PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

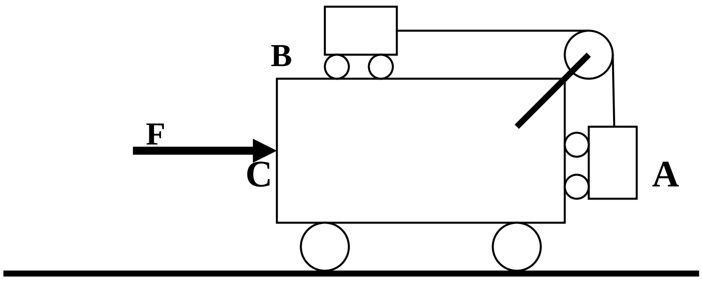
José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

3ª OLIMPIADA DE FÍSICA. CHECOESLOVAQUIA.1969

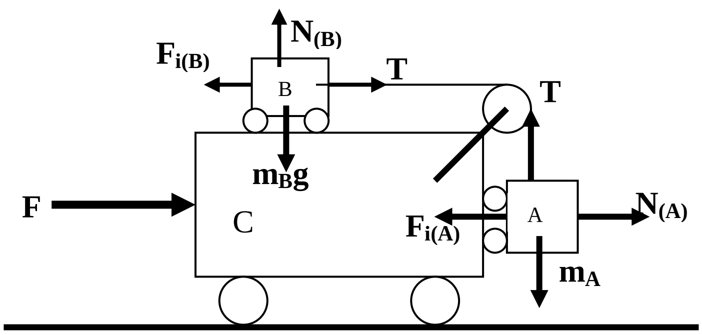
1.- El sistema mecánico de la figura inferior consta de tres coches de masas m_A = 0,3 kg, m_B = 0,2 kg y m_C = 1,5 kg , respectivamente



La cuerda que une los coches A y B es inextensible y sin masa. Se admite que los momentos de inercia de la polea y de las ruedas de los coches son despreciables así como los rozamientos.

a) Si la fuerza F que está actuando sobre el coche C en sentido horizontal es tal que los coches A y B permanecen en reposo respecto de C, calcular el módulo de F y la tensión de la cuerda
b) Si el coche C se encuentra en reposo, calcular la tensión de la cuerda y las aceleraciones de los coches A y B.
Se consideran despreciables las masas de la cuerda y de la polea. Se admite que no hay rozamiento.
3ª Olimpiada de Física. Brno. Checoeslovaquia 1969.

Consideremos un sistema de referencia ligado al coche C. Como está acelerado dicho sistema es no inercial. El diagrama de fuerzas sobre los coches B y A es el siguiente:



Fi significa fuerza de inercia debido a que el sistema de referencia elegido no es inercial**.** Para los coches B y A las ecuaciones del movimiento son:

$$T - F_{i(B)} = m_B a \quad ; \quad m_A g - T = m_A a$$

La aceleración a es la de los coches respecto al sistema de referencia ligado a C, la cual según el enunciado del problema es cero. Por otra parte $F_{iB} = m_B * a_S$, siendo a_S la aceleración del coche C respecto del suelo.

$$T - m_B a_S = 0 \quad ; \quad a_S = \frac{T}{m_B} = \frac{m_A g}{m_B} \quad (1)$$

Si consideramos un sistema inercial ligado al suelo, todos los carros vistos en conjunto son acelerados por la fuerza F, y de acuerdo con la segunda ley de Newton

$$F = (m_A + m_B + m_C) a_S = (m_A + m_B + m_C)\frac{m_A}{m_B} g = 2 * \frac{0,3}{0,2} 9,8 = 29,4 \quad N$$

$$T = m_A g = 0,3 * 9,8 = 2,94 \quad N$$

b) Si el coche C se encuentra en reposo, el diagrama de fuerzas de los coches A y B es el mismo que antes salvo que no hay fuerzas de inercia. Por tanto:

$$T = m_B a_S \quad ; \quad m_A g - T = m_A a_S \quad ; \quad a_S = \frac{m_A}{m_A + m_B} g = 5,9 \frac{m}{s^2}$$

$$T = 0,2 * 5,9 = 1,18 \text{ N}$$

2.-Un calorímetro de cobre de masa m_1 contiene una masa de agua m_2. La temperatura común es t_{12}. Dentro del calorímetro se introduce un bloque de hielo de masa m_3 a la temperatura t_3 por debajo de cero grados centígrados.
a) Calcular la temperatura final en todos los casos posibles.
b) Calcular la temperatura final y las masas finales de agua e hielo cuando m_1=1,00 kg, m_2 = 1,00 kg , m_3= 2,00 kg, t_{12} = 10ºC y t_3= -20ºC

Datos de los calores específicos expresados en kJ/kgºC
cobre = 0,42 ; agua = 4,18 ; hielo = 2,1 . Calor latente de fusión del hielo 334 kJ/kg 3ª Olimpiada de Física. Brno. Checoeslovaquia. 1969

Los casos posibles son tres : a) Que toda el agua se congele y quede un bloque de hielo b) Que todo el hielo se funda y quede una masa de agua líquida c) Que quede agua y hielo en equilibrio a la temperatura de cero grados
Se admite en todos los casos que no hay pérdidas de calor con el exterior.

a) El hielo añadido se calentará hasta una temperatura t_e. El cobre del calorímetro se enfriará hasta la misma temperatura. El agua líquida se enfriará a cero grados, luego pasará al estado sólido y finalmente se enfriará hasta la temperatura de equilibrio te.

Calor ganado por el hielo: m_3*2,1* (te-t_3)

Calor cedido por el cobre: m_1*0,42*(t_{12}-te)

Calor cedido por el agua al pasar de su temperatura a cero grados: m_2*4,18*t_{12}

Calor cedido por la congelación del agua: m_2*334

Calor cedido por el hielo procedente del agua al enfriarse hasta te, m_2*2,1* (0-te)

$$m_3 * 2{,}1 * \left(te - t_3\right) = m_1 * 0{,}42 * (t_{12} - te) + m_2 * 4{,}18 * t_{12} + m_2 * 334 - m_2 * 2{,}1 * te$$

b) El hielo que está a t_3 grados se calienta hasta cero grados, luego se funde y el agua resultante se calienta desde cero grados hasta la temperatura de equilibrio te. El cobre del calorímetro se enfría desde t_{12} hasta la temperatura de equilibrio y lo mismo le ocurre a la masa de agua m_2.

Calor ganado por el hielo en pasar de t_3 a cero grados, en fundirse y el agua resultante en calentarse hasta la temperatura de equilibrio

m_3*2,1*(0-t_3) + m_3*334 + m_3*4,18*(te-0)

Calor cedido por el cobre: m_1*0,42*(t_{12}-te)

Calor cedido por el agua: m_2*4,18*(te-t_{12})

m_3*2,1*(0-t_3) + m_3*334 + m_3*4,18*(te-0) = m_1*0,42*(t_{12}-te)+ m_2*4,18*(te-t_{12})

c) Aquí pueden presentarse dos situaciones 1) que se funda parte del hielo 1) que congele parte del agua En ambos casos la temperatura de equilibrio es 0ºC

1) Calor ganado por el hielo al pasar a cero grados m_3*2,1*(0-t_3) +M *334

M es una fracción de m_3 que corresponde al hielo que se funde

Calor cedido por el agua: m_2*4,18*t_{12};   Calor cedido por el cobre: m_1*0,42*t_{12}

m_3*2,1*(0-t_3) +M *334 = m_2*4,18*t_{12} + m_1*0,42*t_{12}

2) Calor ganado por el hielo al calentarse desde t_3 a cero grados m_3*2,1*(0-t_3)

Calor cedido por el cobre m_1*0,42* t_{12} .Calor cedido por el agua al enfriarse a cero grados , m_2 * 4,18*t_{12} .

Calor cedido por parte del agua al pasar de agua líquida a cero grados a hielo a cero grados , N*334

m_3*2,1*(0-t_3) = m_1*0,42* t_{12} +m_2 * 4,18*t_{12} + N*334

Si comparamos las dos últimas ecuaciones observamos que con una de ellas es suficiente. Por ejemplo, si usamos la primera y M sale positivo entonces ocurre que se funde algo de hielo y en el calorímetro habrá más agua líquida al final que al principio y menos hielo, si sale negativo es que se congela algo del agua líquida y al final habrá más hielo que al principio y menos agua líquida y si fuese cero es que queda la misma cantidad de hielo al principio que al final.
a)

$$m_3 * 2{,}1 * \left(te - t_3\right) = m_1 * 0{,}42 * (t_{12} - te) + m_2 * 4{,}18 * t_{12} + m_2 * 334 - m_2 * 2{,}1 * te =$$

2*2,1*(te+20) =1*0,42*(10-te)+1*4,18*10+2*334-1*2,1*te

4,2te+84 = 4,2-0,42te + 41,8 + 668 - 2,1te ;   te=93,7ºC , solución imposible

b)

m_3*2,1*(0-t_3) + m_3*334 + m_3*4,18*(te-0) = m_1*0,42*(t_{12}-te)+ m_2*4,18*(te-t_{12})

2*2,1*(0+20)+2*334+2*4,18*te=1*0,42*(10-te)+1*4,18*(te-10)

84+668-4,2-41,8 =-8,36te-0,42te+4,18te , te=-153ºC , solución imposible

c1)

m_3*2,1*(0-t_3) +M *334 = m_2*4,18*t_{12} + m_1*0,42*t_{12}

2*2,1*(0+20)+M*334 = 1*4,18*10+1*0,42*10

M*334=-84+41,8+4,2, M = -0,11 kg

Como M es negativo habrá más hielo que al principio masa total de hielo en el equilibrio = 2 +0,11=2,11 kg. Masa de agua 1,00-0,11 = 0,89 kg a la temperatura de cero grados.

Si hubiésemos utilizado la ecuación c_2)

m_3*2,1*(0-t_3) = m_1*0,42* t_{12} +m_2 * 4,18*t_{12} + N*334

2*2,1*(0+20)=1*0,42*10+1*4,18*10+N*334 ; N = 0,11 kg

Solución más rápida

Se puede hacer el balance térmico siguiente:
El agua líquida junto con el calorímetro se pueden enfriar hasta 0º C cediendo la cantidad de calor

Q_c = 1.0,42.10 + 1.4,18.10 = 4,2 + 41,8 kJ = 46 kJ.

Por otra parte, el hielo puede recibir hasta fundirse totalmente la cantidad de calor

Q_a = 2.2,1.20 = 84 kJ

Como se aprecia, con el calor que pueden ceder agua líquida y calorímetro hasta llegar a la temperatura de congelación, no será suficiente para que todo el hielo alcance la temperatura de 0º C, para lo cual aún necesitará recibir otros 84 – 46 = 38 kJ más.
Con esto queda claro que el equilibrio térmico no se alcanzará en a), (toda la mezcla líquida).
Para q el equilibrio se alcanzara en c) (toda la mezcla sólida), el hielo habría de recibir al menos 38 kJ del agua del calórímetro a causa de su congelación.
Pero la cantidad de calor que cedería el agua líquida al congelarse totalmente sería

Q_{cong} = 1. 334 = 334 kJ.

Cantidad que excede en 334 – 38 = 296 kJ a la que necesita el hielo para alcanzar la temperatura de fusión. Por consiguiente tampoco se alcanzará el equilibrio en c), (toda la mezcla sólida).
La mezcla en equilibrio tendrá como parte sólida, $m_3 + m_c$ kg, y parte líquida, $m_1 - m_c$, donde m_c es la masa de agua líquida que se congela, y cuyo calor de congelación

m_c. 334 = 38 kJ;

necesita recibir el hielo para que su temperatura alcance los 0ºC. De donde

$$m_c = \frac{38}{334} = 0{,}11\,\text{kg}$$

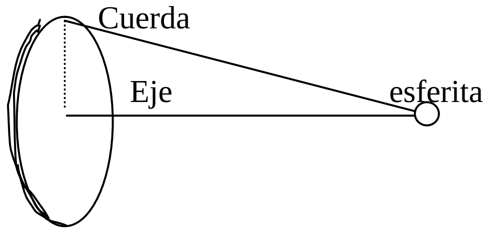
Al final quedarán $m_3 + m_c$ = 2 +0,11=**2,11 kg**,
masa total de hielo en equilibrio con

$m_1 - m_c$ = 1,00-0,11 = **0,89 kg**,

masa total de agua líquida, a la temperatura de cero grados.

3.- Un anillo metálico de radio R = 5 cm está situado en un plano vertical. Una esferita de masa m =1 g está atada a un hilo sujeto al punto más alto del anillo. Si el anillo y la esferita reciben cada uno una carga de Q=9.10^{-8}C, la esferita se mantiene en equilibrio en el eje perpendicular al anillo y que pasa por su centro, tal como indica la figura inferior. Calcular la longitud de la cuerda. Dato $k = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o} = 9.10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}$

3ª Olimpiada de Física. Brno.Checoeslovaquia 1969



Si la esferita está en equilibrio se debe a la acción simultánea de las tres fuerzas indicadas en la figura 1: T , tensión de la cuerda, F_E fuerza eléctrica de repulsión entre la carga del anillo y la carga de la esferita , P peso de la esferita

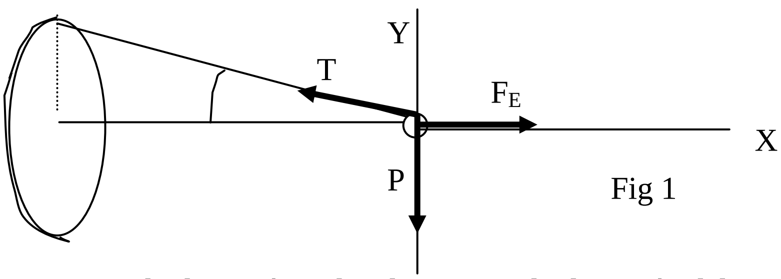


Fig 1

La fuerza eléctrica F_E tiene la dirección indicada, esto es, la dirección del eje debido a la simetría del aro. Supongamos un trozo pequeño de aro en la parte superior el cual tiene una fracción de la carga ΔQ, existe en la parte inferior otro elemento de aro simétrico que tiene también una carga ΔQ.

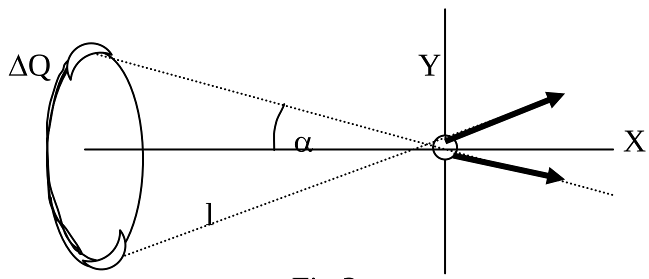


Fig.2

La fuerza que cada trozo ejerce sobre la esferita está representado en la figura 2. Si se suman las componentes de esas dos fuerzas sobre el eje Y se anulan y sobre el eje X se suman. Es posible dividir el aro en arcos sencillos, en posiciones opuestas, cuyos valores del campo son los representados en la figura 2. El valor de la fuerza que el aro ejerce sobre la esferita es:

$$F = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o} \frac{Q^2}{l^2} \cos\alpha = k \frac{Q^2}{l^2} \cos\alpha$$

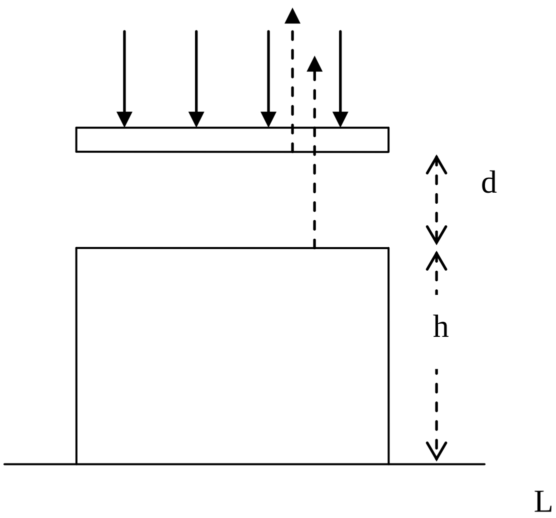
Sumando las componentes de las tres fuerzas (**T , $\mathbf{F_E}$ y P**) (fig 1) sobre los ejes cartesianos X e Y resulta:

$$T\operatorname{sen}\alpha = P = mg \quad ; \quad T\cos\alpha = F_E = k \frac{Q^2}{l^2} \cos\alpha$$

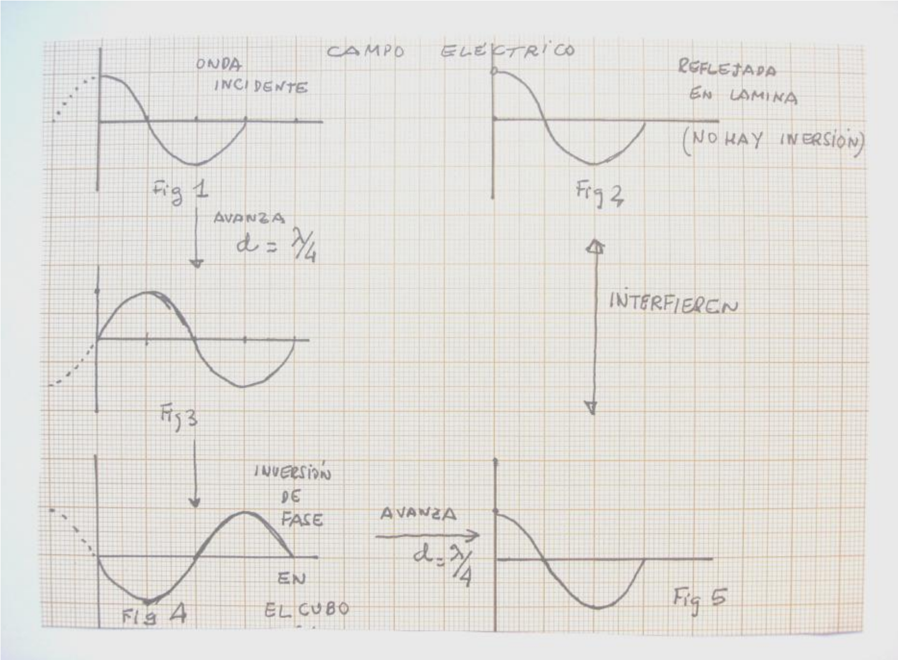
Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{mg}{k\frac{Q^2}{l^2}} = \frac{R}{l} \quad ; \quad l = \sqrt[3]{\frac{kQ^2R}{mg}} = \sqrt[3]{\frac{9.10^9 * \left(9.10^{-8}\right)^2 * 5.10^{-2}}{1.10^{-3} * 9{,}8}} = 0{,}072\ \text{m}$$

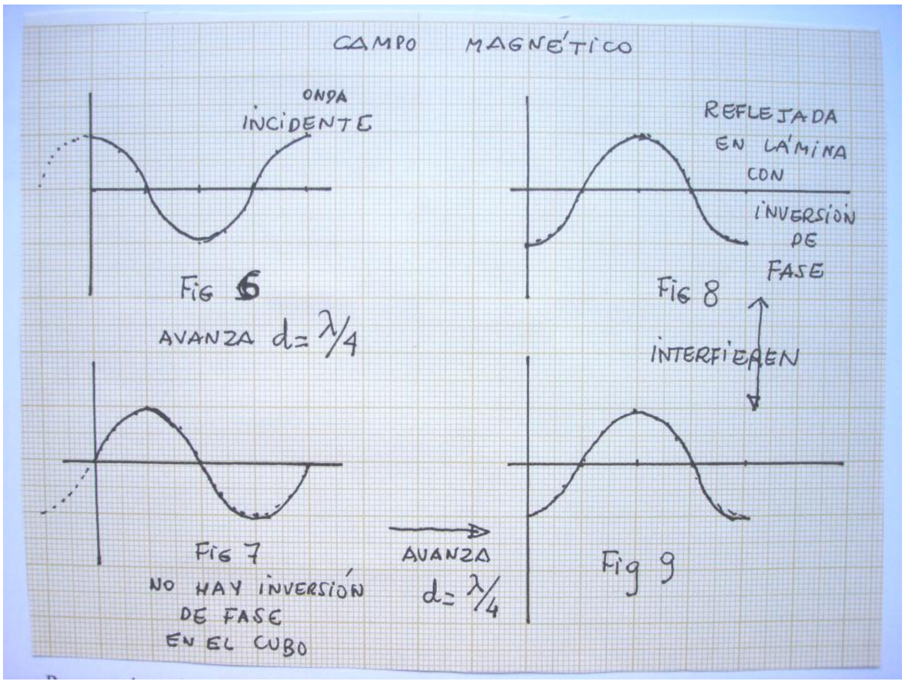
4.- Una placa de vidrio está situada paralela y por encima de un cubo de vidrio de 2 cm de arista, quedando entre ambos una pequeña lámina de aire de espesor uniforme d, tal como indica la figura inferior. Un haz de ondas electromagnéticas, cuyas longitudes de onda están comprendidas entre 400 nm y 1150 nm, inciden perpendicularmente a la lámina y son reflejadas por ambas superficies, la de la lámina y la del cubo produciendo interferencias. Solamente para dos longitudes del haz existe interferencia constructiva y una de ellas es para la longitud 400 μm. ¿Cuál es la segunda longitud de onda?
Calcular el incremento de temperatura del cubo para que éste tocase a la placa. El coeficiente lineal de expansión es α =8,0.10^{-6} ºC y el índice de refracción del aire n=1. La distancia entre el cubo y la placa no cambia durante el calentamiento
3ª Olimpiada de Física. Brno. Checoeslovaquia 1969



La reflexión en la cara interna de la placa se produce desde un medio de mayor índice, que era donde se propagaba la onda, a uno de menor, con lo cual la reflexión *se produce sin inversión del campo eléctrico pero sí del magnético.* En la reflexión en el cubo de vidrio, la onda viaja en un medio de menor índice a una superficie que limita con uno de mayor índice, por tanto, *el campo eléctrico se invierte y el magnético se conserva.* Aparte de esto la onda que llega al cubo ha recorrido una distancia 2d.
Supongamos que la distancia d es un cuarto de la longitud de onda d = $\lambda/4$. La figura 1 indica el campo eléctrico de la onda incidente y la fig 2 el reflejado en la lámina (sin inversión de fase) La figura 3 representa la onda de llegada al cubo, la fig 4 la reflejada (con inversión de fase) y la figura 5 la que interfiere con la de la lámina. Se observa que se produce una interferencia constructiva.



Si ahora analizamos el <u>campo magnético</u> .La figura 6 indica la onda incidente, después de viajar d = λ/4 llega al cubo y se refleja sin inversión de fase (fig 7), después avanza una distancia d = λ/4 (fig 9). En la lámina, la onda reflejada sufre inversión de fase (fig8). Al interferir lo hacen de manera que el campo magnético se refuerza, lo mismo que ocurría con el eléctrico.



Para que haya interferencia constructiva el espesor de la capa de aire tiene que ser un múltiplo impar de la cuarta parte de la longitud de onda. Esto expresado en forma matemática es:

$$d = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que hay interferencia constructiva para λ = 400 nm, los posibles valores de d, son : para n=0 λ=100 nm ; para n=1 λ=300 nm; para n=2 λ=500 nm, para n=3 λ=700 nm.......

Para la otra longitud de onda es válida la ecuación (1) si la aplicamos con d = 100 nm resulta:

$$\lambda = \frac{4d}{2n+1} \quad ;\Rightarrow \quad n=0 \Rightarrow \lambda = 400 \ \ nm \quad ; \quad n=1 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}100 \ \ nm = 133{,}3 \ \ nm$$

La segunda solución da un valor de la longitud de onda fuera del intervalo del enunciado del problema.

Para d = 300 nm resulta:

$$\lambda = \frac{4d}{2n+1} \quad ; \quad n=0 \Rightarrow \lambda = 1200 \ \ nm \quad ; n=1 \Rightarrow \lambda = 400 \ \ nm \quad ; n=2 \Rightarrow \lambda = 240 \ \ nm$$

Tampoco existen dos soluciones como dice el enunciado.

Para d = 500 nm:

$$\lambda = \frac{4d}{2n+1} \quad ; \quad n=0 \Rightarrow \lambda = 2000 \ \ nm \ ; \ n=1 \Rightarrow \lambda = 667 \ \ nm \ ; - n=2 \Rightarrow \lambda = 400 \ \ nm \quad ;$$

$$n=3 \Rightarrow \lambda = 286 \ \ nm$$

Ahora existen dos soluciones como indica el enunciado del problema. Esta es la solución correcta.

Si aplicamos la ecuación para d = 700 nm resultan tres soluciones posibles para λ.

$$\lambda = \frac{4d}{2n+1} \quad ; \quad n=0 \ \Rightarrow \lambda = 2800 \ \ nm \quad ; n=1 \Rightarrow \lambda = 933 \ \ nm \quad ; n=2 \Rightarrow \lambda = 560 \ \ nm \quad ;$$

$$n=3 \Rightarrow \lambda = 400 \ \ nm$$

Lo cual no coincide con el enunciado El resultado coherente con el enunciado es d = 500 μm y las longitudes de onda son 400 nm y 667 nm

b) Para que al expansionarse el cubo alcance a la placa debe aumentar su longitud en d

$$h(\Delta t) = h(t)(1+\alpha\Delta t) \quad \Rightarrow \quad h(\Delta t) - h(t) = d = h(t)\alpha\Delta t \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{d}{h(t)*\alpha} = \frac{500.10^{-9}}{2.10^{-2} * 8.10^{-6}} = 3{,}1 \ \ ^\circ C$$