PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Madrid 2008

XXXVIII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. IRÁN. 2007

PROBLEMA 1

Este problema se refiere a un modelo simplificado de acelerómetro diseñado para activar los airbags de un automóvil a causa de una colisión. El sistema electromecánico debe funcionar de modo que cuando la aceleración del vehículo exceda de un determinado valor, uno de los parámetros eléctricos del sistema, por ejemplo, el voltaje, en un cierto punto del circuito, sobrepasa un valor umbral, lo que determina que el airbag se active.

1.- Considere el condensador de platos paralelos representado en la figura 1. El área de cada plato es A, la distancia entre los platos d, siendo d muy pequeño comparado con las dimensiones de los platos.
Uno de los platos está en contacto con una pared a través de un muelle cuya constante elástica es k, el otro plato está fijo. Cuando la distancia entre los platos es d el muelle ni está contraído ni estirado, en otras palabras el muelle no ejerce fuerza sobre el plato.. La permitividad del medio entre los platos es ε_o y la capacidad del condensador $C_o = \varepsilon_o \frac{A}{d}$.
Sobre los platos se ponen cargas +Q y –Q y se permite que el sistema alcance el equilibrio. En el problema se considera que la gravedad

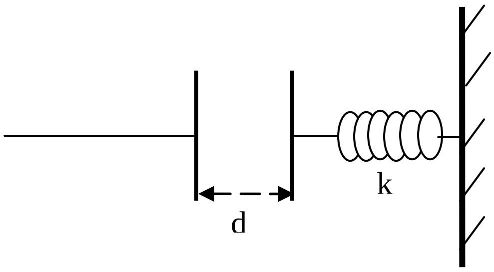


Fig.1

1.1.-Calcular la fuerza eléctrica, F_E, que ejercen entre sí los platos.

La energía almacenada en un condensador plano cargado cuya distancia entre placas es L es:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 L}{\varepsilon_o A}$$

Si aumentamos la separación entre sus placas en dL debemos aportar un trabajo FdL siendo

$$F = \frac{dU}{dL} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o A}$$

1.2.-Sea x el desplazamiento que sufre el plato ligado al muelle. Calcular x.

Existe equilibrio entre la fuerza ejercida por los platos y la que ejerce el muelle, éste se alarga en x y la distancia entre los platos es d-x.

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o A} = kx \Rightarrow x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o Ak}$$

1.3.-En este estado¿ cuál es la diferencia de potencial eléctrico V entre los platos del condensador en función de Q, A, d y k?

De la definición de capacidad

$$C_o = \frac{Q}{V_o} \Rightarrow \frac{\varepsilon_o A}{d} = \frac{Q}{V_o} \quad ; \quad C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \frac{\varepsilon_o A}{(d-x)} = \frac{Q}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{V_o} = \frac{d-x}{V} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = V_0\frac{d-x}{d} = \frac{Qd}{\varepsilon_o A}\left(\frac{d-x}{d}\right) = \frac{Qd}{\varepsilon_o A}\left(1-\frac{x}{d}\right) = \frac{Qd}{\varepsilon_o A}\left(1-\frac{Q^2}{2A\varepsilon_o kd}\right)$$

1.4.-Encontrar la relación C/C_o en función de Q, A, d y k.

A partir de la definición de capacidad

$$\frac{C}{C_o} = \frac{V_o}{V} = \frac{\dfrac{Qd}{\varepsilon_o A}}{\dfrac{Qd}{\varepsilon_o A}\left(1-\dfrac{Q^2}{2A\varepsilon_o kd}\right)} = \frac{1}{1-\dfrac{Q^2}{2A\varepsilon_o kd}}$$

1.5.-¿Cuál es la energía, U, almacenada en el sistema en función de Q, A, d y k.

La energía del sistema es la suma de la energía almacenada en el muelle y la almacenada en el condensador

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}k\frac{Q^4}{4A^2\varepsilon_o^2k^2} + \frac{1}{2}\frac{Q^2(d-x)}{\varepsilon_o A} = \frac{1}{2}k\frac{Q^4}{4A^2\varepsilon_o^2k^2} + \frac{1}{2}\frac{Q^2d}{\varepsilon_o A} - \frac{1}{2}\frac{Q^2\left(\dfrac{Q^2}{2A\varepsilon_o k}\right)}{\varepsilon_o A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{Q^2d}{\varepsilon_o A} - \frac{1}{2}\frac{Q^4}{4A^2\varepsilon_o^2k} = \frac{1}{2}\frac{Q^2d}{\varepsilon_o A}\left(1-\frac{Q^2}{4A\varepsilon_o kd}\right)$$

En la figura 2, la masa M está unida a un plato conductor móvil de masa despreciable y a dos muelles que poseen la misma constante elástica k. El

plato conductor se puede desplazar adelante y atrás en el espacio que existe entre los otros platos que están fijos. Todos los platos son similares y tienen la misma área A. El conjunto de los tres platos constituyen dos condensadores. Tal como indica la figura 2, los platos fijos están conectados a potenciales +V y –V y el plato del medio a un interruptor doble. El hilo conectado al plato móvil no perturba el movimiento del plato y los tres permanecen siempre paralelos. La distancia entre los platos fijos es d y cuando el sistema está en reposo el plato móvil equidista de los fijos.

Cuando todo el dispositivo no se encuentra acelerado la distancia de cada plato fijo al móvil es, siendo d muy pequeño comparado con las dimensiones de los platos. El espesor del plato móvil es despreciable.

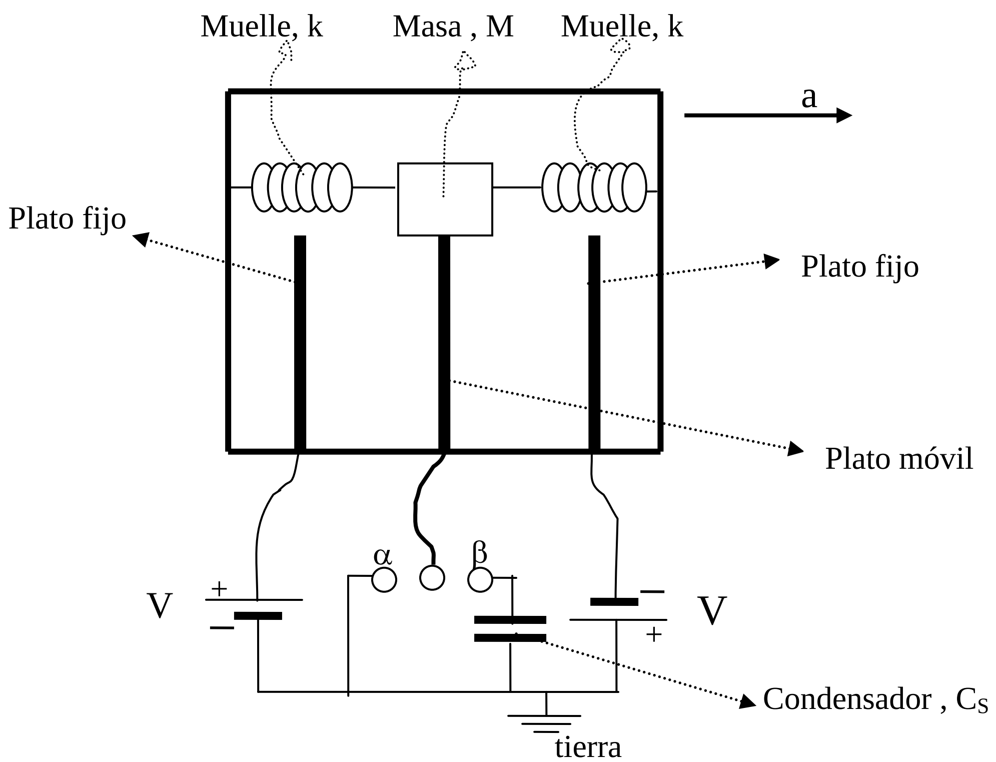


Fig.2

El interruptor puede estar en dos estados α ***y*** β***. Suponer que el dispositivo está siendo acelerado con aceleración, a, constante. Admitir que durante el tiempo que dura la aceleración el muelle no oscila y todos los componentes del sistema están en posiciones de equilibrio, esto es, no se mueven uno respecto de otro y con el automóvil.***

Debido a la aceleración, el plato móvil se desplaza una longitud x respecto de la posición central de los dos platos fijos.

2.-Considerar el caso en el que el interruptor esté en la posición α, esto es, el plato móvil está conectado a tierra a través del hilo.

2.1.- Encontrar la carga de cada condensador en función de x.

El plato móvil se desplaza hacia la izquierda acercándose al plato que esta cargado positivamente y alejándose la distancia x del plato que está cargado negativamente.
La capacidad del condensador formado por el plato izquierdo y el móvil es

$$C_1 = \frac{Q_1}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_o A}{d-x} = \frac{Q_1}{V} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{\varepsilon_o A}{d-x} V$$

La capacidad del condensador formado por el plato móvil y el plato de la derecha

$$C_2 = \frac{Q_2}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_o A}{d+x} = \frac{Q_2}{V} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{\varepsilon_o A}{d+x} V$$

2.2.- Encontrar la fuerza eléctrica neta sobre el plato móvil, F_E, en función de x.

Sobre el plato móvil actúan dos fuerzas, una dirigida hacia la izquierda que es la atracción que ejerce el plato fijo de la izquierda y una dirigida hacia la derecha que es la que ejerce el plato fijo situado a la derecha, la fuerza F_E es la diferencia entre las dos.

$$F_E = F_1 - F_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{\varepsilon_o A} - \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{\varepsilon_o A} = \frac{1}{2\varepsilon_o A}\left[\frac{\varepsilon_o^2 A^2 V^2}{(d-x)^2} - \frac{\varepsilon_o^2 A^2 V^2}{(d+x)^2}\right] = \frac{\varepsilon_o^2 A V^2}{2}\left[\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right]$$

2.3.-Suponer que d>>x y los términos x^2 pueden despreciarse frente a d^2. Simplificar la respuesta del apartado 2.2.

$$F_E = \frac{\varepsilon_o^2 A V^2}{2}\left[\frac{1}{d^2 - 2xd} - \frac{1}{d^2 + 2xd}\right] = \frac{\varepsilon_o^2 A V^2}{2}\left[\frac{4xd}{d^4 - 4x^2 d^2}\right] = \frac{2\varepsilon_o^2 A V^2}{d^3} x$$

2.4.-Escribir la fuerza total sobre el plato móvil como $-k_{eff}$ y dar la expresión de k_{eff}.

En la figura 3 se indican las fuerzas que actúan sobre el plato móvil

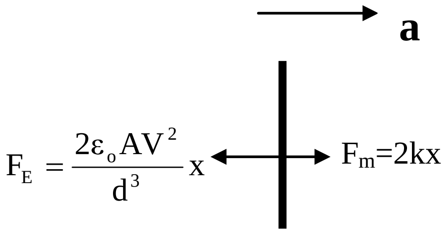


Fig.3

Si consideramos el desplazamiento x como positivo

$$F_{total} = -2kx + \frac{2\varepsilon_o AV^2}{d^3}x = -2x\left(k - \frac{2\varepsilon_o AV^2}{d^3}\right) = -2k_{eff}\,x$$

2.5..-Expresar la aceleración constante ,a, en función de x.

$$F_{total} = -2kx + \frac{2\varepsilon_o AV^2}{d^3}x = Ma \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{2}{M}\left(\frac{2\varepsilon_o AV^2}{d^3}\right)x$$

3.- Ahora suponemos que el interruptor se encuentra en el estado b y que el sistema se ha diseñado para que cuando el voltaje a través del condensador (C_s) alcance el valor de 0,15 V, el airbag se active. Por otra parte el airbag no se debe activar durante una frenada normal en la que la aceleración es menor que g=9,8 m/s^2.

3.1.- ¿Cuál es el valor de C_s para que ocurra lo anterior?

En la figura 4 se han representado por separado los dos circuitos.

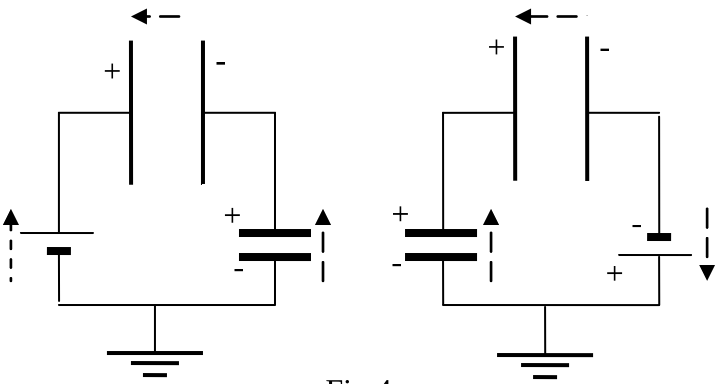


Fig.4

Según vimos en el apartado 2.1 la carga Q_1 es mayor que la carga Q_2. Si designamos Qs a la carga del condensador Cs, resulta que

$$Q_s = Q_1 - Q_2$$

En los circuitos de la figura se toma como sentido positivo el de las agujas del reloj y se da un sentido de menos a más a las diferencias de potencial.

$$V - \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_s}{C_s} = 0 \qquad ; \qquad V - \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_s}{C_s} = 0$$

A partir de las dos últimas ecuaciones

$$V - \frac{Q_s}{C_s} = \frac{Q_1}{C_1} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = VC_1 - C_1\frac{Q_s}{C_s}$$

$$V + \frac{Q_s}{C_s} = \frac{Q_2}{C_2} \quad Q_2 = VC_2 + C_2\frac{Q_s}{C_s}$$

$$Q_s = Q_1 - Q_2 = C_1V - C_1\frac{Q_s}{C_s} - C_2V - C_2\frac{Q_s}{C_s} \quad \Rightarrow Q_s\left(1 + \frac{C_1}{C_s} + \frac{C_2}{C_s}\right) = V(C_1 - C_2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_s}{C_s}(C_s + C_1 + C_2) = V(C_1 - C_2) \quad \Rightarrow \quad V_s = \frac{V(C_1 - C_2)}{C_s + C_1 + C_2}$$

$$C_1 - C_2 = \varepsilon_o A\left(\frac{1}{d-x} - \frac{1}{d+x}\right) = \frac{\varepsilon_o A2x}{d^2 - x^2} \quad ; \quad C_1 + C_2 = \varepsilon_o A\left(\frac{1}{d-x} + \frac{1}{d+x}\right) = \frac{\varepsilon_o A2d}{d^2 - x^2}$$

$$V_s = V\frac{\dfrac{2\varepsilon_o Ax}{d^2 - x^2}}{C_s + \dfrac{2\varepsilon_o Ad}{d^2 - x^2}}$$

3.2.-De nuevo suponga que d>>x y desprecie los términos de orden x^2 frente a d^2 y así simplifique la respuesta del apartado 3.1

$$V_s = V\frac{\dfrac{2\varepsilon_o Ax}{d^2 - x^2}}{C_s + \dfrac{2\varepsilon_o Ad}{d^2 - x^2}} = V\frac{2\varepsilon_o Ax}{C_s\left(d^2 - x^2\right) + 2\varepsilon_o Ad} \quad \Rightarrow \quad V_s \approx V\frac{2\varepsilon_o Ax}{C_s d^2 + 2\varepsilon_o Ad}$$

4.-Debemos ajustar los parámetros no sólo para que el airbag no se active en una frenada normal, sino que cuando ocurra una colisión se abra lo suficientemente rápido que evite que la cabeza del conductor choque contra el parabrisas o el volante.
Como se ha visto en el apartado 2.4 la fuerza ejercida por los muelles y por las cargas eléctricas sobre el plato móvil se puede representar mediante la acción de un muelle de constante elástica k_{eff}. El sistema electromecánico es similar a un sistema de masa M y muelle k_{eff} bajo la

influencia de una aceleración constante a , que en este problema corresponde a la aceleración del automóvil.
Considere los siguientes valores numéricos para el problema
D=1,0 cm , A = 2,5.10^{-2} m^{2} , k =4,2.10^{3} N/m , ε_o = 8,85.10^{-12} C^{2} N^{-1} m^{-2}
V= 12 V , M=0,15 kg

4.1.- Utilizando los datos anteriores calcule la relación de la fuerza eléctrica (ya calculada en el apartado 2.3) a la fuerza de los muelles y muestre que la fuerza eléctrica se puede despreciar por su pequeño valor frente a la fuerza de los muelles

$$\frac{F_E}{F_m}=\frac{\frac{2\varepsilon_o AV^2}{d^3}x}{2kx}=\frac{\varepsilon_o AV^2}{d^3k}=\frac{8{,}85.10^{-12}\cdot 12^2\cdot 2{,}5.10^{-2}}{\left(1.10^{-2}\right)^3\cdot 4{,}2.10^3}=7{,}6.10^{-9}$$

4.2.- Si un automóvil que viaja a velocidad constante repentinamente frena con una aceleración constante a ¿cuál es el máximo desplazamiento del plato móvil?

Cuando el automóvil frena sobre la masa M actúa una fuerza de inercia de sentido contrario a la aceleración, y a medida que el plato móvil se desplaza hacia la izquierda sobre él aparecen las fuerza reales que ejercen los muelles (fig.5)

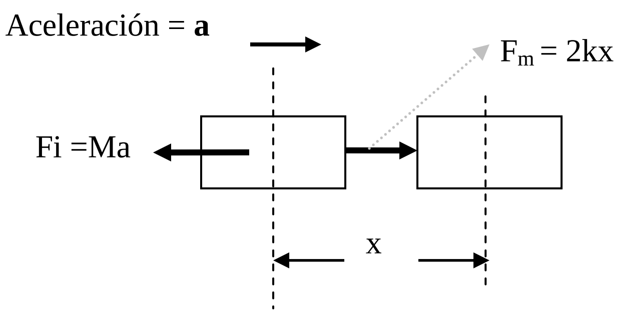


Fig.5

De acuerdo con la ley de Newton

$$\sum F=ma\Rightarrow Ma-2kx=ma\acute{}\Rightarrow Ma-2kx=m\frac{dv}{dt}=M\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ma\ dx-2kx\ dx=Mdv\Rightarrow Max-kx^2=Mv+Cte$$

Cuando x= 0 la velocidad de M es cero y por consiguiente la Cte = 0.El alcance máximo, respecto de la posición inicial, se logra cuando la velocidad vuelva a ser cero

$$Max_{max} - kx^2_{max} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \frac{Ma}{k}$$

Suponer que el interruptor ocupa la posición β y el sistema se ha diseñado para que cuando el voltaje eléctrico a través del condensador alcance el valor de V_s=0,15 V, el airbag se active. Por otra parte el airbag no se debe activar en frenadas normales cuyo valor no es superior a g = 9,8 m/s^2

4.3.- ¿Cuál es el valor de C_s?

En el apartado 3.2 hemos visto que la caída de tensión en el condensador vale:

$$V_s = V\frac{2\varepsilon_o Ax}{C_s d^2 + 2\varepsilon_o Ad}$$

En la expresión anterior hacemos x= x_{max}

$$V_s = V\frac{2\varepsilon_o Ax_{max}}{C_s d^2 + 2\varepsilon_o Ad} \Rightarrow 2\varepsilon_o Ax_{max} = \frac{V_s}{V}\left(C_s d^2 + 2\varepsilon_o Ad\right) \Rightarrow C_s = \frac{2\frac{V}{V_s}\varepsilon_o Ax_{max}}{d^2} - \frac{2\varepsilon_o A}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s = \frac{2\varepsilon_o A}{d}\left(\frac{V}{V_s}\frac{x_{max}}{d} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad C_s = \frac{2\varepsilon_o A}{d}\left(\frac{V}{V_s}\frac{Mg}{dk} - 1\right) \quad \Rightarrow$$

$$C_s = \frac{2\cdot 8{,}85.10^{-12}\cdot 2{,}5.10^{-2}}{1.10^{-2}}\left(\frac{12}{0{,}15}\cdot\frac{0{,}15\cdot 9{,}8}{1.10^{-2}\cdot 4.2.10^{3}} - 1\right) = 8{,}0.10^{-11}\ \text{F}$$

El dispositivo debe activarse con suficiente rapidez para que la cabeza del conductor no llegue a chocar con el parabrisas o con el volante. Suponer que a consecuencia de una colisión la deceleración del automóvil alcanza el valor de g = 9,8 m/s^2 .

4.4.- Estimar una distancia entre la cabeza del conductor y el volante y calcular el tiempo que tarda t_1 la cabeza del conductor en chocar con el volante

La distancia de la cabeza del conductor al volante depende de la posición del conductor pero la situación más desfavorable ocurre cuando el conductor está situado cerca del volante ya que entonces el tiempo de choque de su cabeza con el volante es el menor.
Generalmente esta distancia mínima será aproximadamente de unos 30 cm.
Al ocurrir el choque la velocidad de la cabeza del conductor es nula respecto del automóvil, pero cuando ocurre la colisión aparece una deceleración g dirigida en sentido contrario de la marcha del automóvil, por lo que el conductor (suponemos que la única parte que se mueve de su cuerpo es la cabeza) sufre una fuerza de inercia

dirigida en sentido de la marcha y que vale mg siendo m la masa de la cabeza del conductor . Según la ley de Newton

$$F = ma \ \Rightarrow \ mg = ma \Rightarrow \ a = g$$

La cabeza del conductor tarda en llegar al volante

$$0{,}30 = 0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}25 \ \text{s}$$

4.3.- Encontrar el tiempo t_2 que transcurre para que se active el airbag y compárelo con t_1.¿Se activa a tiempo el airbag? Suponer que el airbag se abre instantáneamente.

En el apartado 2.4 hemos visto que el movimiento del plato móvil que es el de la masa M, es armónico y para que el airbag se active la posición que debe alcanzar el plato móvil es x max, esa distancia la recorre con movimiento armónico y corresponde a la mitad de un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}15}{4{,}2.10^3}} = 0{,}038 \ \text{s} \quad \Rightarrow \quad t_2 = 0{,}014 \ \text{s}$$

El airbag se activa antes de que la cabeza del conductor llegue al volante y por ello se activa a tiempo**.**

PROBLEMA 2

Las ecuaciones de la Física son dimensionalmente homogéneas, esto quiere decir que las dimensiones del primer miembro deben ser iguales a las del segundo. No puede ser correcta una ecuación en que las dimensiones del primer miembro sean por ejemplo una longitud y las del segundo un tiempo. A veces se utiliza este hecho para deducir alguna relación física sin que el problema se haya resuelto analíticamente.
Por ejemplo, si queremos determinar el tiempo que transcurre para que un objeto situado a una altura h sobre el suelo llegue a él en el campo gravitatorio terrestre se puede argumentar que debemos buscar una expresión que incluya las cantidades h y g y que sea dimensionalmente iguala un tiempo. Por ejemplo $\mathbf{t = a\left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}}$. La solución incluye un numero sin dimensiones a, que no se puede determinar por este método, el coeficiente puede ser cualquier número real.
Este método de deducir relaciones físicas recibe el nombre de análisis dimensional.
En este método los coeficientes se consideran sin importancia y no se escriben, además en muchos casos el orden de los mismos que es 1 y por tanto el no ponerlos no cambia el orden de magnitud de las cantidades físicas. Así para el ejemplo propuesto se escribe: $\mathbf{t = \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Las dimensiones de las cantidades físicas se suelen escribir en función de cuatro magnitudes : masa (M), Longitud (L) , tiempo (T) y temperatura (K). Las dimensiones de una cantidad arbitraria x se escribe $[\mathbf{x}]$.Por ejemplo, las dimensiones de la velocidad , de la energía cinética y de la capacidad calorífica $\mathbf{C_V}$ se escriben : $[\mathbf{v}] = \mathbf{LT^{-1}}, [\mathbf{E_c}] = \mathbf{ML^2T^{-2}}, [\mathbf{C_V}] = \mathbf{ML^2T^{-2}K^{-1}}$.

1.- Constantes fundamentales y análisis dimensional

1.1.-Encontrar las dimensiones de las siguientes constantes fundamentales: La constante de Planck ,h, la velocidad de la luz ,c, la constante universal de gravitación , G, y la constante de Boltzmann,k_b, en función de longitud , masa, tiempo y temperatura.,

La forma de resolver es encontrar una ecuación conocida en que intervenga la magnitud de la que quiere buscar su ecuación dimensional.

E = hν que es la energía de un fotón, además $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\ \nu$ y la energía tiene las dimensiones de un trabajo F.d y la fuerza es igual a la masa por la aceleración

$$h = \frac{E}{\nu} = \frac{E}{v}\lambda \Rightarrow [h] = \frac{[M]a[L][L]}{v}$$

Como v =aceleración * tiempo, $\text{tiempo} = \frac{v}{a}$

Finalmente

$$\text{a) } h = \frac{E}{\nu} = \frac{E}{v}\lambda \Rightarrow [h] = \frac{[M]a[L][L]}{v} = \frac{[M][L]^2}{T} = ML^2T^{-1}$$

b) velocidad es la relación entre camino recorrido y tiempo empleado $[c] = LT^{-1}$

$$\text{c) } F = G\frac{mm}{d^2} \Rightarrow G = \frac{Fd^2}{m^2} \Rightarrow G = \frac{[M]a[L]^2}{[M]^2} = \frac{[M]v[L]^2}{[M]^2[T]} \Rightarrow [G] = \frac{LT^{-1}L^2}{MT} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

d) La constante de Boltzmann es igual a la conste R de los gases dividida por el número de Avogadro, luego sus dimensiones son las mismas que las de R , R se relaciona con la ecuación de los gases perfectos

$$k_b = \frac{R}{N} = \frac{PV}{NT} = \frac{\frac{F}{S}V}{N\theta} \Rightarrow [k_b] = \frac{\frac{MLT^{-2}L^3}{L^2}}{K} = ML^2T^{-2}K^{-1}$$

La ley de Stefan-Boltzmann establece que la energía total radiada por unidad de área y unidad de tiempo por un cuerpo negro es igual a $\sigma\theta^4$, en la que σ es la denominada constante de Stefan-Boltzmann y θ la temperatura absoluta del cuerpo negro.

1.2.-Determinar las dimensiones de la constante de Stefan-Boltzmann en función de la longitud, masa, tiempo y temperatura.

$$E_B = \sigma\theta^4 \Rightarrow \quad [\sigma] = \frac{\frac{\text{Energía}}{\text{área} \cdot \text{tiempo}}}{K^4} = \frac{\frac{ML^2T^{-2}}{L^2T}}{K^4} = MT^{-3}K^{-4}$$

La constante de Stefan-Boltzmann no es una constante fundamental y se puede expresar en términos de las constantes universales, esto es, se puede escribir $\sigma = a\, h^{\alpha} c^{\beta} G^{\gamma} k_b^{\delta}$. En esta relación a es un parámetro adimensional de orden 1 y como se ha mencionado anteriormente su valor exacto no es significativo desde nuestro punto de vista, así que por ello lo haremos igual a 1.

1.3 Encontrar α, β, γ, y δ, utilizando el análisis dimensional

Colocamos lasa dimensiones de todos los términos

$$MT^{-3}K^{-4} = \left(ML^2T^{-1}\right)^{\alpha} \cdot \left(LT^{-1}\right)^{\beta} \cdot \left(L^3M^{-1}T^{-2}\right)^{\gamma} \cdot \left(ML^2T^{-2}K^{-1}\right)^{\delta}$$

Igualamos los coeficientes del primer miembro con los del segundo

$$\left.\begin{array}{l} \alpha-\gamma+\delta=1 \\ 2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta=0 \\ -\alpha-\beta-2\gamma-2\delta=-3 \\ -\delta=-4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha-\gamma=-3 \\ 2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta=0 \\ \alpha+\beta+2\gamma+2\delta=+3 \\ \delta=4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha-\gamma=-3 \\ \left.\begin{array}{l} 2\alpha+\beta+3\gamma=-8 \\ \alpha+\beta+2\gamma=-5 \end{array}\right\} \\ \delta=4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha-\gamma=-3 \\ \alpha+\gamma=-3 \end{array}\right\} \alpha=-3 \quad ; \quad \gamma=0 \quad ; \quad 2\cdot(-3)+\beta=-8 \quad \Rightarrow \quad \beta=-2$$

$$\sigma = h^{-3}c^{-2}k_b^4 = \frac{k_b^4}{h^3c^2} \quad (1)$$

2.- Física de los agujeros negros

En esta parte del problema intentaremos encontrar algunas propiedades de los agujeros negros utilizando el análisis dimensional de acuerdo con un cierto teorema de la física conocido como no hair teoreme todas las características de los agujeros negros que consideramos en este problema dependen solamente de su masa. Una característica de los agujeros negros es su horizonte de sucesos. De forma aproximada, el horizonte de sucesos del agujero negro es una frontera dentro de la cual la intensidad gravitatoria es tan intensa que ni siquiera la luz pueda salir fuera de ella. Tratamos de encontrar una relación entre la masa del agujero negro ,m, y el área del horizonte de sucesos, A. Esta área depende de la masa del agujero negro ,de la velocidad de la luz y de la constante de gravitación universal. Como ya se hizo en 1.3 escribimos $A = G^{\alpha}c^{\beta}m^{\gamma}$

2.1.- Utilice el análisis dimensional para encontrar α, β ***y*** γ.

$$L^2 = \left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^{\alpha} \cdot \left(LT^{-1}\right)^{\beta} \cdot M^{\gamma}$$

Identificando coeficientes

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha+\gamma=0 \\ 3\alpha+\beta=2 \\ 2\alpha+\beta=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha=\gamma \\ \alpha=2 \\ \beta=-4 \end{array} \qquad A = G^2c^{-4}m^2 = \frac{m^2G^2}{c^4} \quad (2)$$

El resultado de 2.1 indica que el área del horizonte de sucesos de un agujero negro aumenta con el aumento de su masa. Desde el punto de vista clásico nada puede salir de un agujero negro y por lo tanto en todos

los procesos físicos del área del horizonte de sucesos puede solamente aumentar. Al igual, que la segunda ley de la termodinámica, Bekenstein propuso asignar una entropía S a un agujero negro, proporcional al área del horizonte de sucesos S = ηA. Esta conjetura se ha hecho más plausible utilizando otros argumentos.

2.2.-Utilice la definición termodinámica de entropía dS=dQ/θ para encontrar las dimensiones de la entropía

$$[S] = \frac{ML^2T^{-2}}{K} = ML^2T^{-2}K^{-1}$$

2.3.- Exprese la constante dimensional η en función de h, c, G, k_b

$$\eta = \frac{ML^2T^{-2}K^{-1}}{L^2} = MT^{-2}K^{-1}$$

$$MT^{-2}K^{-1} = \left(ML^2T^{-1}\right)^{\alpha} \cdot \left(LT^{-1}\right)^{\beta} \cdot \left(L^3M^{-1}T^{-2}\right)^{\gamma} \cdot \left(ML^2T^{-2}K^{-1}\right)^{\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \gamma + \delta = 1 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta = 0 \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 2\delta = -2 \\ \delta = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha - \gamma = 0 \\ 5\alpha + \beta = -2 \\ 3\alpha + \beta = 0 \\ \delta = 4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = -1 \quad ; \quad \gamma = -1 \\ \beta = 3 \end{array}$$

$$\eta = h^{-1}c^3G^{-1}k_b^1 = \frac{c^3k_b}{hG} \quad (3)$$

Para el resto del problema no utilice el análisis dimensional, aunque puede utilizar los resultados que se hayan obtenido en los apartados anteriores.

3.- Radiación de Hawking

A partir de un tratamiento semicuántico, Hawking argumentó, que contrariamente al punto de vista clásico, los agujeros negros emiten radiación parecida a la de un cuerpo negro y a una temperatura que se denomina temperatura de Hawking.

3.1.- Utilice E = mc^2, expresión que da la energía de un agujero negro en función de su masa, y las leyes de la termodinámica para expresar la temperatura de Hawking, θ_H, en función de la masa del agujero negro y de las constantes fundamentales . Suponga que el agujero negro no ejecuta trabajo sobre los alrededores.

La primera ley de la Termodinámica se expresa mediante la ecuación siguiente

$$dE = dQ + dW$$

Como dice el enunciado dW =0. La definición de entropía es. $dS = \frac{dQ}{\theta}$, lo que en definitiva resulta es: $\theta_H = \frac{dE}{dS}$.

Expresamos la entropía en función de las constantes fundamentales

$$S = \eta A = \frac{c^3 k_b}{hG} \cdot \frac{m^2 G^2}{c^4} = \frac{G k_b}{hc} m^2$$

Sustituimos m a partir de $E = mc^2$

$$S = \frac{G k_b}{hc} \frac{E^2}{c^4} \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{\frac{h\ c^5\ S}{G k_b}}$$

$$\theta_H = \frac{dE}{dS} = \sqrt{\frac{h\ c^5}{G\ k_b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{S}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h\ c^5}{G\ k_b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{G\ k_b}{hc}} \cdot m} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h^2 c^6}{G^2\ k_b^2}} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{2}\frac{h\ c^3}{G\ k_b}\frac{1}{m} \quad (4)$$

3.2.-La masa de un agujero negro aislado cambiará debido a la radiación de Hawking. Utilice la ley de Stefan-Boltzmann para encontrar la variación de la masa del agujero negro respecto del tiempo producido por la radiación citada.

La ley de Stefan-Boltzmann es: $E_{A,t} = \sigma\theta_H^4$, en la que $E_{A,t}$ significa energía por unidad de área y unidad de tiempo; $E_t = \sigma\theta_H^4 A = \frac{dE}{dt}$, ahora E_t significa energía por unidad de tiempo.

A partir de la relación de Einstein $E=mc^2$, $\frac{dE}{dt} = -\frac{dm}{dt}c^2$, el signo menos indica que la masa disminuye con el tiempo

$$-\frac{dm}{dt}c^2 = \sigma\ \theta_H^4 A \Rightarrow \frac{dm}{dt} = -\frac{\sigma\ \theta_H^4 A}{c^2}$$

Sustituyendo las ecuaciones.

$$\sigma = \frac{k_b^4}{h^3 c^2}\ (1) \quad , \qquad A = \frac{m^2 G^2}{c^4}\ (2) \qquad y \qquad \theta_H = \frac{1}{2}\frac{h\ c^3}{G\ k_b}\frac{1}{m}\ (4)$$

$$-\frac{dm}{dt}c^2 = \frac{k_b^4}{h^3 c^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{h\ c^3}{G\ k_b}\frac{1}{m}\right)^4 \cdot \frac{m^2 G^2}{c^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{16}\frac{h\ c^4}{G^2\ m^2} \quad (5)$$

3.3.-Encontrar el tiempo t* que transcurre para que un agujero negro aislado de masa mi se evapore completamente, esto es, pierda su masa.

De la ecuación (5)

$$\int_{m_i}^{0} dm \cdot m^2 = \int_{0}^{t^*} -\frac{1}{16}\frac{h\ c^4}{G^2\ m^2}\,dt \Rightarrow \left[\frac{m^3}{3}\right]_{m_i}^{0} = -\frac{1}{16}\frac{h\ c^4}{G^2}\left[t\right]_0^{t^*} \Rightarrow -\frac{m_i^3}{3} = -\frac{1}{16}\frac{h\ c^4}{G^2}\cdot t^* \Rightarrow$$

$$t^* = \frac{16\ G^2\ m_i^3}{3\ h\ c^4} \quad (6)$$

Desde el punto de vista de la termodinámica, los agujeros negros exhiben propiedades extrañas. Por ejemplo, su capacidad calorífica es negativa.

3.4.-Encontrar la capacidad calorífica de un agujero negro de masa m.

$$C_V = \frac{dE}{d\theta_H}$$

Utilizamos la ecuación (4) $\theta_H = \frac{1}{2}\frac{h\ c^3}{G\ k_b}\frac{1}{m}$ y la ecuación: $E = mc^2$

De (4) despejamos m y sustituimos en $E = mc^2$.

$$m = \frac{1}{2}\frac{h\ c^3}{G\ k_b}\frac{1}{\theta_H} \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\frac{h\ c^3}{G\ k_b}\frac{1}{\theta_H}\cdot c^2 \quad \Rightarrow \quad C_V = \frac{dE}{d\theta_H} = \frac{1}{2}\frac{h\ c^5}{G\ k_b}\cdot\left(-\frac{1}{\theta_H^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_V = -\frac{1}{2}\frac{h\ c^5}{G\ k_b}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}\frac{h^2\ c^6}{G^2\ k_b^2}\cdot\frac{1}{m^2}} = -\frac{4}{2}\frac{h\ c^5\ G^2 k_b^2 m^2}{G\ k_b\ h^2\ c^6} = -\frac{2\ G\ k_b\ m^2}{h\ c} \quad (7)$$

4.- Agujeros negros y radiación cósmica de fondo

Considerar un agujero negro que se encuentra expuesto a la radiación cósmica de fondo. La radiación cósmica de fondo es la radiación de un cuerpo negro a una temperatura θ_b y que llena todo el universo. Un objeto que tenga un área A recibe por unidad de tiempo una energía $\sigma\theta_b^4 A$. Por lo tanto un agujero negro pierde energía debido a la radiación Hawking y la gana debido a la radiación cósmica de fondo.

4.1.- Encontrar la variación de masa con el tiempo de un agujero negro en función de su masa, la temperatura de la radiación de fondo y las constantes fundamentales.

Siguiendo lo dicho en el apartado 3.2 escribimos

$$\frac{dm}{dt}c^2 = -\sigma\theta_H^4 A + \sigma\theta_b^4 A \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \frac{-\sigma\theta_H^4 A}{c^2} + \frac{\sigma\theta_b^4 A}{c^2}$$

En la ecuación anterior el primer sumando se ha calculado en 3.2 y en el segundo sumando sustituimos A y θ_H

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{16}\frac{hc^4}{G^2}\frac{1}{m^2} + \frac{k_b^4}{c^2h^3}\frac{\theta_b^4}{c^2}\frac{m^2G^2}{c^4} = -\frac{1}{16}\frac{hc^4}{G^2}\frac{1}{m^2} + \frac{G^2k_b^4\theta_b^4}{h^3c^8}m^2 \quad (8)$$

4.2.- Existe una masa m para la que dm/dt se anula. Expresar m* en función de θ_b y las constantes fundamentales.*

$$\frac{1}{16}\frac{hc^4}{G^2}\frac{1}{(m*)^2} = \frac{G^2k_b^4\theta_b^4}{h^3c^8}(m*)^2 \Rightarrow (m*)^4 = \frac{h^4c^{12}}{16G^4k_b^4\theta_b^4} \quad \Rightarrow \quad m* = \frac{hc^3}{2G\ k_b\ \theta_b} \quad (9)$$

4.3.-Utilice el valor de θ_b obtenido en el apartado anterior y calcule dm/dt en función de m , m y las constantes fundamentales.*

Despejamos de (9) , θ_b

$$\theta_b = \frac{hc^3}{2G\ k_b\ m*}$$

Llevamos el valor anterior a la ecuación (8)

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{16}\frac{hc^4}{G^2}\frac{1}{m^2} + \frac{G^2k_b^4}{h^3c^8}m^2\cdot\left(\frac{hc^3}{2G\ k_b\ m*}\right)^4 = -\frac{1}{16}\frac{hc^4}{G^2}\frac{1}{m^2} + \frac{1}{16}\frac{hc^4}{G^2}\frac{m^2}{(m*)^4} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{16}\frac{hc^4}{G^2}\frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{m^4}{(m*)^4}\right)$$

4.4.-Encontrar la temperatura de Hawking de un agujero negro que está en equilibrio térmico con la radiación cósmica de fondo

En el apartado 3.1 se ha calculado la temperatura de Hawking : $\theta_H = \frac{1}{2}\frac{h\ c^3}{G\ k_b}\frac{1}{m}$

De la ecuación (9) se deduce la temperatura θ_b de la radiación de fondo $\theta_b = \frac{hc^3}{2G\ k_b\ m*}$

Si existe equilibrio térmico θ_H y θ_b son iguales, por tanto

$$\frac{1}{2}\frac{h\ c^3}{G\ k_b}\frac{1}{m}=\frac{h\ c^3}{2G\ k_b\ m*} \quad \Rightarrow \quad m=m*$$

La conclusión es que si un agujero negro está en equilibrio térmico con la radiación cósmica de fondo su masa es igual a m* y entonces el agujero ni pierde masa ni la gana.

4.5.- ¿El equilibrio es estable o inestable?

Un agujero negro tendrá una masa m, si da la casualidad que esta masa es igual a m* entonces el agujero ni pierde ni gana masa y es estable, pero lo normal es que m sea mayor que m* o menor.

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{1}{16}\frac{hc^4}{G^2}\frac{1}{m^2}\left(1-\frac{m^4}{(m*)^4}\right)$$

Cuando m> m* el paréntesis de la ecuación anterior es negativo y dm/dt es positivo, el agujero negro gana masa

Cuando m< m* el paréntesis de la ecuación anterior es positivo y dm/dt es negativo, el agujero negro pierde masa.

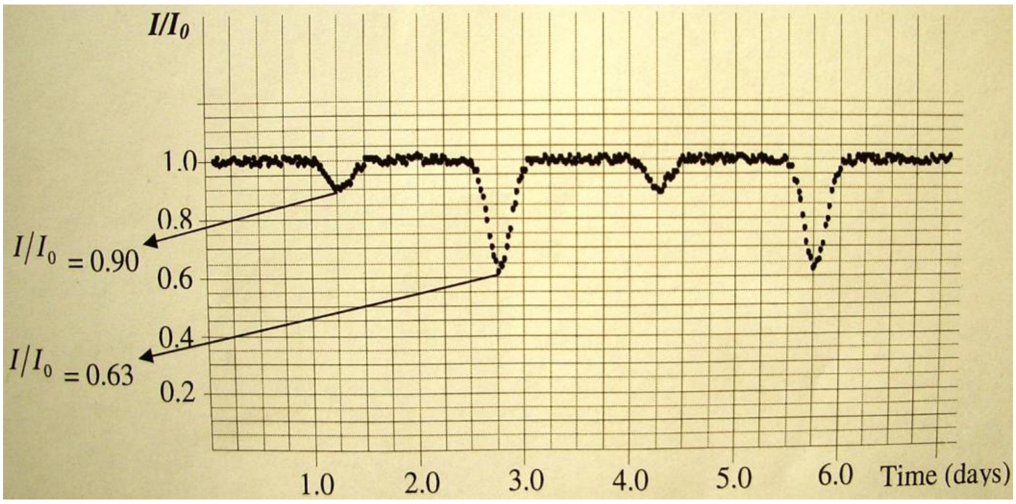
PROBLEMA 3

Un sistema binario está formado por dos estrellas que giran alrededor de su centro de masas. Aproximadamente la mitad de las estrellas de nuestra galaxia son sistemas binarios. No resulta fácil desde la Tierra detectar estos sistemas binarios, ya que la distancia entre las dos estrellas del sistema es mucho menor que su distancia a la Tierra y por ello no se pueden detectar con el telescopio. Para ello se necesita recurrir a la fotometría o espectrofotometría y observar las variaciones de la intensidad o el espectro de una estrella para decidir si es o no un sistema binario.

Fotometría de estrellas binarias

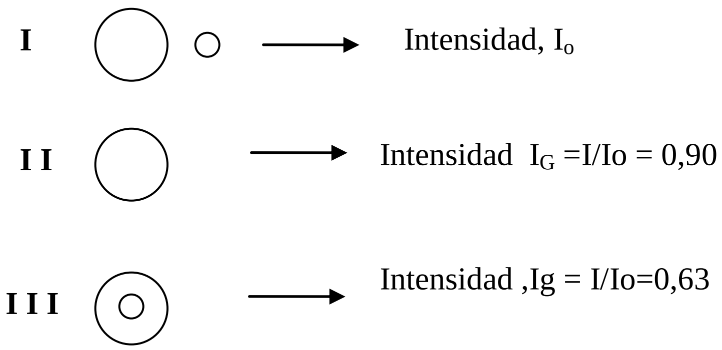
Si nosotros nos encontramos exactamente en el plano de movimiento de las dos estrellas, cuando una de ellas se oculta respecto de nosotros al situarse detrás de la que está delante, la intensidad del sistema disminuye con el tiempo. Estos sistemas binarios se llaman binarias eclipticas.

1.- Suponer que las dos estrellas describen órbitas circulares alrededor de su común centro de masas con una velocidad angular constante, ω, y nosotros nos encontramos exactamente en el plano de movimiento del sistema binario. Suponer también que las temperaturas de las estrellas son T_1 y T_2, respectivamente, siendo $T_1>T_2$ y sus radios R_1 y R_2 siendo $R_1>R_2$. La intensidad total de luz medida en la Tierra está representada en la figura 1 frente al tiempo. Medidas cuidadosas indican que los mínimos de las intensidades de la luz incidente son el 90% y 60% de la intensidad máxima, I_o,(I_o=4,8.10^{-9} W/m^2) recibida en la Tierra por las dos estrellas.



1.1.- ***Encontrar el periodo del movimiento orbital, dando la respuesta en segundos con dos cifras significativas.¿Cuál es la frecuencia angular del sistema en rad/s?***

En la figura se observa la posición de las estrellas y su relación con la figura 1



En la posición **I** las dos estrellas envían luz a la Tierra y la intensidad es la máxima posible. En la posición **II** la estrella de tamaño menor está oculta, ya que está detrás de la mayor y por ello la Tierra sólo recibe la intensidad de la luz de la estrella de radio R_1. En la posición **III** la estrella de radio menor está por delante de la mayor, y la luz que se recibe en la Tierra procede de esta estrella de menor tamaño y de la parte visible de la estrella de mayor tamaño. Esto explica la aparición de los mínimos.

De la figura 1 se observa que los mínimos se repiten cada 3 días, por tanto ese es el periodo del movimiento orbital

$$T = 3 \text{ dias} = 3 \text{ dias} \cdot 86400 \frac{\text{s}}{\text{día}} = 2{,}6.10^5 \text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}6.10^5} = 2{,}4.10^{-5} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

De forma aproximada se puede calcular la radiación de una estrella admitiendo que es la radiación de un cuerpo negro en forma de disco y con radio igual al de la estrella. Por consiguiente la potencia recibida de la estrella es proporcional a AT^4 en la que A es el área del disco y T su temperatura

1.2.- Utilice la figura 1 para determinar los cocientes R_1/R_2 y T_1/T_2

Para el caso **I** $\quad I_o = k\pi\left(R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4\right)$

Para el caso **II** $\quad I_G = k\pi \ R_1^2T_1^4$

Para el caso **III** $\quad I_g = k\pi\left(R_2^2T_2^4 + R_1^2T_1^4 - R_2^2T_1^4\right)$

$$\frac{R_1^2T_1^4}{R_1^2T_1^4+R_2^2T_2^4}=0{,}90 \qquad ; \qquad \frac{R_2^2T_2^4+R_1^2T_1^4-R_2^2T_1^4}{R_1^2T_1^4+R_2^2T_2^4}=0{,}63$$

En las anteriores ecuaciones dividimos los numeradores y denominadores por $R_2^2T_2^4$ y a $\frac{R_1^2}{R_2^2}=A$ y $\frac{T_1^4}{T_2^4}=B$

$$\frac{\frac{R_1^2T_1^4}{R_2^2T_2^4}}{\frac{R_1^2T_1^4+R_2^2T_2^4}{R_2^2T_2^4}}=\frac{AB}{AB+1}=0{,}90 \quad ; \quad \frac{\frac{R_2^2T_2^4+R_1^2T_1^4-R_2^2T_1^4}{R_2^2T_2^4}}{\frac{R_1^2T_1^4+R_2^2T_2^4}{R_2^2T_2^4}}=\frac{1+AB-B}{AB+1}=0{,}63$$

Resolviendo el sistema

$$AB=0{,}90AB+0{,}90 \quad \Rightarrow \quad AB=9$$

$$\frac{1+9-B}{9+1}=0{,}63 \quad \Rightarrow 10-B=6{,}3 \quad \Rightarrow \quad B=3{,}7 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{9}{3{,}7}$$

$$\frac{R_1}{R_2}=\sqrt{A}=\sqrt{\frac{9}{3{,}7}}=1{,}56 \quad ; \quad \frac{T_1}{T_2}=\sqrt[4]{3{,}7}=1{,}39$$

Espectometría de sistemas binarios

En esta sección se deben calcular propiedades astronómicas de un sistema binario utilizando para ello medidas espectrométricas del sistema. Los átomos emiten o absorben radiación de determinadas longitudes de onda. Por ello el espectro de absorción de una estrella contiene líneas oscuras de absorción producidas por los átomos que se encuentran en su atmósfera.

La línea D_1 del espectro del sodio posee una longitud de onda de 5895,9 $\overset{o}{A}$ (10 $\overset{o}{A}$=1 nm). Si examinamos en el espectro de una estrella del sistema binario, la línea D_1, resulta que esta línea está afectada de un corrimiento debido al efecto Doppler y que lo produce por el hecho de que la estrella se está moviendo respecto de nosotros.

Cada una de las estrellas del sistema binario se desplaza con distinta velocidad respecto de nosotros y por ello es desplazamiento Doppler será diferente de una a otra estrella.

La medida del efecto Doppler requiere medidas muy precisas ya que la velocidad de las estrellas es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz.
En este problema se considera que la velocidad del centro de masas del sistema binario es mucho más pequeña que la velocidad orbital de las estrellas. De ello se deduce que el corrimiento Doppler se debe únicamente a la velocidad orbital de las estrellas.
La tabla 1 son las medidas de las longitudes de onda observadas enla Tierra para cada una de las estrellas.

t/días	**0,3**	**0,6**	**0,9**	**1,2**	**1,5**	**1,8**	**2,1**	**2,4**
$\lambda_1/\mathring{A}$	**5897,5**	**5897,7**	**5897,2**	**5896,2**	**5895,1**	**5894,3**	**5894,1**	**5894,6**
$\lambda_2/\mathring{A}$	**5893,1**	**5892,8**	**5893,7**	**5896,2**	**5897,3**	**5898,7**	**5899,0**	**5898,1**

t/días	**2,7**	**3,0**	**3,3**	**3,6**	**3,9**	**4,2**	**4,5**	**4,8**
$\lambda_1/\mathring{A}$	**5895,6**	**5896,7**	**5897,3**	**5897,7**	**5897,2**	**5896,2**	**5895,0**	**5894,3**
$\lambda_2/\mathring{A}$	**5896,4**	**5894,5**	**5893,1**	**5892,8**	**5893,7**	**5896,2**	**5897,4**	**5898,7**

Nota.- No es necesario hacer una gráfica de los datos de esta tabla

2. Utilizar esta tabla

2.1.- Encontrar las velocidades orbitales de las estrellas v_1 y v_2 . No considerar efectos relativista .Velocidad de la luz, $c = 3{,}0.10^8$ m/s

La ecuación matemática del efecto Doppler es:

$$\lambda' = \lambda\frac{c \pm v}{c} = \lambda\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - 1\right)c = \pm v$$

Podemos escoger el valor menor o el mayor de la tabla anterior.
Para la estrella de radio R_1.

$$\left(\frac{5894{,}1}{5895{,}9} - 1\right)c = -v \quad \Rightarrow \quad v = \left(1 - \frac{5894{,}1}{5895{,}9}\right)\cdot 3.10^8 = 91589 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 9{,}2.10^4\ \frac{m}{s}$$

$$\left(\frac{5897{,}7}{5895{,}9} - 1\right)c = +v \quad \Rightarrow \quad v = \left(\frac{5894{,}1}{5895{,}9} - 1\right)\cdot 3.10^8 = 91589 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 9{,}2.10^4\ \frac{m}{s}$$

Para la estrella de radio R_2.

$$\left(\frac{5892{,}8}{5895{,}9} - 1\right)c = -v \quad \Rightarrow \quad v = \left(1 - \frac{5892{,}8}{5895{,}9}\right)3.10^8 = 157737 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 1{,}6.10^5\ \frac{m}{s}$$

$$\left(\frac{5899{,}0}{5895{,}9}-1\right)c=+\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}=\left(\frac{5899{,}0}{5895{,}9}-1\right)\cdot 3.10^{8}=157737 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_1=1{,}6.105\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2.2.-Encuentre el cociente de las masas $\frac{m_1}{m_2}$.

Consideramos un sistema de referencia ligado al centro de masas , en este caso la v_{CM} =0

$$\mathrm{v}_{CM}=\frac{m_1\mathrm{v}_1+m_2\mathrm{v}_2}{m_1+m_2} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{m_1}{m_2}\right|=\frac{\mathrm{v}_2}{\mathrm{v}_1}=\frac{1{,}6.10^5}{9{,}2.10^4}=1{,}7$$

2.3.- Sean r_1 y r_2 las distancias de cada una de las estrellas al centro de masas común, determinar r_1 y r_2.

La velocidad angular es la misma para cada estrella ,pero la lineal depende de su distancia al centro de masa

$$\mathrm{v}_1=\omega\ r_1 \quad \Rightarrow \quad r_1=\frac{\mathrm{v}_1}{\omega}=\frac{9{,}2.10^4}{2{,}4.10^{-5}}=3{,}8.10^9\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{v}_2=\omega\ r_2 \quad \Rightarrow \quad r_2=\frac{\mathrm{v}_2}{\omega}=\frac{1{,}6.10^5}{2{,}4.10^{-5}}=6{,}7.10^9\,\mathrm{m}$$

2.4.-Sea r la distancia entre las estrellas. Encontrar el valor de r.

La distancia entre las estrellas es la suma de sus distancias al centro de masas

$$r=r_1+r_2=3{,}8.10^9+6{,}7.10^9=1{,}1.10^{10}\,\mathrm{m}$$

3.- La fuerza de gravitación es la única fuerza que actúa entre las estrellas.

3.1.- Determinar la masa de cada una de las estrellas con una cifra significativa. Constante de gravitación Universal $G=6{,}7.10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$

La fuerza de atracción gravitatoria es precisamente la fuerza centrípeta que cada estrella necesita para girar alrededor del centro de masas.

$$G\frac{m_1m_2}{r^2}=m_1\omega^2r_1 \Rightarrow m_2=\frac{\omega^2r_1r^2}{G}=\frac{\left(2{,}4.10^{-5}\right)^2\cdot 3{,}8.10^9\cdot\left(1{,}1.10^{10}\right)^2}{6{,}7.10^{-11}}=4.10^{30}\,\mathrm{kg}$$

$$G\frac{m_1m_2}{r^2}=m_2\omega^2r_2 \Rightarrow m_1=\frac{\omega^2r_2r^2}{G}=\frac{\left(2{,}4.10^{-5}\right)^2\cdot 6{,}7.10^9\cdot\left(1{,}1.10^{10}\right)^2}{6{,}7.10^{-11}}=7.10^{30}\,\mathrm{kg}$$

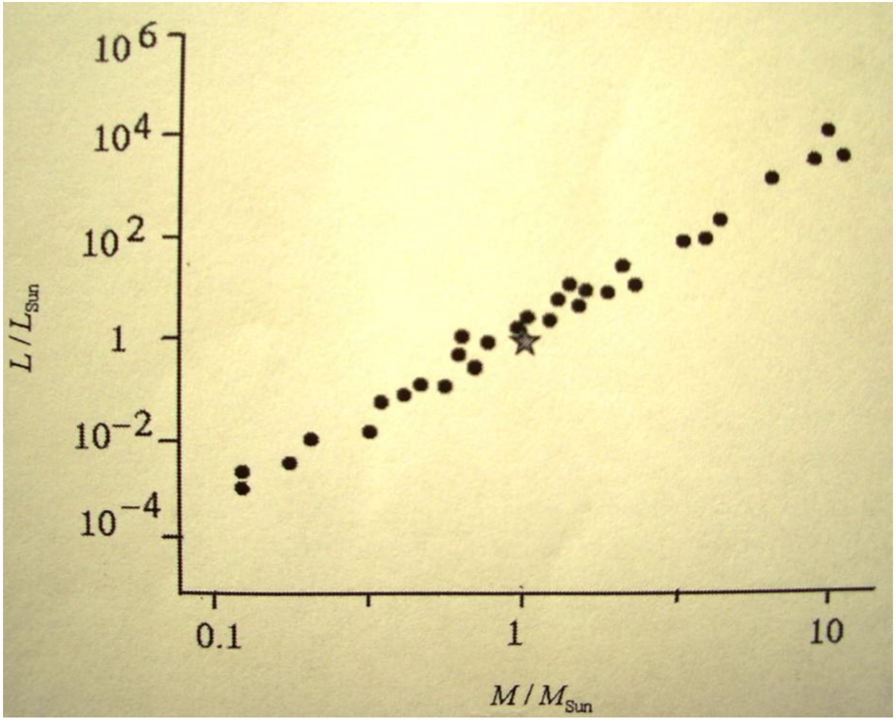
Características generales de las estrellas

4.- La mayoría de las estrellas generan energía mediante el mismo mecanismo. Existe una relación empírica entre su masa, M, y su luminosidad, L, la cual es la potencia radiante total de la estrella; esta relación se puede expresar en la forma

$$\frac{L}{L_{Sol}} = \left(\frac{M}{M_{Sol}}\right)^{\alpha}$$

$M_{Sol}=2.10^{30}$ ***kg*** ; $L_{Sol}=3{,}9.10^{26}$ ***W***

La relación se indica en la gráfica log-log de la figura inferior



La estrella que aparece en el la gráfica representa al Sol

4.1.- Encontrar α con una cifra significativa.

Teniendo en cuenta que $\log\frac{L}{L_{sol}} = \alpha \log\frac{M}{M_{Sol}}$, la pendiente de la recta anterior nos da el valor de α.

$$\text{tag}\beta = \frac{\log 10^4 - \log 1}{\log 10 - \log 1} = 4 = \alpha$$

4.2.-Sean L_1 y L_2 las luminosidades respectivas de cada estrella del sistema binario. Encontrar los valores de L_1 y L_2.

$$L_1 = L_{Sol}\left(\frac{M_1}{M_{Sol}}\right)^4 = 3{,}9.10^{26}\left(\frac{7.10^{30}}{2.10^{30}}\right)^4 = 6.10^{28}\ \text{W}$$

$$L_2 = L_{Sol}\left(\frac{M_2}{M_{Sol}}\right)^4 = 3{,}9.10^{26}\left(\frac{4.10^{30}}{2.10^{30}}\right)^4 = 6.10^{27}\ \text{W}$$

4.3.-Calcular la distancia d, desde la estrella a nosotros expresando el resultado en años luz. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año terrestre.

El sistema binario radia al espacio. En la Tierra se recibe I_o que es la potencia por unidad de superficie .La luminosidad total del sistema es L_1+L_2 y esa potencia está "contenida" en una esfera de radio d.

$$I_o = \frac{L_1 + L_2}{4\pi\ d^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi\ I_o}} = \sqrt{\frac{6.10^{28} + 6.10^{27}}{4\pi\ 4{,}8.10^{-9}}} = 1{,}0.10^{18}\,\text{m}$$

$$1 \text{ año luz } = 3.10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 365\ \text{día}\cdot 86400\,\frac{\text{s}}{\text{día}} = 9{,}5.10^{15}\,\text{m}$$

$$d = \frac{1{,}0.10^{18}\,\text{m}}{9{,}5.10^{15}\,\frac{\text{m}}{\text{año luz}}} \approx 100\ \text{años luz}$$

4.4.- ¿Cuál es la máxima distancia angular, θ, entre las estrellas a partir de nuestro punto de observación?

Desde nuestro punto de vista la máxima distancia angular es cuando las estrellas disten r_1 y r_2 del centro de masas, esto es, cuando nosotros "veamos" que entre ellas hay una distancia r =$1{,}1.10^{10}$ m

$$\text{tag}\theta \approx \theta = \frac{r}{d} = \frac{1{,}1.10^{10}}{1.10^{18}} = 1.10^{-8}\,\text{rad}$$

4.5.-¿Cuál es la menor apertura de un telescopio óptico, D, que pueda separar estas dos estrellas?

Utilizando el criterio de Lord Rayleigh

$$\theta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D} \Rightarrow D = \frac{1{,}22\lambda}{\theta} = 1{,}22\,\frac{\lambda d}{r}$$