PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXXIV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. TAIWAN . 2003

I.-UN OSCILADOR CON UN PESO QUE CAE

1) Un cilindro rígido de radio R se mantiene en posición horizontal por encima del suelo. Una cuerda de masa despreciable y longitud L, L>2πR, lleva en su extremo libre una masa m estando el otro extremo sujeto a la parte superior del cilindro como se muestra en la figura 1a.

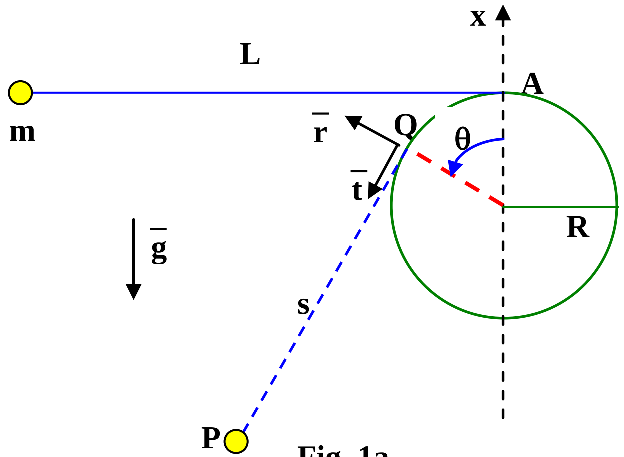


Fig. 1a

El péndulo así formado se eleva hasta alcanzar el nivel A y luego se deja en libertad a partir del reposo estando la cuerda tensa. Despreciar cualquier alargamiento de la cuerda. Se supone que la masa m es puntual y que el péndulo oscila en un plano perpendicular al eje del cilindro. Cuando posteriormente nos referimos a la masa puntual la denominamos <u>partícula</u>. La aceleración de la gravedad es $\vec{g}$ y el origen de coordenadas el punto O. Cuando la partícula se encuentre en el punto P (fig. 1a) la cuerda es tangente a la superficie del cilindro en el punto Q. La longitud QP se designa con s minúscula. Los vectores unitarios en dirección radial y tangencial en Q se representan por $\vec{r}$ y $\vec{t}$ respectivamente. El desplazamiento angular θ de radio OQ que se mide en sentido antihorario se considera como positivo.

Cuando θ=0 la longitud s es igual a L y la energía potencial gravitatoria U de la partícula es cero. A medida que la partícula se desplaza los cambios temporales de θ y s están representados por $\dot{\theta}$ y $\dot{s}$ respectivamente.
Si no se especifica otra cosa las velocidades están referidas al punto O.

PARTE A

En la parte A la cuerda está tirante a medida que la partícula se desplaza.

Encontrar en función de las magnitudes (s, q, $\dot{s}$, $\dot{\theta}$, R, L , g , $\vec{r}$ y $\vec{t}$)

a) La relación entre $\dot{\theta}$ y $\dot{s}$

b) La velocidad $\vec{v}_Q$ del punto móvil Q respecto de O

c) La velocidad $\vec{v}'$ de la partícula respecto del punto móvil Q cuando se encuentra en P.

d) La velocidad $\vec{v}$ de la partícula relativa a O cuando se encuentre en P.

e) La componente $\vec{t}$ de la aceleración de la partícula respecto de O cuando se encuentra en P
f) La energía potencial gravitatoria de la partícula cuando se encuentre en P

g) La velocidad $\vec{v}_m$ de la partícula en el punto más bajo de su trayectoria

PARTE B
En este apartado la relación entre L y R está dada por

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3}\cot\frac{\pi}{16} = 3{,}534 + 3{,}352 = 6{,}886$$

h)¿Cuál es la velocidad $\vec{v}_s$ de la partícula cuando el segmento de cuerda comprendido entre Q y P está recto y tiene la mínima longitud?

i)¿Cuál es la velocidad $\vec{v}_H$ de la partícula en el punto más alto H cuando la partícula ha oscilado al otro lado del cilindro

PARTE C
Ahora el péndulo en lugar de estar fijo por el extremo A, la cuerda tiene colgada una masa M>m que se considera puntual y la cuerda puede resbalar sobre el cilindro sin rozamiento.
Inicialmente la partícula ocupa una posición tal que la cuerda es paralela al suelo y con longitud L. La masa M se encuentra por debajo del punto O(ver fig. 1b)

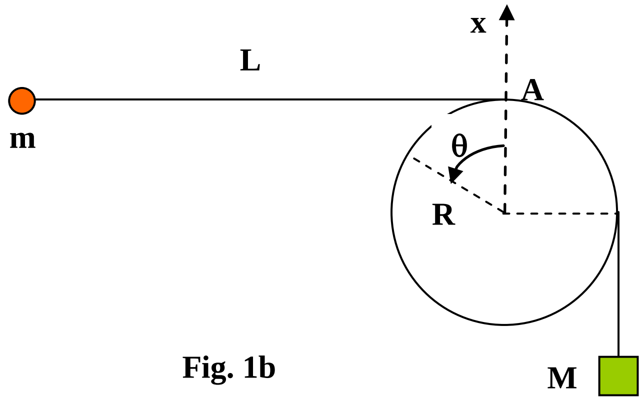


Fig. 1b

Si el sistema se deja en libertad a partir del reposo la masa M cae y la partícula oscila. Se supone que la partícula no tiene impedimento alguno para oscilar al mismo tiempo que la masa M cae.
El rozamiento cinético entre la cuerda y el cilindro es despreciable pero cuando la masa M se detenga el rozamiento estático es tal que la masa M ya no se mueve más ,esto es, permanece en reposo.
j) Se supone que la masa M después de caer una distancia D (L-D>>R), la partícula sigue oscilando alrededor del cilindro hasta un ángulo $\theta = 2\pi$ al mismo tiempo que los segmentos de la cuerda separados del cilindro permanecen rectos, para que esto ocurra el cociente $\alpha = \dfrac{D}{L}$ debe ser menor que un valor crítico α_c. Despreciando términos del orden de R/L o mayores estimar el valor de α_c.

PARTE A

a).- La relación entre $\dot{\theta}$ y $\dot{s}$

La longitud de la cuerda es constante esté sin enrollar sobre el cilindro (cuando la cuerda está horizontal) o esté una parte enrollada (cuando la partícula está en P)
Dado que el arco es igual al ángulo por el radio, tenemos

$$s + \theta R = L \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} + R\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{s} + R\dot{\theta} = 0 \qquad (1)$$

b).- La velocidad $\vec{v}_Q$ del punto móvil Q respecto de O

El punto móvil se desplaza a lo largo de un arco de circunferencia de radio R

$$v_Q = \frac{d(\text{arco})}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_Q = R\dot{\theta}\,\vec{t} = -\dot{s}\,\vec{t}$$

c).- La velocidad $\vec{v}\,'$ de la partícula respecto del punto móvil Q cuando se encuentra en P.

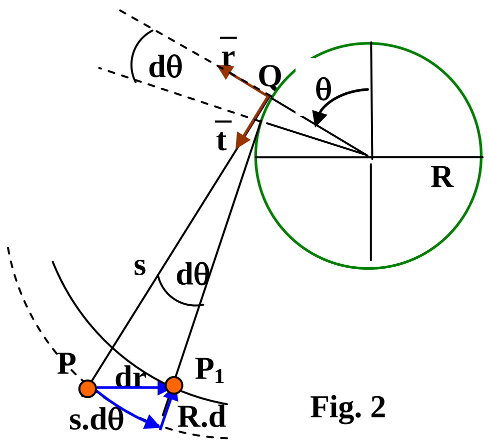


Fig. 2

De la figura 2, se deduce:

$$\vec{dr} = s\ \vec{d\theta} + R\ \vec{d\theta} = s\ d\theta\left(-\vec{r}\right) - R\ d\theta\ \vec{t}$$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}}{dt} = s\ \dot{\theta}\left(-\vec{r}\right) - R\ \dot{\theta}\ \vec{r} = -s\ \dot{\theta}\ \vec{r} + \dot{s}\ \vec{t}$$

d).- La velocidad $\vec{v}$ de la partícula relativa a O cuando se encuentre en P.

La velocidad de P respecto de O es la suma de las velocidades de P respecto de Q más la de Q respecto de O.

$$\vec{v} = \vec{v}' + v_Q = -s\ \dot{\theta}\ \vec{r} + \dot{s}\ \vec{t} - \dot{s}\ \vec{t} = -s\ \dot{\theta}\ \vec{r}$$

e).- La componente $\vec{t}$ de la aceleración de la partícula respecto de O cuando se encuentra en P

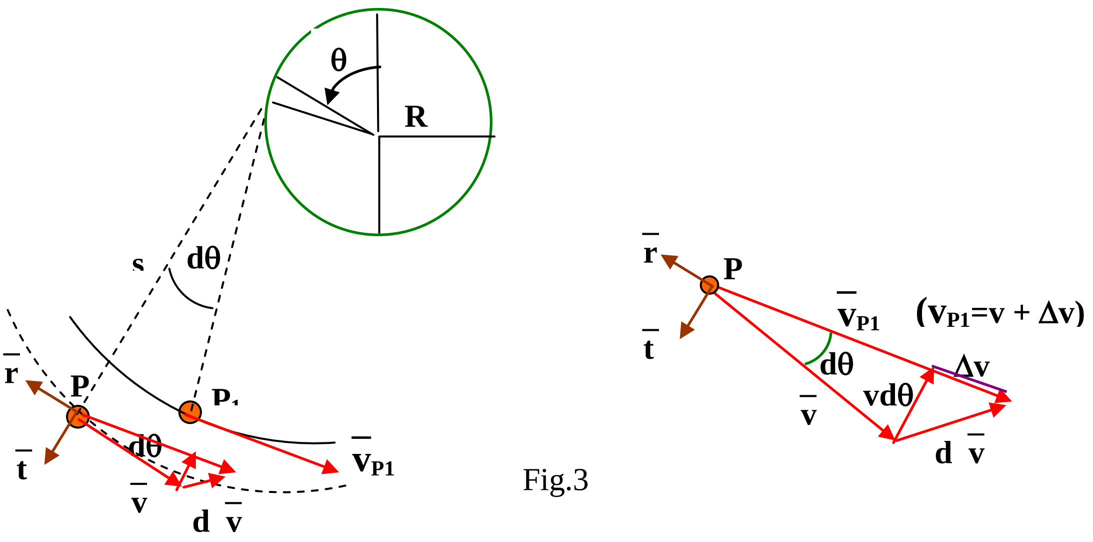


Fig.3

Observando la figura 3 se deduce que $v\ d\theta\left(-\vec{t}\right)$ es aproximadamente la componente de $d\vec{v}$ sobre la dirección del unitario $\vec{t}$.

$$a_t = \frac{d\left(v\ d\theta\right)}{dt} = v\frac{d\theta}{dt} = v\ \dot{\theta}$$

Sustituyendo el valor de $\left|\vec{v}\right| = s\ \dot{\theta}$

$$a_t = v\ \dot{\theta} = s\left(\dot{\theta}\right)^2$$

en forma vectorial

$$\vec{a}_t = s\ \dot{\theta}^2\left(-\vec{t}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_t \cdot \vec{t} = s\ \dot{\theta}^2\left(-\vec{t}\cdot\vec{t}\right) = -s\ \dot{\theta}^2$$

f).- La energía potencial gravitatoria de la partícula cuando se encuentre en P

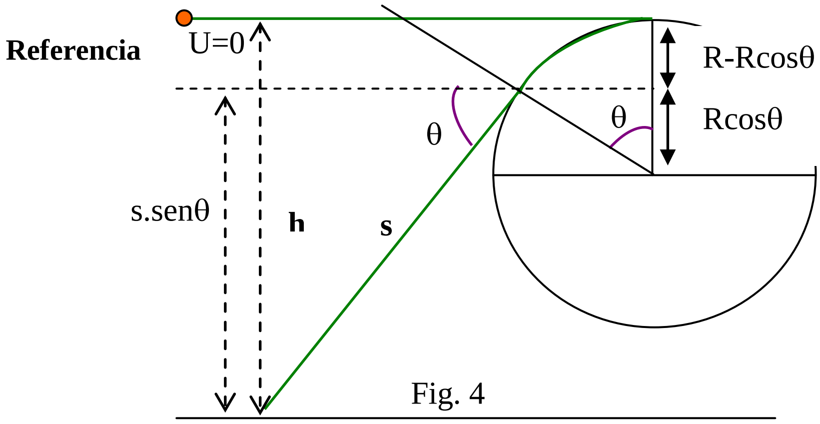


Fig. 4

De la figura 4 se deduce: $h = s\ \text{sen}\theta + R(1-\cos\theta)$

La energía potencial

$$U = -mgh = -mg\left[s\ \text{sen}\theta + R(1-\cos\theta)\right],\quad \text{como}\ s = L-\theta R\quad \text{resulta}:$$

$$U = -mg\left[(L-\theta R)\ \text{sen}\theta + R(1-\cos\theta)\right]$$

g).- La velocidad $\vec{v}_m$ de la partícula en el punto más bajo de su trayectoria

En el punto más bajo de la trayectoria $\theta = \frac{\pi}{2}$. La energía potencial en ese punto vale:

$$U = -mg\left[(L-R)\ \text{sen}\frac{\pi}{2} + R\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)\right] = -mg\left(L-\frac{\pi}{2}R+R\right) = -mg\left[L+R\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía mecánica y que inicialmente la energía potencial y la cinética son nulas

$$\frac{1}{2}mv_m^2 - mg\left[L+R\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0 \quad\Rightarrow\quad v_m = \sqrt{2g\left[L+R\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\right]} = \sqrt{2g(L-0{,}57R)}$$

PARTE B

h).- ¿Cuál es la velocidad $\vec{v}_s$ de la partícula cuando el segmento de cuerda comprendido entre Q y P está recto y tiene la mínima longitud?

Vamos a calcular la tensión de la cuerda a medida que ésta se enrosca sobre el cilindro. Cuando la tensión de la cuerda se anule, está dejará de estar recta y la partícula se moverá libremente

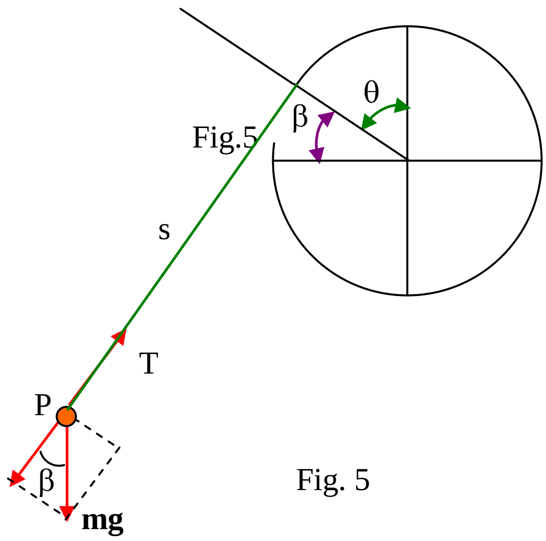


Fig. 5

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son la tensión de la cuerda y el peso. De la figura 5 se deduce:

$$T - mg\cos\beta = T - mg\ \operatorname{sen}\theta = \text{fuerza centrípeta} = m\frac{v^2}{s}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\left[(L-\theta R)\ \operatorname{sen}\theta + R(-\cos\theta)\right] \Rightarrow mv^2 = 2mg\left[(L-\theta R)\ \operatorname{sen}\theta + R(-\cos\theta)\right]$$

Llevando esta fórmula a la de la tensión de la cuerda

$$T = mg\ \operatorname{sen}\theta + \frac{2mg\left[(L-\theta R)\ \operatorname{sen}\theta + R(1-\cos\theta)\right]}{(L-\theta R)} =$$

$$= \frac{mg\left[(L-\theta R)\operatorname{sen}\theta + 2(L-\theta R)\operatorname{sen}\theta + 2R(1-\cos\theta)\right]}{s}$$

Si la tensión dela cuerda es nula

$$3(L-\theta R)\operatorname{sen}\theta + 2R(1-\cos\theta) = 0$$

Hacemos uso de las relaciones trigonométricas

$$1-\cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$3(L-\theta R)*2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = -2R*2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad 3(L-\theta R) = -2R\ \operatorname{tag}\frac{\theta}{2}$$

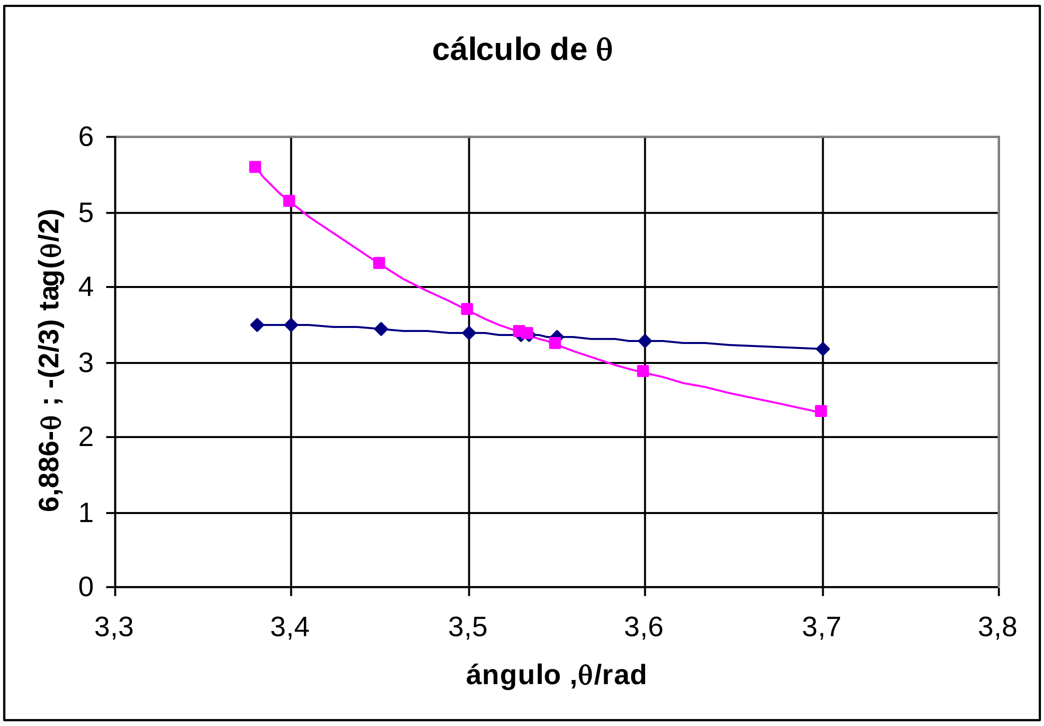
de acuerdo con el enunciado del problema $\frac{L}{R} = 6{,}886$, por tanto

$$3*6{,}886R - 3\ \theta\ R = -2R\ \operatorname{tag}\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad 6{,}886 - \theta = -\frac{2}{3}\operatorname{tag}\frac{\theta}{2}$$

Para resolver la ecuación trigonométrica utilizamos un método de aproximaciones. Damos valores a θ hasta encontrar que el primer miembro de la ecuación es igual al segundo.

ángulo,θ /rad	6,886-θ	(2/3)tag(θ/2)
3,37	3,51585	5,81212317
3,38	3,50585	5,56615399
3,4	3,48585	5,13106809
3,45	3,43585	4,28896462
3,5	3,38585	3,68025328
3,53	3,35585	3,38955685
3,534	3,35185	3,35411657
3,55	3,33585	3,21920912
3,6	3,28585	2,85750778
3,7	3,18585	2,32537306

La gráfica del cálculo de θ es la siguiente



Volviendo a la ecuación de la velocidad

$$v^2 = 2g\left[(L-\theta R)\ \mathrm{sen}\theta + R(-\cos\theta)\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2*9{,}8\left[(6{,}886R-3{,}534R)\ \mathrm{sen}3{,}534 + R(1-\cos 3{,}534)\right]} = 1{,}133\sqrt{gR}$$

i).- ¿Cuál es la velocidad $\vec{v}_H$ de la partícula en el punto más alto H cuando la partícula ha oscilado al otro lado del cilindro

A partir del momento en que la tensión de la cuerda es nula, la partícula se mueve libremente con la velocidad anterior y describe una parábola (ver la fig. 6)

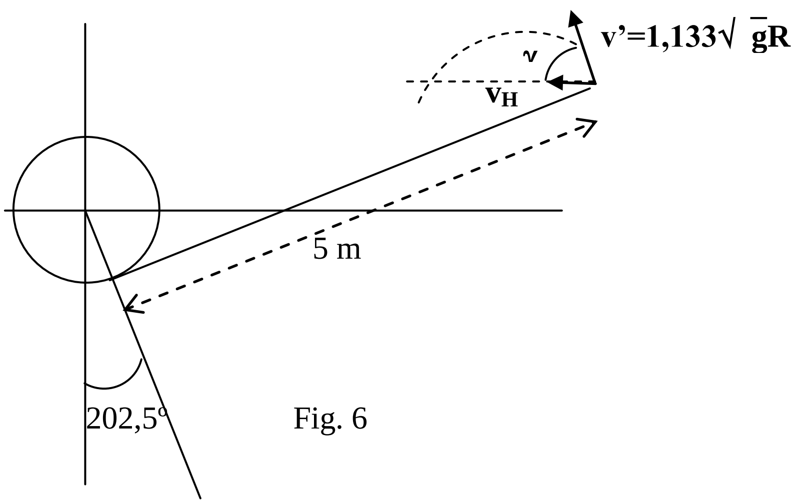


Fig. 6

La velocidad v_H es la componente horizontal de v

$$v_H = v\cos\gamma = v\ \operatorname{sen}202{,}5 = 1{,}133\sqrt{gR}\ \operatorname{sen}\ 202{,}5 = -0{,}434\sqrt{gR}$$

j).- Despreciando términos del orden de R/L o mayores estimar el valor de α_c .

Al descender la masa M la partícula m oscila enroscándose sobre el cilindro. Cuando se para M ha perdido una energía potencial MgD que se emplea en cinética de la partícula m y potencial. Si la partícula llega a la posición $\theta = 2\pi$, previamente ha tenido que pasar por una posición para la que la energía potencial de la partícula m es la máxima posible. Vamos a calcular para qué ángulo θ la energía potencial de la partícula m es la máxima posible.

La energía potencial está dada por la ecuación $U = -mg\left(R[1-\cos\theta] + s\ \operatorname{sen}\theta\right)$. Para hallar el máximo valor de U, derivamos la anterior expresión con respecto a θ e igualamos a cero

$$\frac{dU}{d\theta} = -mg\left(R\ \operatorname{sen}\theta + s\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{ds}{d\theta}\right) = 0$$

Para hallar la derivada ds/dq , hacemos uso del hecho de que la longitud total de la cuerda es constante

Para la posición inicial la longitud total es L+h +R$\frac{\pi}{2}$, los dos primeros términos corresponden a la longitud de cuerda que no está en contacto con el cilindro y el último representa la longitud de la cuerda que está en contacto con el cilindro

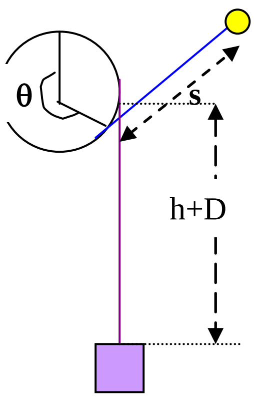


Fig. 7

Para un ángulo θ, h+D +s es la parte de cuerda que no está en contacto con el cilindro (fig. 7). La cuerda que está en contacto con el cilindro es $R\theta + R\frac{\pi}{2}$

$$L+h+R\frac{\pi}{2}=h+D+s+R\theta+R\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad s=L-D-R\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{ds}{d\theta}=-R$$

$$-mg\left(R\ \text{sen}\theta+s\cos\theta+\text{sen}\theta\frac{ds}{d\theta}\right)=0\Rightarrow \quad R\text{sen}\theta+s\cos\theta-R\text{sen}\theta=0\Rightarrow \quad \cos\theta=0$$

El ángulo θ para el que la energía potencial es la máxima posible corresponde a 270 º. El valor mínimo de la tensión de la cuerda en esa posición para que pueda sobrepasarla y llegar a ponerse la cuerda horizontal es cuando la tensión es nula y la fuerza centrípeta la proporciona el peso de la partícula

$$mg=\frac{mv^2}{s}$$

Según el principio de conservación de la energía

$$MgD=\frac{1}{2}mv^2-mg\left[R(1-\cos\theta)+s\ \text{sen}\theta\right] \quad\Rightarrow\quad mv^2=2Mgd+2\ mg(R-s)$$

Sustituyendo en la expresión anterior

$$mg=\frac{2MgD+2\ mg(R-s)}{s}\Rightarrow 2MgD+mg(R-3s)=0$$

Teniendo en cuenta el valor de $s=L-D-R\theta$

$$\frac{2MD}{m}=-R+3(L-D-R\theta)\Rightarrow\frac{2MD}{mL}=-\frac{R}{L}+3-3\frac{D}{L}-\frac{R\theta}{L}$$

Según el enunciado se desprecian los términos R/L y además se incluye el valor de α

$$\frac{2M\alpha}{m}=3\ (1-\alpha) \quad\Rightarrow\quad \frac{2M\alpha}{3m}=1-\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha\left(1+\frac{2M}{3m}\right)=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{1}{1+\frac{2M}{3m}}$$

II.-UN RESONADOR PEIZOELÉCTRICO BAJO LA ACCIÓN DE UN VOLTAJE ALTERNO

1) Una barra uniforme posee una longitud l y una sección A cuando no está sometida a tensiones (fig.2a).
Su longitud cambia en Δl cuando sobre ella actúan fuerzas de valor F aplicadas en dirección normal sobre las caras extremas. La tensión normal T (esfuerzo) está definida por F/A y el cambio relativo de su longitud por $\Delta l/l$, designando a esta magnitud adimensional por S y denominándola deformación unitaria.

En función de estos términos la ley de Hooke se expresa como

$$T = YS \qquad \rightarrow \qquad \frac{F}{A} = Y\,\frac{\Delta\ell}{\ell}$$

siendo Y el módulo de Young.

Cuando se verifica una compresión, T corresponde a F < 0 y da lugar a una disminución en la longitud (Δl < 0). Tal esfuerzo es negativo y su valor está relacionado con la presión p por p=-T.

Para una barra uniforme de densidad p, la velocidad de propagación de ondas longitudinales a lo largo de la barra es $u = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$

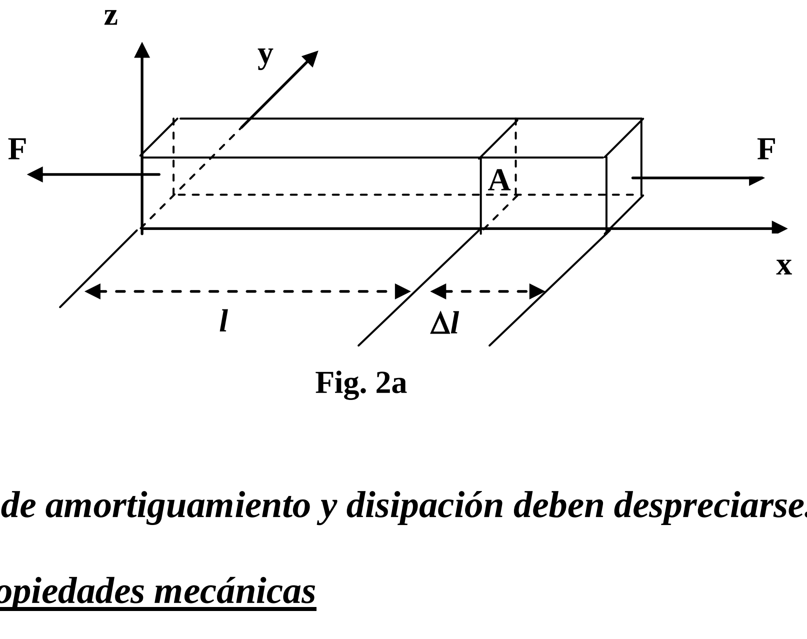


Fig. 2a

Los efectos de amortiguamiento y disipación deben despreciarse.

Parte A. Propiedades mecánicas

Una barra uniforme de longitud semi-infinita, extendiéndose desde x=0 a x=∞ (ver figura 2b) tiene una densidad ρ. Inicialmente no está sometida a tensión. Un pistón actúa de forma constante ejerciendo una presión p en

la cara izquierda a x=0 durante un corto tiempo Δt, originando una onda de presión que se propaga por la barra hacia la derecha con una velocidad u.

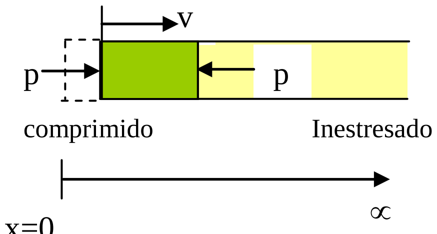


Fig. 2b

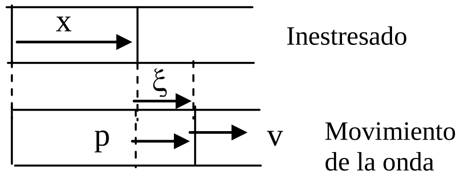


Fig. 2c

a) Si el pistón origina que la cara izquierda de la barra se mueva con una velocidad constante v (fig. 2b), cuáles son la deformación unitaria (S)y la presión p en la cara izquierda durante el tiempo Δt. La respuesta debe darse en función de ρ, u y v

b) Considerar una onda longitudinal desplazándose por la barra a lo largo de la dirección x. Para una sección normal a x cuando la barra está sin tensión (fig 2c) sea $\xi(x,t)$

$$\xi(x,t) = \xi_o \text{ sen } k(x - ut)$$

siendo ξ_o y k constantes .Calcular la velocidad v(x,t),deformación unitaria S (x,t) y p(x,t)

<u>Parte B. Propiedades electromecánicas incluyendo el efecto fotoeléctrico</u>

Considerar un bloque de cristal de cuarzo de longitud b, ancho w y altura h (figura 2d)

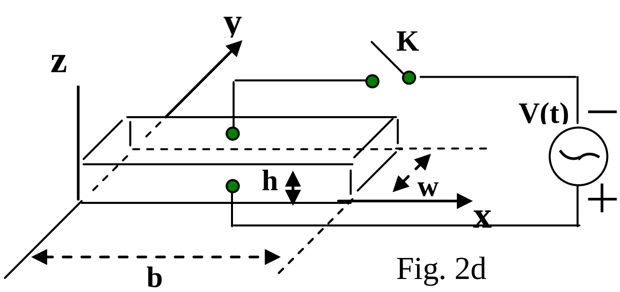


Fig. 2d

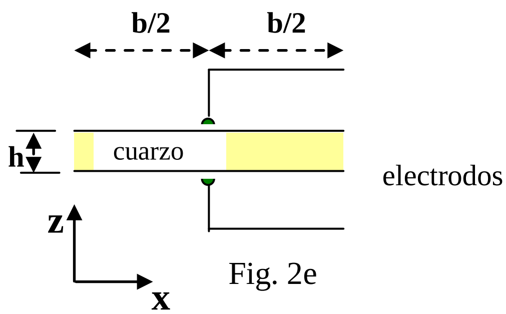


Fig. 2e

Los electrodos estas formados por capas metálicas delgadas que cubren las superficies superior e inferior del bloque. En el centro de los electrodos se han soldado cables conductores que sirven también de

soportes los cuales no son afectados por las posibles oscilaciones a lo largo del eje x.

El cristal de cuarzo tiene una densidad $\rho = 2{,}65.10^{3}\ \dfrac{kg}{m^{3}}$ *y un módulo de Young* $Y = 7{,}87.10^{10}\ \dfrac{N}{m^{2}}$*. La longitud b del bloque es 1,00 cm y el ancho y la altura son tales que h<< w y w<<b. Con el interruptor K abierto se supone que en el bloque de cuarzo en la dirección x, se producen ondas longitudinales estacionarias siendo la frecuencia* $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ *y el desplazamiento*

$$\xi(x,t) = 2\xi_o\ g(x)\ \cos\ \omega t$$

siendo ξ_o *una cantidad positiva constante y la función g(x)*

$$g(x) = B_1\ \text{sen}k\left(x - \frac{b}{2}\right) + B_2\ \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right)$$

g(x) tiene como valor máximo la unidad y $k = \dfrac{\omega}{u}$*. Teniendo presente que los centros de los electrodos son nodos y las caras izquierda y derecha del bloque están libres y deben tener esfuerzo cero (o presión)*

c) Determinar los valores de B_1 *y* B_2 *para una onda longitudinal estacionaria en el bloque de cuarzo*

d) ¿Cuáles son las dos frecuencias más bajas de la onda estacionaria con que se puede excitar el bloque de cuarzo?

El efecto piezoeléctrico es una propiedad especial del cristal de cuarzo. La compresión o dilatación del cristal genera un voltaje eléctrico y también ocurre el efecto contrario, esto es, la aplicación de un voltaje externo puede comprimir o expandir al cristal dependiendo de la polaridad del voltaje aplicado. En consecuencia se pueden acoplar las oscilaciones mecánica y eléctrica.

Respecto al efecto piezoeléctrico se designa con $\tilde{\sigma}$ *y* $\underset{.}{\sigma}$ *las densidades de carga de los electrodos superior e inferior cuando sobre el bloque de cuarzo actúa un campo eléctrico E en la dirección del eje z. S y T representan la deformación unitaria y el esfuerzo respectivamente.*

El efecto piezoeléctrico en el cristal de cuarzo queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$S = \frac{T}{Y} + d_p E \qquad ; \qquad \sigma = d_p T + \varepsilon_T E$$

donde $\varepsilon_T = 4{,}06.10^{-11}$ *F/m es la permitividad a esfuerzo constante y* $d_p = 2{,}25.10^{-12}$ *m/V es el coeficiente piezoeléctrico*

Si el interruptor K de la fig. 2d se cierra, el voltaje alterno

$$V(t)=V_m \cos \omega t$$

actúa a través de los electrodos y en el bloque de cuarzo aparece un campo eléctrico uniforme E(t) = V(t)/h en la dirección del eje z. Cuando se alcanza un estado estacionario, una onda estacionaria longitudinal de frecuencia ω aparece en el bloque en la dirección x.

Con E constante la longitud de onda λ y la frecuencia de la onda estacionaria en el bloque se relacionan por medio de la ecuación $\lambda = u/f$ en la que u esta dada por la ecuación $u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, pero ya no se cumple la relación T = YS tal como puede observarse en la primera de las ecuaciones del efecto piezoeléctrico, aun cuando siguen siendo válidas las definiciones de deformación unitaria y esfuerzo y además las caras extremas del bloque permanecen libres con esfuerzo cero.

e) A partir de las dos ecuaciones del efecto piezoeléctrico, se deduce que la densidad de carga σ en el electrodo inferior es de la forma

$$\sigma(x,t)=\left[D_1 \cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)+D_2\right]\frac{V(t)}{h}$$

en la que $k=\omega/u$. Encontrar las expresiones para D_1 y D_2.

f) La carga total superficial Q(t) en el electrodo inferior está relacionada con V(t)

$$Q(t)=\left[1+\alpha^2\left(\frac{2}{kb}\operatorname{tag}\frac{kb}{2}-1\right)\right]C_o V(t)$$

Encontrar la expresión de C_o y la expresión y el valor numérico de α^2.

a).- ¿Cuáles son: la deformación unitaria (S)y la presión p en la cara izquierda durante el tiempo Δt

En el tiempo Δt la onda de presión ha viajado una distancia u Δt y por tanto ha afectado a una longitud ℓ de la barra. El desplazamiento de la cara izquierda de la barra en el mismo intervalo de tiempo Δt vale $\Delta\ell = v\,\Delta t$

$$S=\frac{\Delta\ell}{\ell}=\frac{-v\Delta t}{u\ \Delta t}=-\frac{v}{u}$$

El signo menos se debe a que es una compresión.

$$u^2=\frac{Y}{\rho}\ ;\ \ p=-YS\quad ;\quad u^2=-\frac{p}{S\rho}\quad\Rightarrow\quad p=-u^2S\rho=u^2\frac{v}{u}\rho=uv\rho$$

b).- Calcular la velocidad v(x,t),deformación unitaria S (x,t) y p(x,t)

$$\xi(x,t)=\xi_o \operatorname{sen} k(x-ut)\quad\rightarrow\quad v=\frac{d\xi}{dt}=-\xi_o ku\cos k\ (x-ut)$$

$$S(x,t)=\frac{-v}{u}=\frac{\xi_o ku\cos(x-ut)}{u}=\xi_o k\cos k\ (x-ut)=\frac{d\xi}{dx}$$
$$p(x,t)=uv\rho=-\xi_o ku^2\rho\cos k(x-ut)=-\xi_o kY\cos k(x-ut)$$

c).-Determinar los valores de B_1 y B_2 para una onda longitudinal estacionaria en el bloque de cuarzo

La ecuación de una onda estacionaria es de la forma

$$\xi(x,t)=2\xi_o\ \text{sen}\ kx\ \ \cos\omega t.$$

Si la comparamos con la del enunciado resulta:

$$g(x)=B_1\text{sen}k\left(x-\frac{b}{2}\right)+B_2\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)=\text{sen}\ kx$$

se deduce que B_2=0 ya que la función coseno no figura en el miembro de la derecha. Teniendo presente que el valor máximo de un seno es la unidad y que según el enunciado g(x) como máximo vale uno, se deduce que B_1 = 1.

d).-¿Cuáles son las dos frecuencias más bajas de la onda estacionaria con que se puede excitar el bloque de cuarzo?

$$\xi(x,t)=2\xi_o\ \text{sen}\ \frac{\omega}{u}\left(x-\frac{b}{2}\right)\ \cos\omega t$$

Si los extremos son vientres cuando x =b

$$\text{sen}\frac{\omega}{u}\left(\frac{b}{2}\right)=\pm 1\quad\Rightarrow\quad\frac{\omega b}{2u}=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ldots\ldots\ldots..$$

Si

$$\frac{\omega b}{2u}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{\pi u}{b}=\frac{\pi\sqrt{\frac{Y}{\rho}}}{b}=\frac{\pi\sqrt{\frac{7{,}87.10^{10}}{2{,}65.10^{3}}}}{1{,}0.10^{-2}}=2\pi f\Rightarrow f=\frac{2*\sqrt{\frac{7{,}87.10^{10}}{2{,}65.10^{3}}}}{1{,}0.10^{-2}}=273.10^{3}\,\text{Hz}$$

$$\frac{\omega b}{2u}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{3\pi u}{b}=\frac{3\pi\sqrt{\frac{Y}{\rho}}}{b}=\frac{3\pi\sqrt{\frac{7{,}87.10^{10}}{2{,}65.10^{3}}}}{1{,}0.10^{-2}}=2\pi f\Rightarrow f=\frac{3*\sqrt{\frac{7{,}87.10^{10}}{2{,}65.10^{3}}}}{2*1{,}0.10^{-2}}=817.10^{3}\,\text{Hz}$$

e).- Encontrar las expresiones para D_1 y D_2.

El efecto piezoeléctrico en el cristal de cuarzo queda descrito por las siguientes ecuaciones

$$S=\frac{T}{Y}+d_pE\quad;\quad\sigma=d_pT+\varepsilon_TE\ ;\quad E=\frac{V(t)}{h}$$

De la primera sacamos T=SY-d_pYE y la deformación S(x,t) la obtenemos derivando respecto de x ,la ecuación de la onda estacionaria $\xi(x,t)=2\xi_o\ \text{sen}\ k\left(x-\frac{b}{2}\right)\ \cos\omega\ t$

$$\xi(x,t)=2\xi_o \ \text{sen} \ k\left(x-\frac{b}{2}\right) \ \cos\omega \ t \quad \Rightarrow \quad S(x,t)=\frac{d\xi}{dx}=2k\xi_o \ \cos \ k\left(x-\frac{b}{2}\right) \ \cos\omega \ t$$

$$T=SY-d_pYE=Y\left[2k\xi_o\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)\cos\omega t-d_p\frac{V(t)}{h}\right]$$

Si x = b entonces T=0

$$T=0=Y\left[2k\xi_o\cos k\left(\frac{b}{2}\right)\cos\omega t-d_p\frac{V(t)}{h}\right] \quad \Rightarrow \quad 2k\xi_o\cos k\left(\frac{b}{2}\right)\cos\omega t=d_p\frac{V(t)}{h} \ (1)$$

Llevamos la expresión obtenida para T a la segunda ecuación $\sigma=d_pT+\varepsilon_T\frac{V(t)}{h}$, y tenemos para la densidad de carga σ.

$$\sigma=d_pT+\varepsilon_T\frac{V(t)}{h}=dpY\left[2k\xi_o\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)\cos\omega t-d_p\frac{V(t)}{h}\right]+\varepsilon_T\frac{V(t)}{h} \ (2)$$

De la ecuación (1) se deduce que $2k\xi_o\cos\omega t=\dfrac{d_p\frac{V(t)}{h}}{\cos\frac{kb}{2}}$, sustituyendo en (2)

$$\sigma=d_pY\left[\frac{d_p\frac{V(t)}{h}}{\cos\frac{kb}{2}}\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)-\frac{d_pV(t)}{h}\right]+\varepsilon_T\frac{V(t)}{h}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sigma=\frac{V(t)}{h}\left[d_p^2Y\frac{\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)}{\cos\frac{kb}{2}}-d_p^2Y+\varepsilon_T\right] \qquad (3)$$

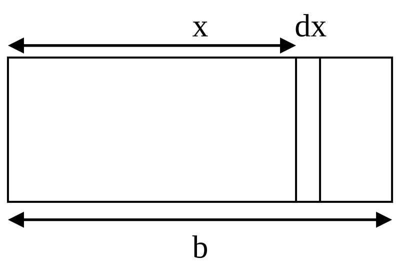
De acuerdo con el enunciado

$$\sigma(x,t)=\left[D_1\cos k\left(x-\frac{b}{2}\right)+D_2\right]\frac{V(t)}{h}$$

$$D_1=\frac{d_p^2Y}{\cos\frac{kb}{2}} \qquad ; \qquad D_2=\varepsilon_T-d_p^2Y$$

f).- Encontrar la expresión de C_o y la expresión y el valor numérico de α^2.

De la ecuación (3) se deduce que la densidad superficial de carga es función solamente de la coordenada x



La carga que existe en el elemento dx vale dq = σ dx y la que existe en toda el electrodo es:

$$Q(t) = \int_0^b \sigma w dx = \int_0^b \left[\frac{V(t)}{h} \left[\frac{d_p^2 Y \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right)}{\cos\frac{kb}{2}} - d_p^2 Y + \varepsilon_T \right] \right] w dx$$

Integramos por separado cada sumando.

<u>El primero</u>

$$\int_0^b \frac{V(t)}{h} \frac{d_p^2 Y \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right)}{\cos\frac{kb}{2}} w\ dx = \frac{V(t) w d_p^2 Y}{h \cos\frac{kb}{2}} \int_0^b \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) dx = \frac{V(t)w}{h\cos\frac{kb}{2}} \frac{d_p^2 Y}{k} \left| \operatorname{sen} k\left(x - \frac{b}{2}\right) \right|_0^b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V(t)w}{h\cos\frac{kb}{2}} \frac{d_p^2 Y}{k} \left[\operatorname{sen}\frac{kb}{2} - \operatorname{sen}\frac{-kb}{2} \right] = \frac{V(t)w}{h\cos\frac{kb}{2}} \frac{d_p^2 Y}{k} * 2\operatorname{sen}\left(\frac{kb}{2}\right) = \frac{2V(t)wd_p^2 Y}{hk} \operatorname{tag}\left(\frac{kb}{2}\right)$$

<u>El segundo</u>

$$-\int_0^b \frac{V(t)}{h} d_p^2 Y w dx = -\frac{V(t)}{h} d_p^2 Y w b$$

<u>El tercero</u>

$$\int_0^b \frac{V(t)}{h} \varepsilon_T w dx = \frac{V(t)}{h} \varepsilon_T w b$$

Ahora los agrupamos para obtener la expresión Q(t)

$$Q(t) = \frac{V(t)wb}{h} \left[\frac{2}{kb} d_p^2 Y \operatorname{tag}\left(\frac{kb}{2}\right) - d_p^2 Y + \varepsilon_T \right] = \frac{V(t)wb}{h} \varepsilon_T \left[\frac{d_p^2 Y}{\varepsilon_T} \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tag}\frac{kb}{2} - 1 \right) + 1 \right]$$

A partir del enunciado

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tag}\frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_o V(t)$$

Identificando sus términos

$$C_o = \frac{wb\varepsilon_T}{h} \quad ; \quad \alpha^2 = \frac{d_p^2 Y}{\varepsilon_T} = \frac{\left(2{,}25.10^{-12}\right)^2 * 7{,}87.10^{10}}{4{,}06.10^{-11}} = 9{,}81.10^{-3}$$

III Parte A
MASA DEL NEUTRINO Y DESINTEGRACIÓN DEL NEUTRÓN

Un neutrón libre de masa m_n, que se encuentra en reposo respecto del sistema de laboratorio, se desintegra en tres partículas que no interactúan entre sí: un protón, un electrón y un antineutrino. La masa en reposo del protón es m_p, y se supone que la masa m_ν del antineutrino no es nula aunque mucho más pequeña que la masa en reposo del electrón m_e. La velocidad de la luz se indica por c. Las masas de las partículas son

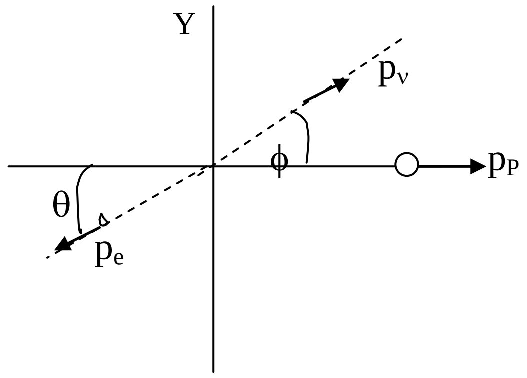
$$m_n = 939{,}56563\ \frac{MeV}{c^2}\ ;\ m_p = 938{,}27231\frac{MeV}{c^2}\ ;\ m_e = 0{,}5109907\frac{MeV}{c^2}$$

En lo que sigue todas las energías y velocidades se refieren al sistema del laboratorio. E designa a la energía total del electrón procedente de la desintegración

Encontrar el valor máximo E_{max} de E y la velocidad v_m del antineutrino cuando E = E_{max}. Las respuestas se darán en función de la masa en reposo de las partículas y de la velocidad de la luz. Dado que $m_\nu < 7{,}3\,\frac{eV}{c^2}$

Calcular E_{max} y la razón $\frac{v_m}{c}$ con tres cifras significativas.

a).-En el sistema de referencia del laboratorio donde el neutrón está en reposo suponemos que la emisión de las tres partículas se hace en direcciones diferentes como indica la figura



Utilizamos la relación

$$E_e^2 = m_e^2c^4 + p_e^2c^2$$

Si deseamos que la energía del electrón sea la máxima posible, la expresión anterior nos dice que el momento lineal del electrón debe ser también máximo

$$p_p + p_\nu \cos\phi = p_e \cos\theta \ \ (1) \qquad ; \qquad p_\nu \operatorname{sen}\phi = p_e \operatorname{sen}\theta \ \ (2)$$

De la ecuación (1) se deduce que para que p_e sea máximo , $\cos\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0$. Si esto se cumple, en (2) se cumplirá que $\operatorname{sen}\phi = 0$ y en consecuencia $\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$.
De los resultados anteriores se deduce que el protón junto con el antineutrino deben viajar en la misma dirección y sentido, mientras que el electrón lo hará en la misma dirección anterior pero en sentido opuesto.

El principio de conservación del momento se escribe ahora $p_\nu + p_p = p_e$

$$\frac{m_\nu v_\nu}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} + \frac{m_p v_p}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} = p_e \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que el protón y el antineutrino viajan en la misma dirección y sentido para que p_e sea máximo y en consecuencia la energía, vamos a calcular la velocidad del centro de masas compuesto por el antineutrino y el protón

$$v_{CM} = \frac{p_\nu + p_p}{m_\nu + m_p}$$

Que en su expresión relativista

$$v_{CM} = \frac{\frac{m_\nu}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} v_\nu + \frac{m_p}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} v_p}{\frac{m_\nu}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} + \frac{m_p}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}}} \Rightarrow \left(\frac{m_\nu}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} + \frac{m_p}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}}\right) v_{CM} = \frac{m_\nu}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} v_\nu + \frac{m_p}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} v_p$$

El primer miembro de la ecuación anterior es el momento lineal del centro de masas del sistema formado por el antineutrino y el protón y debe ser igual al del electrón y de acuerdo con la ecuación (3) se debe cumplir que

$$\frac{m_\nu v_{CM}}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} + \frac{m_p v_{CM}}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} = \frac{m_\nu v_\nu}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}} + \frac{m_p v_p}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{m_\nu}{\sqrt{1-\frac{v_\nu^2}{c^2}}}(v_{CM} - v_\nu) = \frac{m_p v_p}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}}(v_p - v_{CM})$$

La velocidad del centro de masas tiene que ser o mayor o igual que la del protón y lo mismo cabe decir respecto de la velocidad del antineutrino, ya que ambas partículas, protón y antineutrino, se mueven en la misma dirección y sentido.
Si $v_{CM} > v_p$ el segundo miembro de la última ecuación sería negativo y el primero positivo y es imposible entonces la igualdad, por tanto se concluye que $v_{CM} = v_p$, con lo que al ser el segundo miembro nulo, también tiene que serlo el primer y ello obliga a que $v_{CM} = v_\nu$. En resumen <u>ambas partículas se mueven a la misma velocidad y tienen la misma velocidad que el centro de masas de ambas.</u>

b).-En el proceso de desintegración del neutrón se cumple el principio de conservación de la energía y del momento. Llamamos M_C a la masa del conjunto del protón y antineutrino

$$E_n = E_e + E_C \quad ; \quad p_e = p_C \Rightarrow p_e^2 = p_C^2$$

Teniendo en cuenta que

$$E_C^2 = M_C^2c^4 + p_C^2c^2 = M_C^2c^4 + p_e^2c^2 \quad ; \quad p_e^2 = \frac{E_e^2 - m_e^2c^4}{c^2}$$

$$E_C^2 = M_C^2c^4 + E_e^2 - m_e^2c^4 \Rightarrow E_C^2 - E_e^2 = M_C^2c^4 - m_e^2c^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E_C + E_e)(E_C - E_e) = M_C^2c^4 - m_e^2c^4$$

Dividiendo la última ecuación por $E_C+E_e = E_n$ resulta

$$E_C - E_e = \frac{M_C^2c^4 - m_e^2c^4}{E_n} = \frac{M_C^2c^4 - m_e^2c^4}{m_nc^2} \quad (3)$$

$$E_C + E_e = E_n = m_nc^2 \qquad (4)$$

$$2E_C = m_nc^2 - \frac{M_C^2c^4 - m_e^2c^4}{m_nc^2} = c^2\left(m_n + \frac{m_e^2}{m_n} - \frac{(m_p + m_n)^2}{m_n}\right) \quad \Rightarrow$$

$$E_C = \frac{c^2}{2}\left(939{,}56563 + \frac{(0{,}5109907)^2}{939{,}56563} - \frac{(938.27231)^2}{939{,}56563}\right)\frac{\text{MeV}}{c^2} = 1{,}292 \ \text{MeV}$$

A partir de la expresión $E_e^2 = m_e^2c^4 + p_e^2c^2$, despejamos p_e

$$p_e^2 = \frac{E_e^2 - m_e^2c^4}{c^2} \ (5)$$

La energía del electrón se obtiene restando las ecuaciones (4)-(3)

$$2E_e = m_nc^2 - \frac{M_C^2c^2 - m_e^2c^2}{m_n} \Rightarrow 2E_e = \frac{m_n^2c^2 - M_C^2c^2 + m_e^2c^2}{m_n} \Rightarrow E_e = \frac{c^2\left(m_n^2 + m_e^2 - M_C^2\right)}{2m_n}$$

Llevando el valor obtenido de E_e a la ecuación (5)

$$p_e^2 = \frac{E_e^2 - m_e^2c^4}{c^2} = \frac{c^4\left[\dfrac{m_n^2 + m_e^2 - M_C^2}{2\ m_n}\right]^2 - m_e^2c^4}{c^2} = \frac{c^2}{4\ m_n^2}\left[m_n^2 + m_e^2 - M_C^2\right]^2 - 4m_e^2m_n^2c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_e = \frac{c}{2\ m_n}\sqrt{\left(m_n^2 + m_e^2 - M_C^2\right) - 4m_e^2m_n^2}$$

Anteriormente hemos visto que $p_e = p_C$, por tanto

$$p_e = \frac{c}{2\ m_n}\sqrt{\left(m_n^2 + m_e^2 - M_C^2\right) - 4m_e^2m_n^2} = p_C = M_Cv_C = M_Cv_m$$

Ya que la velocidad del conjunto protón anti neutrino es la del antineutrino.

$$\frac{v_m}{c} = \frac{1}{2m_n M_C}\sqrt{\left(m_n^2 + m_e^2 - M_C^2\right)^2 - 4m_e^2 m_n^2}$$

$$m_n^2 + m_e^2 - M_C^2 = (939{,}56563)^2 + (0{,}5109907)^2 - (938{,}27231)^2 = 2428{,}9065$$

$$4m_e^2 m_n^2 = 4*(0{,}5109907)^2 * (939{,}56563)^2 = 922019{,}76$$

$$\frac{1}{2m_n M_C} = \frac{1}{2*939{,}56563*938{,}27231} = 5{,}6717096.10^{-7}$$

$$\frac{v_m}{c} = 1{,}26538.10^{-3} \approx 1{,}27.10^{-3}$$

III Parte B

Levitación con luz

Un hemisferio de vidrio transparente tiene una radio R, una masa m y un índice de refracción n. El medio que rodea al hemisferio posee un índice de refracción unidad.
Un haz cilíndrico paralelo de luz láser monocromática incide de forma perpendicular sobre la superficie circular del hemisferio como indica la figura 3a.

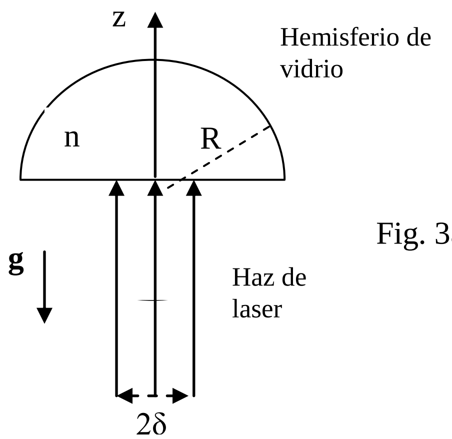
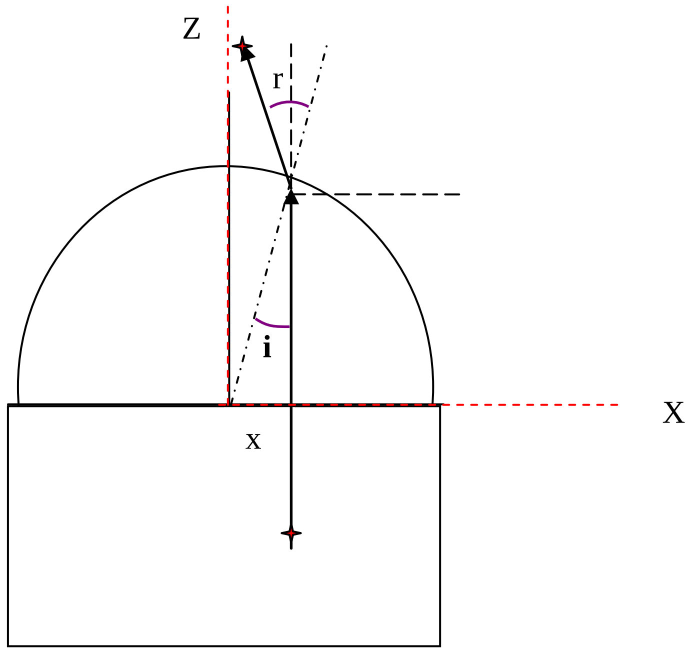


Fig. 3a

El radio del haz es δ y es mucho más pequeño que R. Tanto el haz como el hemisferio son simétricos respecto al eje Z.
Se supone que el hemisferio no absorbe nada de luz del haz y que tampoco existe reflexión. La luz láser entra en el hemisferio y sale por la superficie curva sufriendo una refracción.
Si es preciso se desprecian los términos $(\delta/R)^3$ o superiores. Calcular la potencia del haz de luz láser que equilibra justamente el peso del hemisferio.

Puede utilizarse la aproximación cos $\theta = 1-(\theta^2/2)$

Supongamos que un fotón del haz incidente dista del centro de la base del hemisferio una distancia x, después de penetrar en el hemisferio llega a la superficie curva formando su dirección un ángulo i con la normal y abandona el hemisferio con un ángulo de refracción r.



El ángulo que forma la dirección del protón después de refractarse con el eje Z es r-i. El momento lineal del protón antes de refractarse es

$$\mathbf{p}_{1k} = \frac{E}{c}\mathbf{k}$$

Y después de refractarse

$$\mathbf{p}_{1r} = \frac{E}{c}\left[\cos\,(r-i)\;\mathbf{k} - \text{sen}(r-i)\;\mathbf{i}\right]$$

La variación del momento lineal respecto del eje Z

$$\Delta\mathbf{p}_{1k} = \frac{E}{c}\left[\cos\,(r-i)-1\right]\mathbf{k}$$

Por otra parte tenemos que $n\;\text{sen}i = 1\;\text{sen}r \quad \Rightarrow \quad ni = r$

$$\Delta\mathbf{p}_{1k} = \frac{E}{c}\left[\cos\,(ni-i)-1\right]\mathbf{k}$$

Todos los fotones que estén comprendidos en una corona circular de espesor dx y distancia al centro de la base del hemisferio x, sufren la misma variación en la cantidad de movimiento. Vamos a calcular cuántos son esos fotones.

Designamos con N al número de fotones que llega en el haz cilíndrico de radio δ por unidad de tiempo, por tanto, los que llegan por unidad de área y de tiempo son $\frac{N}{\pi\,\delta^2}$.

Los que llegan por unidad de tiempo en la corona circular son $dn = \frac{N}{\pi\,\delta^2} * 2\pi x\ dx$.

El cambio de momento de estos fotones por unidad de tiempo es precisamente una fuerza

$$dF = \frac{N}{\pi\,\delta^2} * 2\pi x\ dx * \frac{E}{c}\left[\cos(ni - i) - 1\right]$$

Si utilizamos la aproximación que nos dice el enunciado $\cos(ni - i) = 1 - \frac{i^2 (n-1)^2}{2}$, la expresión anterior es:

$$dF = \frac{N}{\delta^2} * x\ dx * \frac{E}{c}\left[-i^2 (n-1)^2\right]$$

Ahora calculamos la fuerza cuando consideramos todos los fotones que forman el haz cilíndrico, para ello tendremos que sumar las aportaciones que hacen cada anillo circular que están comprendidos desde la distancia cero a la distancia d.

$$F = -\int \frac{N}{\delta^2} * \frac{E}{c} * (n-1)^2 * i^2 x dx$$

En la integral anterior hemos de encontrar la relación entre el ángulo de incidencia i y la variable x y observando la figura resulta que $\text{sen}\ i = \frac{x}{R} \Rightarrow i = \frac{x}{R}$

$$F = -\int_0^{\delta} \frac{N}{\delta^2} * \frac{E}{c} * (n-1)^2 * \frac{x^2}{R^2} x dx = -\frac{N}{\delta^2} * \frac{E(n-1)^2}{cR^2} \frac{\delta^4}{4}$$

Esta es la fuerza con que el hemisferio actúa sobre los fotones. La fuerza de reacción es la que actúa sobre el hemisferio por parte de los fotones y es igual y de sentido contrario

$$F_H = \frac{NE(n-1)^2 \delta^2}{4cR^2}$$

E es la energía de un fotón y N el número de fotones que lleva el haz de láser por unidad de tiempo, luego NE es energía del haz por unidad de tiempo, esto es, la potencia del haz. F_H debe equilibrar el peso del hemisferio

$$mg = \frac{P\ (n-1)^2 \delta^2}{4cR^2}$$

Y de aquí conocemos la potencia mínima del haz para que pueda mantener el hemisferio “en vilo” , es decir, que la fuerza debida a la refracción de los fotones iguale al peso del hemisferio. Esta potencia ha de valer:

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}$$