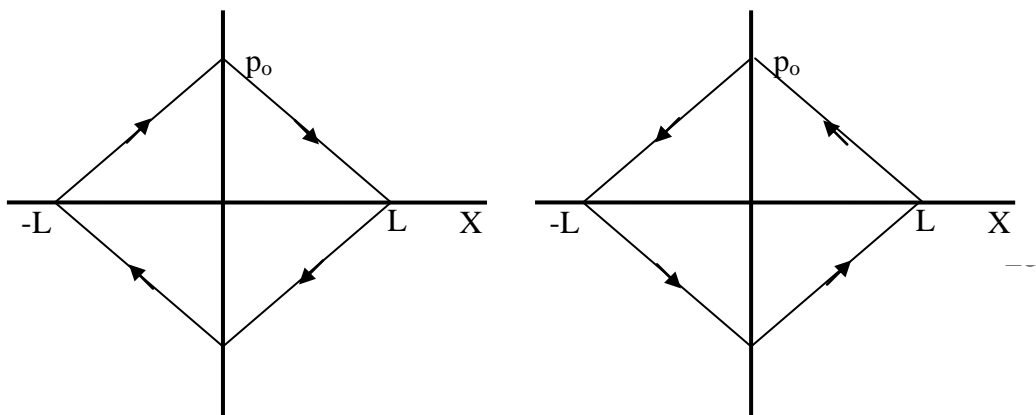
El valor de t :

$$t = \frac{L}{c} = \frac{Mc}{2f}$$

La distancia máxima es 2L

$$d = 2L = \frac{2Mc^2}{2f} = \frac{Mc^2}{f}$$

Los diagramas (p,x) son :



3)

Basta utilizar las formulas de transformación para encontrar las posiciones y tiempos en el sistema S'.

$$x' = \gamma(x + \beta ct) \quad ; \quad t' = \gamma\left(t + \frac{\beta x}{c}\right)$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0,6c}{c} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{5}{4}$$

Posiciones y tiempos del quark 1 en el sistema S

- 1) (0,0)      2) (L,  $t = \frac{L}{c}$ )      3) (0,  $2t = \frac{2L}{c}$ )      4) (-L,  $3t = \frac{3L}{c}$ )  
 5) (0,  $4t = \frac{4L}{c}$ )

Posiciones y tiempos del quark 1 en el sistema S'

- 1)      **(0,0)**

$$\gamma(x + \beta ct) = \gamma(L + \beta L) = \frac{5}{4}\left(L + \frac{3}{5}L\right) = \mathbf{2L}$$

2)

$$\gamma\left(t + \frac{\beta x}{c}\right) = \gamma\left(\frac{L}{c} + \frac{\beta L}{c}\right) = \frac{\frac{5}{4}L + \frac{5}{4} * \frac{3}{5}L}{c} = \frac{2L}{c} = \mathbf{2t}$$

3)

$$\gamma(x + \beta ct) = \gamma(0 + \beta 2L) = \gamma \beta 2L = \frac{5}{4} * \frac{3}{5} * 2L = \frac{\mathbf{3L}}{2}$$

$$\gamma\left(t + \frac{\beta x}{c}\right) = \gamma\left(\frac{2L}{c}\right) = \frac{5}{4} * \frac{2L}{c} = \frac{5L}{2c} = \frac{\mathbf{5}}{2}t$$

4)

$$\gamma(x + \beta ct) = \gamma(-L + \beta 3L) = -\gamma L + \gamma \beta L = -\frac{5}{4}L + \frac{3}{4} * 3L = \mathbf{L}$$

$$\gamma\left(t + \frac{\beta x}{c}\right) = \gamma\left(\frac{3L}{c} - \beta \frac{L}{c}\right) = 3 * \frac{5L}{4c} - \frac{3L}{4c} = 3 \frac{L}{c} = \mathbf{3t}$$

5)

$$\gamma(x + \beta ct) = \gamma(0 + \beta 4L) = \gamma \beta 4L = \frac{5}{4} * \frac{3}{5} * 4L = \mathbf{3L}$$

$$\gamma\left(t + \frac{\beta x}{c}\right) = \gamma(4t) = \frac{5}{4} * 4t = \mathbf{5t}$$

Posiciones y tiempos del quark 2 en el sistema S

- 1)  $(0,0)$       2)  $(-L, t = \frac{L}{c})$       3)  $(0, 2t = \frac{2L}{c})$       4)  $(L, 3t = \frac{3L}{c})$   
 5)  $(0, 4t = \frac{4L}{c})$

Posiciones y tiempos del quark 2 en el sistema  $S'$

- 1)       **$(0,0)$**

$$\gamma(x + \beta ct) = \gamma(-L + \beta L) = \frac{5}{4} \left( -L + \frac{3}{5}L \right) = -\frac{5}{4}L + \frac{3}{4}L = \frac{1}{2}L$$

- 2)

$$\gamma\left(t + \frac{\beta x}{c}\right) = \gamma\left(\frac{L}{c} - \frac{\beta L}{c}\right) = \frac{\frac{5}{4}L - \frac{5}{4} * \frac{3}{5}L}{c} = \frac{1L}{2c} = \frac{1}{2}t$$

- 3)

$$\gamma(x + \beta ct) = \gamma(0 + \beta 2L) = \gamma \beta 2L = \frac{5}{4} * \frac{3}{5} * 2L = \frac{3}{2}L$$

$$\gamma\left(t + \frac{\beta x}{c}\right) = \gamma(2L) = 2 * \frac{5L}{4c} = \frac{5}{2}t$$

- 4)

$$\gamma(x + \beta ct) = \gamma(L + \beta 3L) = \frac{5}{4}L + \frac{3}{4} * 3L = \frac{7}{2}L$$

$$\gamma\left(t + \frac{\beta x}{c}\right) = \gamma(3L + \beta L) = \frac{15}{4}L + \frac{3}{4}L = \frac{9}{2}t$$

- 5)

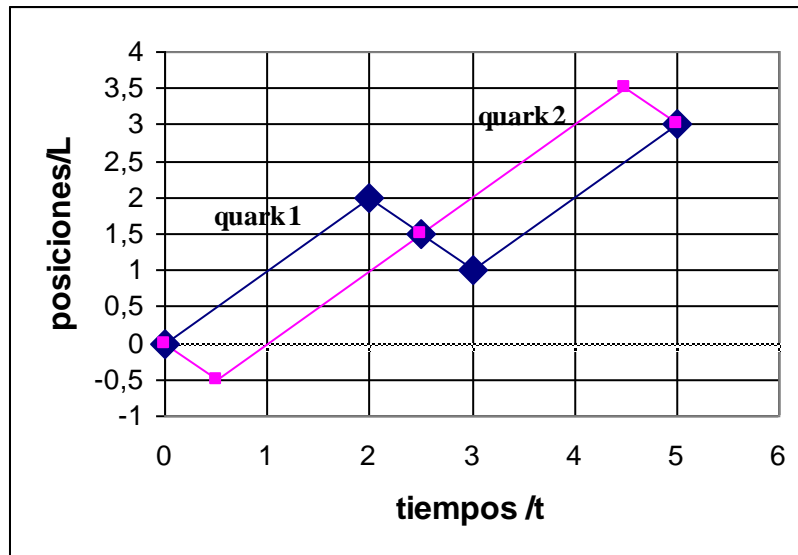
$$\gamma(x + \beta ct) = \gamma(0 + \beta 4L) = \gamma \beta 4L = \frac{5}{4} * \frac{3}{5} * 4L = 3L$$

$$\gamma\left(t + \frac{\beta x}{c}\right) = \gamma\left(4 \frac{L}{c}\right) = \frac{5}{4} * \frac{4L}{c} = 5t$$

Resumiendo las posiciones y los tiempos de los quarks

Quark1	0,0	2L,2t	$\frac{3}{2}L, \frac{5}{2}t$	L,3t	3L,5t
Quark 2	0,0	$-\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}t$	$\frac{3}{2}L, \frac{5}{2}t$	$\frac{7}{2}L, \frac{9}{2}t$	3L, 5t

La gráfica de los valores anteriores



De la gráfica se deduce que la máxima distancia es  $1L = \frac{Mc^2}{f}$ , lo cual ocurre a varios tiempos, por ejemplo a  $1t$ ,  $2t$ ,  $3t$ ,  $4t$ .

4)

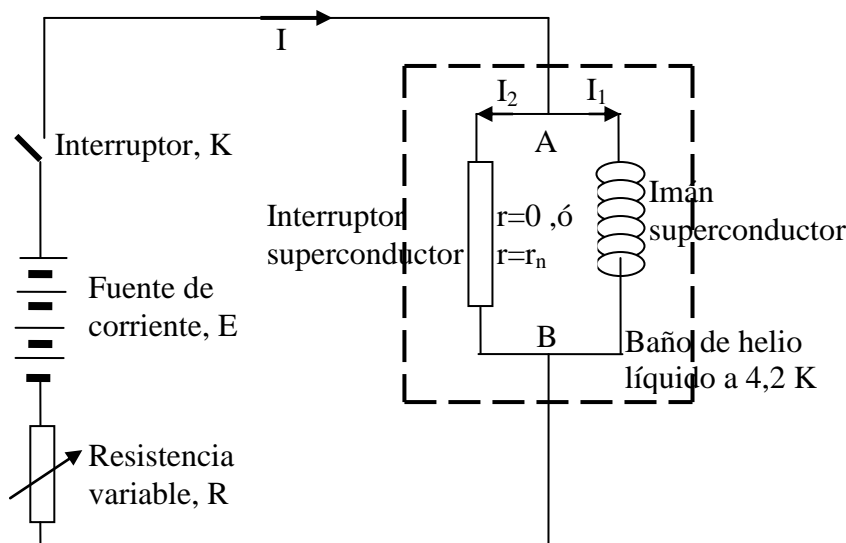
La energía total de la partícula es:  $E = mc^2$ , en la que  $m$  es la masa relativista

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , por tanto

$$E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{140 \text{ MeV}}{\sqrt{1-0,36}} = 175 \text{ MeV}$$

## 2.- IMÁN SUPERCONDUCTOR

Los imanes superconductores se utilizan ampliamente en los laboratorios. La forma más corriente de un imán superconductor lo constituye un solenoide hecho con hilos superconductores. Lo llamativo de los imanes superconductores es que con ellos se logran campos magnéticos intensos sin que haya disipación de energía térmica por efecto Joule, debido a que la resistencia eléctrica de un hilo superconductor se anula cuando el imán se sumerge en helio líquido a una temperatura de 4,2 K. El imán generalmente tiene un diseño con un interruptor superconductor como el que se muestra en la figura 1. La resistencia eléctrica de este interruptor se puede controlar:  $r = 0$  en el estado superconductor ó  $r = r_n$  en estado normal. Cuando el sistema se encuentra en un estado persistente, circula de modo permanente una corriente por el imán y por el interruptor, este modo permite mantener un campo magnético por largos periodos aunque la fuente de corriente externa esté apagada.



*Fig.1*

Los detalles del interruptor superconductor no aparecen en la figura 1. Normalmente es una pequeña tira de material superconductor envuelto por un hilo que puede calentarse y convenientemente aislado del baño de helio líquido. Cuando el hilo se calienta la temperatura de la tira superconductora aumenta y su estado revierte al estado normal  $r = r_n$ . La resistencia es de unos pocos ohmios, en este problema de  $5\Omega$ . La inductancia del imán superconductor depende su tamaño, aquí se

supone que  $L = 10 \text{ H}$ . La corriente total se puede modificar variando la resistencia  $R$ .

1.- Si la corriente  $I$  y la resistencia del interruptor superconductor se controlan de manera que varíen como indican las figuras 2a y 2b respectivamente y suponiendo que las corriente  $I_1$  e  $I_2$  que fluyen a través del imán y del interruptor superconductor son iguales al principio (fig. 2c y 2d), indicar cómo varían a medida que transcurre el tiempo.

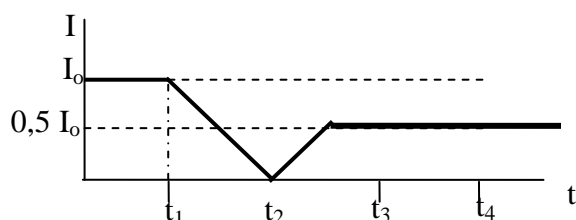


Fig.2a

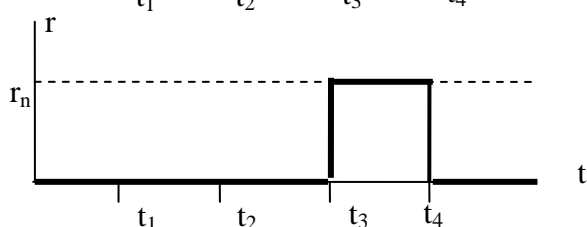


Fig.2b

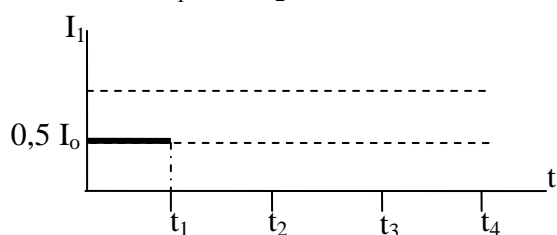


Fig.2c

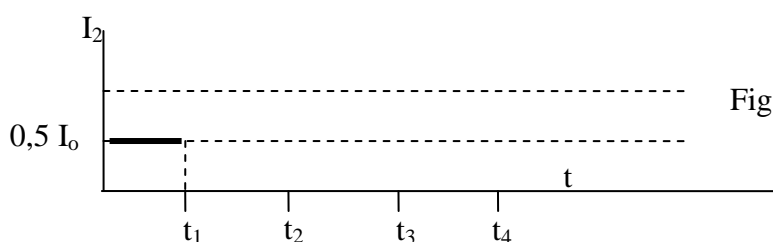


Fig.2d

### 1) Solución

Entre los tiempos 0 a  $t_3$  la resistencia eléctrica del interruptor superconductor es cero. Aplicando la ley de Ohm entre los puntos A y B, resulta que  $V_A - V_B = Ir = 0$ , luego la diferencia de potencial es nula.

Si analizamos la bobina nos encontramos que una variación de la corriente que la atraviesa produce una diferencia de potencial en sus extremos dada por

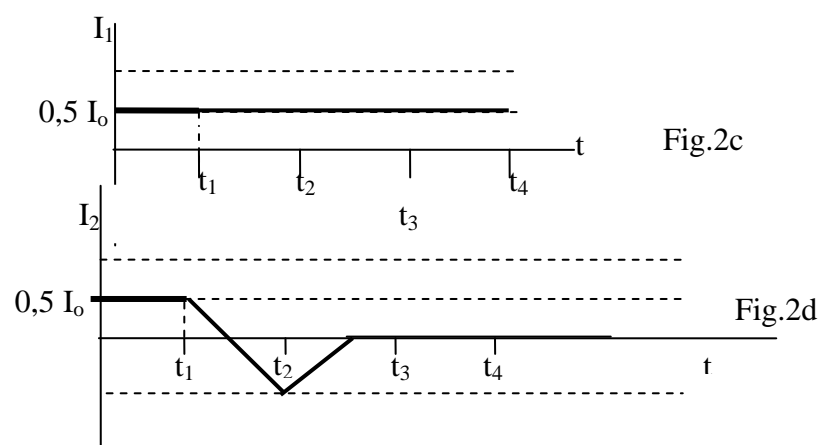
$$V = L \frac{di}{dt}$$

Pero si esa diferencia de potencial es nula, también tiene que ser  $\frac{di}{dt} = 0$ , lo cual indica que no hay variación de la corriente por la bobina entre  $t_1$  y  $t_3$  y por consiguiente sigue pasando la corriente  $0,5 I_0$ .

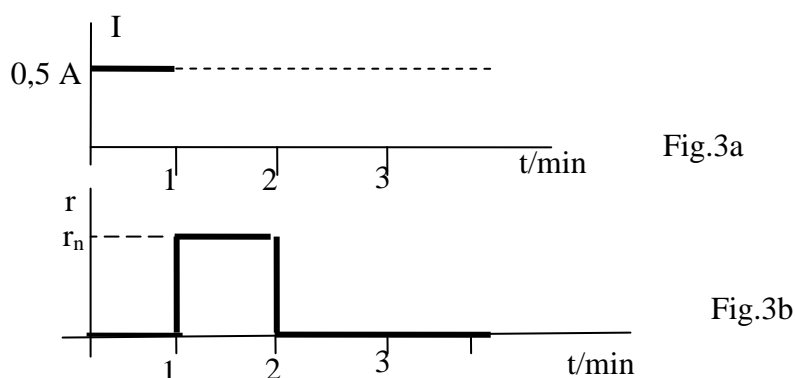
La intensidad que pasa por el interruptor superconductor debe ser

$$I_2 = I - I_1 = I - 0,5I_0$$

A partir de  $t_1$  la intensidad  $I$  disminuye linealmente hasta anularse en  $t_2$ . En la gráfica se observa que a la mitad de  $t_1$  y  $t_2$ , la intensidad  $I = 0,5 I_0$ , con lo que  $I_2 = 0$  y cuando  $t = t_2$ ,  $I = 0$ , por tanto  $I_2 = -0,5 I_0$ . A partir de  $t_2$  la intensidad  $I$  crece hasta valer  $0,5 I_0$ . El valor de  $I_2$  también crecerá hasta anularse. Las gráficas de  $I_1$  e  $I_2$  son las siguientes



**2.- Suponer que el interruptor  $K$  se cierra a  $t=0$ , cuando  $r=0$ ,  $I_1 = 0$  y  $R = 7,5 \Omega$  y la corriente total es  $I=0,5 \text{ A}$ . Con  $K$  mantenido cerrado, la resistencia  $r$  del interruptor superconductor se varía tal como indica la figura 3b . Determinar cómo varían  $I$ ,  $I_1$  e  $I_2$ .**



En el primer minuto la resistencia del interruptor-superconductor es cero y ya hemos analizado en el caso anterior que  $I_1$  no cambia ya que  $\frac{dI_1}{dt} = 0$ . Como la corriente

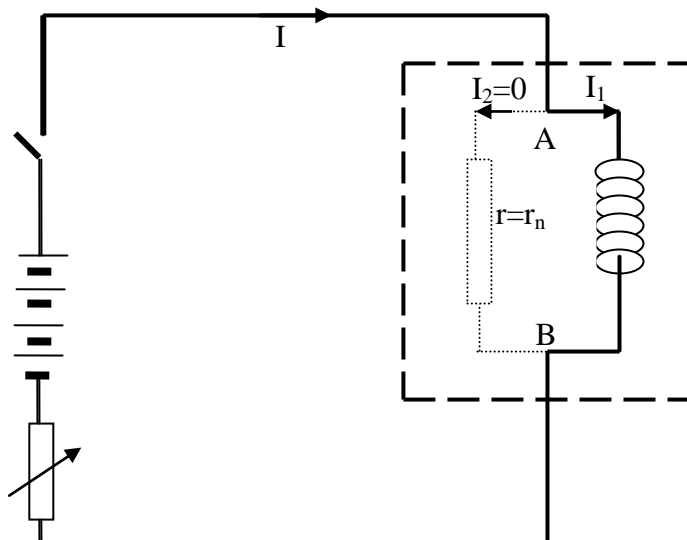
principal es de 0,5 A esa es la corriente que circula durante el primer minuto por el interruptor-superconductor, por el imán

$$I_1 = I - I_2 = 0$$

Al llegar a  $t = 1\text{min}$  se produce de modo abrupto una disminución de  $I$  ya que el circuito ahora tiene una resistencia de  $5 + 7,5 = 12,5 \Omega$  cuando antes tenía solamente  $7,5 \Omega$ . De modo casi instantáneo la corriente  $I = 0,5 \text{ A}$  pasa a

$$0,5 = \frac{E}{7,5} \quad , \quad I = \frac{E}{12,5} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{0,5 * 7,5}{12,5} = 0,3 \text{ A}$$

Pasado este pequeño intervalo de tiempo, resulta que el imán sigue siendo superconductor y por la resistencia  $r_n$  no pasará corriente, el circuito vuelve a tener una resistencia de  $7,5 \Omega$  e  $I = I_1$ .



La corriente  $I$  vuelve a ser 0,5 A y en consecuencia  $I = I_1 = 0,5 \text{ A}$  e  $I_2 = 0$ .

El tiempo que dura el establecimiento de la corriente en  $I$  desde 0,3 A a 0,5 A depende de la resistencias y autoinducción del circuito

$$\tau = \frac{L}{\Sigma R} = \frac{L}{\frac{R r_n}{R + r_n}} = \frac{L(R + r_n)}{R r_n} = \frac{10 * 12,5}{7,5 * 5} = 3,3 \text{ s}$$

La corriente  $I$  vale 0,5 A al llegar al minuto cae a 0,3 A y 3,3 segundos después se recupera a 0,5 A, la corriente  $I_1$  era cero pero en esos 3,3 segundos salta a 0,5 A y la corriente  $I_2$  que era 0,5 A cae en esos 3,3 segundos a cero. Después de los 3,33 s resulta que  $r = r_n$ , hasta los dos minutos, por tanto, nada cambia en las corrientes  $I$ ,  $I_1$  e  $I_2$ .

A partir de los dos minutos  $r_n = 0$ , la caída de tensión en el imán superconductor es cero

$$V = L \frac{dI_1}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI_1}{dt} = 0$$

La corriente en  $I_1$  no cambia y sigue valiendo lo que valía a los dos minutos, esto es, 0,5 A, también  $I = 0,5$  A e  $I_2$  seguirá valiendo cero.

Las gráficas de las corrientes son:

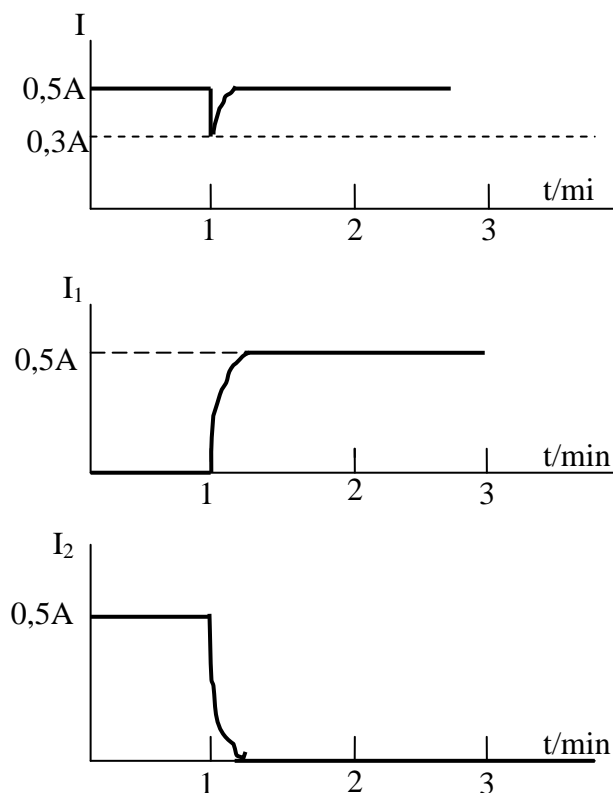


Fig.4

**3.- Solamente corrientes pequeñas, menores de 0,5 A, deben fluir a través del interruptor superconductor cuando se encuentra en su estado normal, con intensidad superiores el interruptor se quema. Suponer que el imán superconductor está operando en el modo persistente, esto es,  $I=0$ , e  $I_1 = i_1$  (esto es, 20 A),  $I_2 = -i_1$  como indica la figura 4, en el intervalo de 0 a 3 minutos. Si el experimento debe detenerse reduciendo la corriente a través del imán superconductor hasta cero ¿Cómo podría hacerse? Esta operación requiere varias etapas. Dibujar los correspondientes cambios de  $I$ ,  $r$ ,  $I_1$  e  $I_2$ .**

La condición clave del proceso es que por el interruptor en su estado normal  $r=r_n$  no puede circular una corriente superior a 0,5 A.

Mantenemos  $r=0$ , cerramos el interruptor K, y aumentamos la corriente I, la diferencia de potencial AB es nula por tanto la intensidad de corriente  $I_1$  no cambia y seguirá

valiendo 20 A, dado que  $I_2 = I - I_1$  al aumentar I por ejemplo a 10 A ,  $I_2 = 10 - 20 = -10$  A , y cuando  $I = 20$  A entonces  $I_2 = 0$ .

Al llegar a este punto pasamos al interruptor al estado normal en el cual  $r = r_n = 5 \Omega$ . y vamos disminuyendo la intensidad I. Esto supone que la corriente disminuya por  $I_1$  y esa disminución provoca la aparición de una caída de tensión entre A y B dada por:

$$V_{AB} = L \frac{dI_1}{dt}$$

Si aparece  $V_{AB}$  entonces por el interruptor pasa corriente y esta no puede exceder a 0,5 A, esto limita el valor máximo de  $V_{AB} = I_2 * r_n = 0,5 * 5 = 2,5$  V, por tanto:

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{V_{AB}}{L} = \frac{2,5}{10} = 0,25 \frac{A}{s} = \frac{dI}{dt}$$

Si I ha de pasar de 20 A a cero y además se ha de cumplir que esa disminución sea de 0,25 A cada segundo el tiempo mínimo de rebajar la corriente es:

$$t = 20A * \frac{1s}{0,25A} = 80 s = 1,33 \text{ min}$$

Cuando  $I=0$  , el interruptor se pasa a la posición  $r=0$

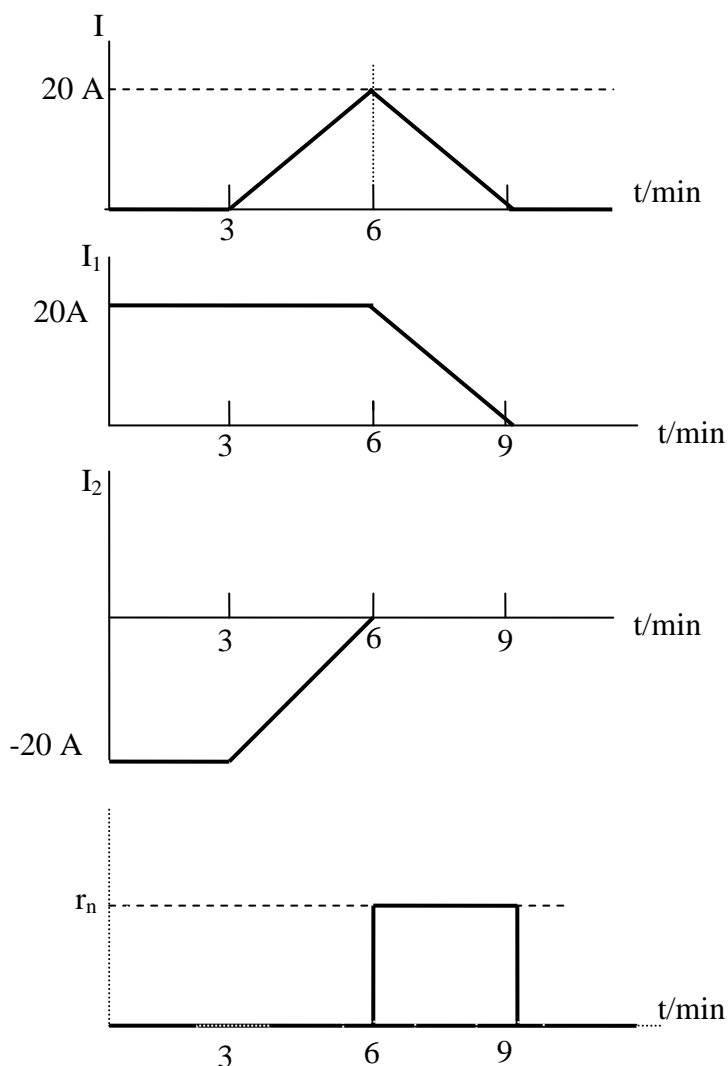


Fig.5

La figura 5 es una de las soluciones del problema.

Entre  $t=0$  y  $t=3$  minutos la intensidad  $I=0$ ,  $I_1=20$  A,  $I_2 = -20$  A y  $r=0$

Entre  $t=3$  min y  $t=6$  min,  $r = r_n = 5 \Omega$ . La intensidad  $I$  aumenta hasta 20 A y luego disminuye hasta cero en un tiempo de 3 minutos.

Esta condición cumple con la exigida para su disminución qy era que el tiempo debía de ser superior a 1,33 minutos.

**4.- Suponer que el imán está operando en el modo persistente con una corriente de 20 A(  $t=0$  a  $t=3$  minutos) ¿Cómo podríamos cambiar a un modo persistente con una corriente de 30 A?**

Nos fijamos en la figura 5 desde  $t=0$  a  $t=6$  minutos, en vez de disminuir la corriente  $I$ , como allí se hizo la aumentamos hasta 30 A, y además ponemos  $r = r_n$ , entonces  $I_1$  aumenta también a 30A, lo hacemos en un tiempo de 3 minutos para no violar la corriente que puede fluir por el interruptor (recuerde que el tiempo mínimo era 1,33 minutos,).

Reducimos la corriente de  $I$  a cero a partir de 9 minutos hasta 12 minutos y además ponemos el interruptor en  $r=0$ ; al ser  $V_{AB} = 0$ ,

$$dI_1/dt = 0,$$

luego la corriente en  $I_1$  se mantiene en 30 A,

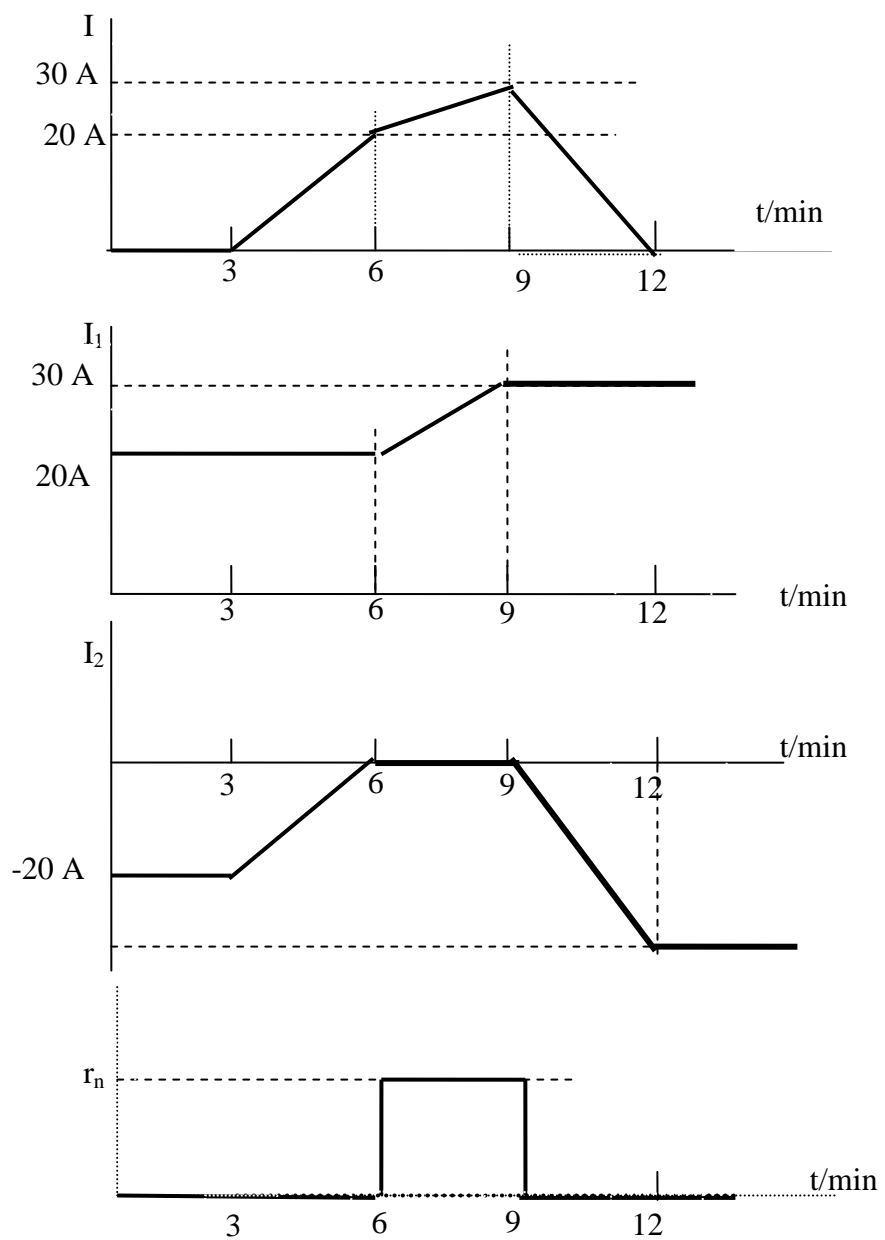
pero  $I_2 = I - I_1$ ,

cuando  $I = 30$  A,  $I_2 = 0$ ,

cuando  $I = 20$  A,  $I_2 = 20 - 30 = -10$  A

y cuando

$$I=0, I_2 = 0 - 30 = -30$$
 A



### 3.- CHOQUES ENTRE DISCOS CON SUPERFICIES CON ROZAMIENTO

*Un disco homogéneo A de masa  $m$  y radio  $R_A$ , se desplaza de modo uniforme sobre una superficie plana XY sin rozamiento, siendo la velocidad de su centro de masas  $V$ . El centro del disco se encuentra a una distancia  $b$  del sistema de coordenadas XY (ver figura 1)*

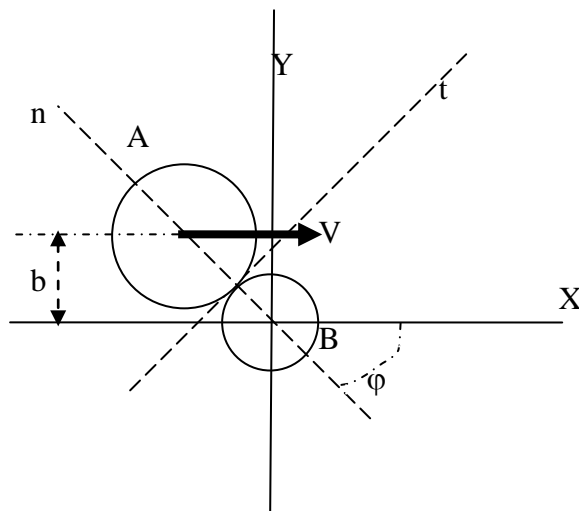


Fig.1

*El mencionado disco, choca con un disco B que se encuentra estacionario sobre el origen de coordenadas del sistema XY. El disco B tiene la misma masa y el mismo espesor que el disco A, pero su radio es  $R_B$ .*

*Se supone que las velocidades de los discos en el punto de contacto en la dirección del eje  $t$  son iguales después de la colisión. Se supone también que las velocidades relativas de los discos a lo largo del eje  $n$  son las mismas antes y después de la colisión.*

*1) Para tal colisión determinar las componentes de las velocidades de los dos discos después de la colisión sobre los ejes X e Y, esto es,  $V'_{AX}$ ,  $V'_{AY}$ ,  $V'_{BX}$ ,  $V'_{BY}$  en función de  $m$ ,  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $V$  y  $b$ .*

*2) Determinar la energía cinética de los dos discos después de la colisión en función de  $m$ ,  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $V$  y  $b$ .*

1)

Inmediatamente después de la colisión el disco A gira con una velocidad angular  $\omega_A$  y una velocidad lineal cuyas componentes sobre los ejes n y t son respectivamente en valor absoluto  $V'_{AX}$ ,  $V'_{AY}$ . El disco B gira con una velocidad angular  $\omega_B$  siendo las componentes de su velocidad lineal sobre los ejes n y t:  $V'_{BX}$ ,  $V'_{BY}$ . ver la figura 2.

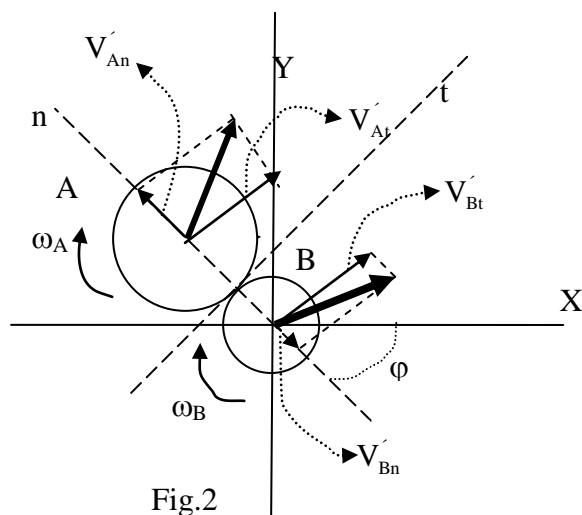


Fig.2

En la figura 2 se representan las componentes de las velocidades lineales de los discos sobre los ejes n y t.

1) Aplicamos el principio de conservación del momento lineal, y para ello nos fijamos en las figuras 1 y 2.

$$mV\text{sen } \varphi = mV'_{At} + mV'_{bt} \Rightarrow V\text{sen } \varphi = V'_{At} + V'_{bt} \quad (1)$$

$$mV\text{cos } \varphi = mV'_{An} + mV'_{bn} \Rightarrow V\text{cos } \varphi = V'_{An} + V'_{bn} \quad (2)$$

2) En el punto de contacto de ambos discos surgen fuerzas de rozamiento pero sus momentos respecto de ese punto son nulos, lo que implica que haya conservación del momento angular para cada disco

$$mV\text{sen } \varphi \cdot R_A = mV'_{At} R_A + I_A \omega_A, \text{ siendo } I_A = \frac{1}{2} mR_A^2 \Rightarrow$$

$$mV\text{sen } \varphi \cdot R_A = mV'_{At} R_A + \frac{1}{2} mR_A^2 \omega_A \Rightarrow R_A \omega_A = 2V\text{sen } \varphi - 2V'_{At} \quad (3)$$

$$0 = mV'_{Bt} R_B + I_B \omega_B, \text{ siendo } I_B = \frac{1}{2} mR_B^2 \Rightarrow$$

$$0 = -mV'_{Bt} R_B + \frac{1}{2} mR_B^2 \omega_B \Rightarrow R_B \omega_B = 2V'_{Bt} \quad (4)$$

3) Aplicamos las condiciones impuestas en el enunciado del problema

$$V'_{At} - \omega_A R_A = V'_{Bt} + \omega_B R_B \quad (5)$$

$$V \cos \varphi = -V'_{An} + V'_{Bn} \quad (6)$$

De las ecuaciones (2) y (6) se deduce que:

$$V'_{An} + V'_{Bn} = -V'_{An} + V'_{Bn} \Rightarrow V'_{An} = 0 \quad ; \quad V \cos \varphi = V'_{Bn}$$

De las ecuaciones (4) y (5), resulta:

$$V'_{At} - \omega_A R_A = V'_{Bt} + 2V'_{Bt} \Rightarrow 3V'_{Bt} = V'_{At} - \omega_A R_A \quad (7)$$

Llevamos la ecuación (7) a la ecuación (1),

$$V \sin \varphi = V'_{At} + V'_{bt} = V'_{At} + \frac{V'_{At} - \omega_A R_A}{3} \quad (8)$$

Combinamos la ecuación (8) con la (3)  $\omega_A R_A = 2V \sin \varphi - 2V'_{At}$

$$V \sin \varphi = V'_{At} + \frac{V'_{At} - \omega_A R_A}{3} = V'_{At} + \frac{V'_{At} - 2V \sin \varphi + 2V'_{At}}{3} \Rightarrow V'_{At} = \frac{5}{6} V \sin \varphi \quad (9)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (9)

$$V \sin \varphi = V'_{At} + V'_{bt} = \frac{5}{6} V \sin \varphi + V'_{bt} \Rightarrow V'_{bt} = \frac{1}{6} V \sin \varphi \quad (10)$$

A partir de las ecuaciones (4) y (10)

$$R_B \omega_B = V'_{Bt} = \frac{1}{6} V \sin \varphi \Rightarrow \omega_B = \frac{V \sin \varphi}{6R_B} \quad (11)$$

Combinando las ecuaciones (3) y (9)

$$R_A \omega_A = 2V \sin \varphi - 2V'_{At} = 2V \sin \varphi - 2 * \frac{5}{6} V \sin \varphi \Rightarrow \omega_A = \frac{V \sin \varphi}{3R_A} \quad (12)$$

Como nos piden las componentes de las velocidades de los discos sobre los ejes X e Y. A partir de la figura 2 se deduce, teniendo en cuenta que  $V'_{An} = 0$

$$V'_{AX} = V'_{At} \sin \varphi = \frac{5}{6} V \sin^2 \varphi$$

De la figura (1) se deduce  $b = (R_A + R_B) \operatorname{sen} \varphi$ , que sustituida en la anterior

$$V'_{AX} = \frac{5}{6} V \operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{5}{6} V \frac{b^2}{(R_A + R_B)^2}$$

$$V'_{AY} = V'_{At} \cos \varphi = \frac{5}{6} V \operatorname{sen} \varphi \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} = \frac{5}{6} V \frac{b}{(R_A + R_B)} \sqrt{1 - \frac{b^2}{(R_A + R_B)^2}} =$$

$$V'_{AY} = \frac{5}{6} V \frac{b \sqrt{(R_A + R_B)^2 - b^2}}{(R_A + R_B)^2}$$

$$\begin{aligned} V'_{BX} &= V'_{Bt} \operatorname{sen} \varphi + V'_{Bn} \cos \varphi = \frac{V \operatorname{sen}^2 \varphi}{6} + V \cos^2 \varphi = \frac{V b^2}{6(R_A + R_B)^2} + V \left( 1 - \frac{b^2}{(R_A + R_B)^2} \right) = \\ &= \frac{V b^2}{6(R_A + R_B)^2} + \frac{V [(R_A + R_B)^2 - b^2]}{(R_A + R_B)^2}, \quad V'_{Bx} = \frac{6V(R_A + R_B)^2 - 5Vb^2}{6(R_A + R_B)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V'_{BY} &= V'_{Bt} \cos \varphi - V'_{Bn} \operatorname{sen} \varphi = \frac{V \operatorname{sen} \varphi}{6} \cos \varphi - V \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = -\frac{5}{6} V \operatorname{sen} \varphi \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} = \\ &= -\frac{5}{6} V \frac{b}{(R_A + R_B)} \sqrt{1 - \frac{b^2}{(R_A + R_B)^2}}, \quad V'_{By} = -\frac{5Vb \sqrt{(R_A + R_B)^2 - b^2}}{6(R_A + R_B)^2} \end{aligned}$$

2)

La energía cinética de los discos es la suma de la de traslación más la de rotación

$$\begin{aligned} E_C(A) &= \frac{1}{2} m (V'_{At})^2 + \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{5}{6} V \operatorname{sen} \varphi \right)^2 + \frac{1}{2} m R_A^2 \left( \frac{V \operatorname{sen} \varphi}{3R_A} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m V^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \left( \frac{25}{36} + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{2} m V^2 \frac{b^2}{(R_A + R_B)^2} * \frac{29}{36} \Rightarrow E_C(A) = \frac{29}{72} m V^2 \frac{b^2}{(R_A + R_B)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_C(B) &= \frac{1}{2} m \left[ (V'_{Bt})^2 + (V'_{Bn})^2 \right] + \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 = \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{1}{6} V \operatorname{sen} \varphi \right)^2 + (V \cos \varphi)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} m R_A^2 \left( \frac{V \operatorname{sen} \varphi}{6R_A} \right)^2 = \frac{1}{2} m V^2 \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{36} + \cos^2 \varphi + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{36} \right) = \frac{1}{2} m V^2 \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{18} + 1 - \operatorname{sen}^2 \varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2} m V^2 \left( 1 - \frac{17 \operatorname{sen}^2 \varphi}{18} \right) \Rightarrow E_C(B) = \frac{1}{2} m V^2 \left[ 1 - \frac{17b^2}{(R_A + R_B)^2} \right] \end{aligned}$$