

**PROBLEMAS DE**  
**LAS OLIMPIADAS**  
**INTERNACIONALES**  
**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

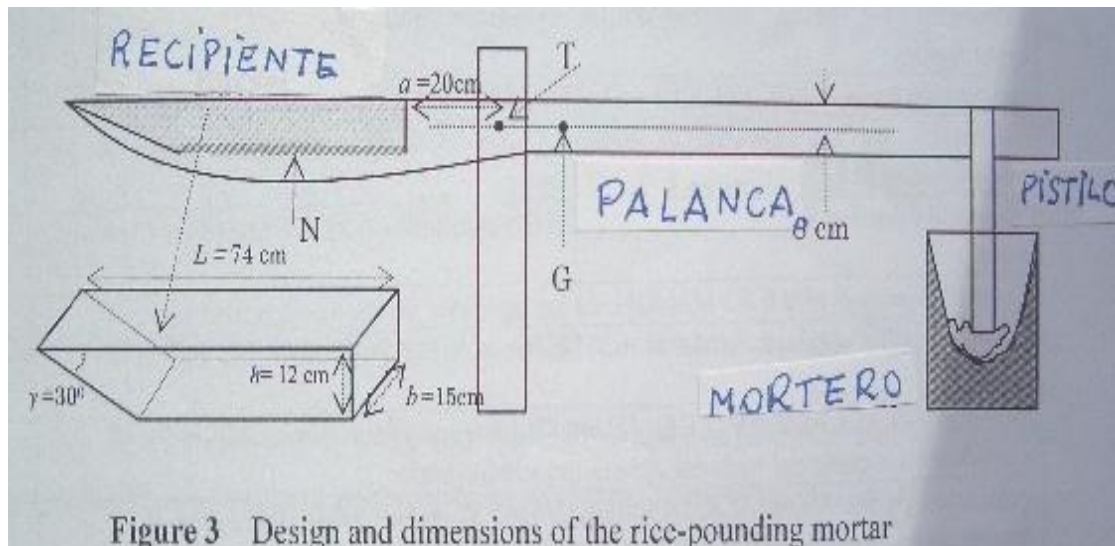
Madrid 2008

XXXIX OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. VIETNAM. 2008

PROBLEMA 1

**MORTERO DE ARROZ IMPULSADO POR AGUA**

*El esquema del mortero puede verse en la figura 3.*



**1.-Diseño y operación**

*El mortero básicamente es de madera y dentro de él se sitúa el arroz*

*La palanca, es un tronco de árbol. Un extremo del mismo es más ancho que el otro. En el extremo menos ancho existe un pistilo sujeto a la palanca y perpendicular a ella, su longitud está diseñada para que cuando la palanca esté en posición horizontal el pistilo esté en contacto con el arroz del recipiente (fig.3).*

*En el extremo más ancho de la palanca se excava un receptáculo que se denomina recipiente. La forma de este recipiente es crucial para las operaciones del mortero de arroz.*

**2.-Modos de operación**

*El mortero opera de dos maneras.*

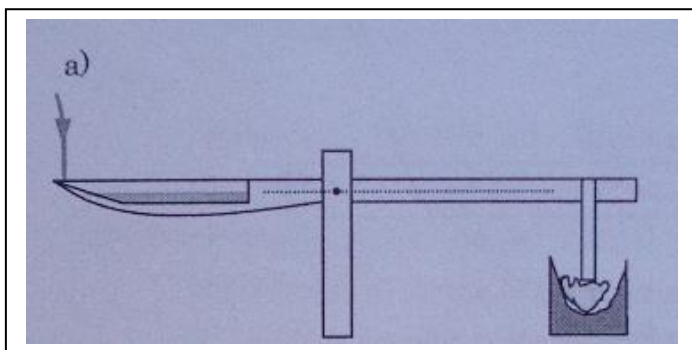
*a) Modo de trabajo De esta manera el mortero efectúa ciclos que están representados en la figura 2(a,b,c,d,e,f) . La molienda del arroz proviene del trabajo que se transfiere al pistilo durante la etapa f) de la figura 2. Si por alguna razón el pistilo nunca alcanza el arroz decimos que el mortero no está trabajando*

*La molienda del arroz proviene del trabajo que se transfiere al pistilo durante la etapa f) de la figura 2. Si por alguna razón el pistilo nunca alcanza el arroz decimos que el mortero no está trabajando*

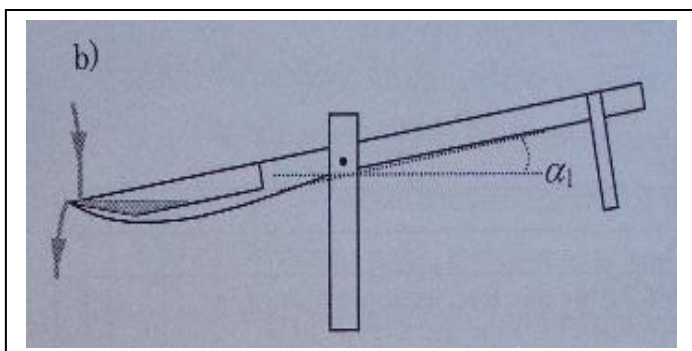
*b) Modo de reposo con la palanca elevada.*

*Durante la etapa c) del ciclo de operación de la figura 2, a medida que el ángulo  $\alpha$  aumenta, la cantidad de agua en el recipiente disminuye. En un determinado momento la cantidad de agua en el recipiente equilibra el peso de la palanca. Se designa ese ángulo como  $\beta$ . Si la palanca se mantiene con ese ángulo  $\beta$  y su velocidad angular es cero, la palanca permanece en esa posición indefinidamente. Este es el modo de reposo con la palanca levantada. La estabilidad de esta posición depende del caudal de agua  $\Phi$  que llega al recipiente. Si  $\Phi$  excede algún valor  $\Phi_2$  el modo de reposo es estable y el mortero está en el modo de no trabajo. En otras palabras  $\Phi_2$  es el caudal mínimo para que el mortero no trabaje.*

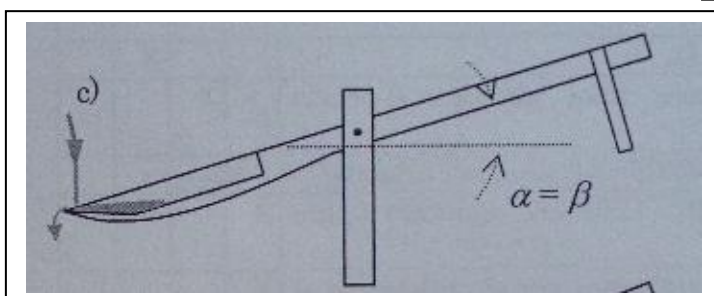
**CICLO DE OPERACIONES DE UN MORTERO DE ARROZ IMPULSADO POR AGUA ( fig 2 , a,b,c,d,e,f).**



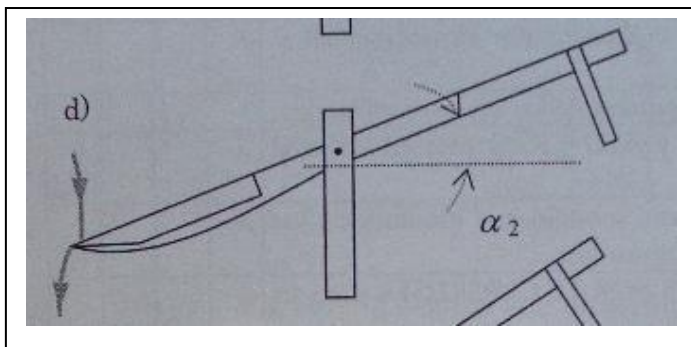
*a) Al principio no hay agua en el recipiente y el pistilo reposa en el interior del mortero. El agua comienza a fluir al recipiente de modo lento y constante, sin embargo y durante algún tiempo la palanca permanece en posición horizontal*



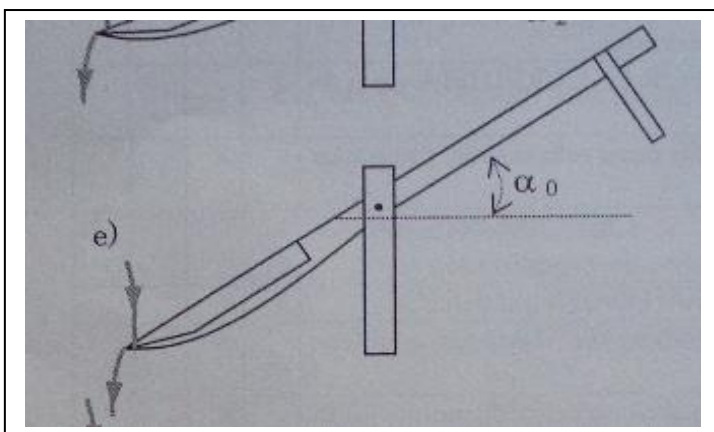
*b) En algún momento la cantidad de agua en el recipiente es suficiente para elevar la palanca. Debido a esta elevación el agua se desplaza hacia un extremo del recipiente y esto determina que la elevación de la palanca se produzca con mayor rapidez. El agua comienza a fluir fuera del recipiente cuando  $\alpha = \alpha_1$*



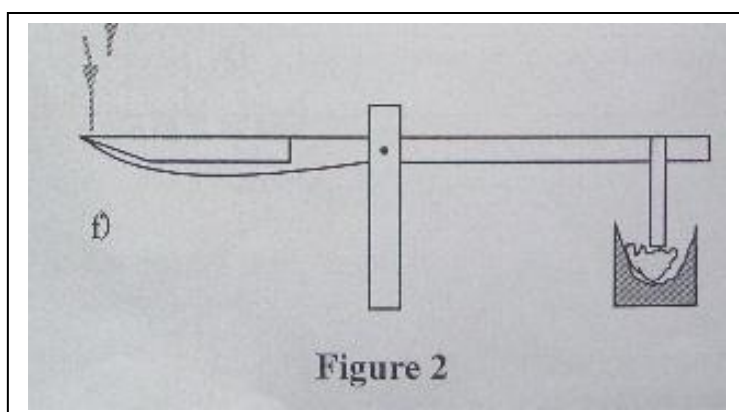
*c) A medida que el ángulo crece, el agua fluye hacia fuera del recipiente. Para un ángulo de elevación  $\alpha = \beta$  el momento de las fuerzas es cero.*



*d) El ángulo  $\alpha$  continua aumentando y el agua continua fluyendo fuera del recipiente hasta que llega un momento que en el recipiente no hay agua.*



*e) Debido a la inercia el ángulo  $\alpha$  aumenta, pero debido a la forma del recipiente el agua que llega a él sale de inmediato. Este movimiento continúa hasta que el ángulo  $\alpha$  es igual al valor máximo  $\alpha_0$ .*



*f) Cuando no hay agua en el recipiente la palanca vuelve a su posición horizontal y de este modo el pistilo golpea al arroz que está en el mortero. El ciclo comienza de nuevo.*

*Un mortero de agua tiene los siguientes dimensiones:*

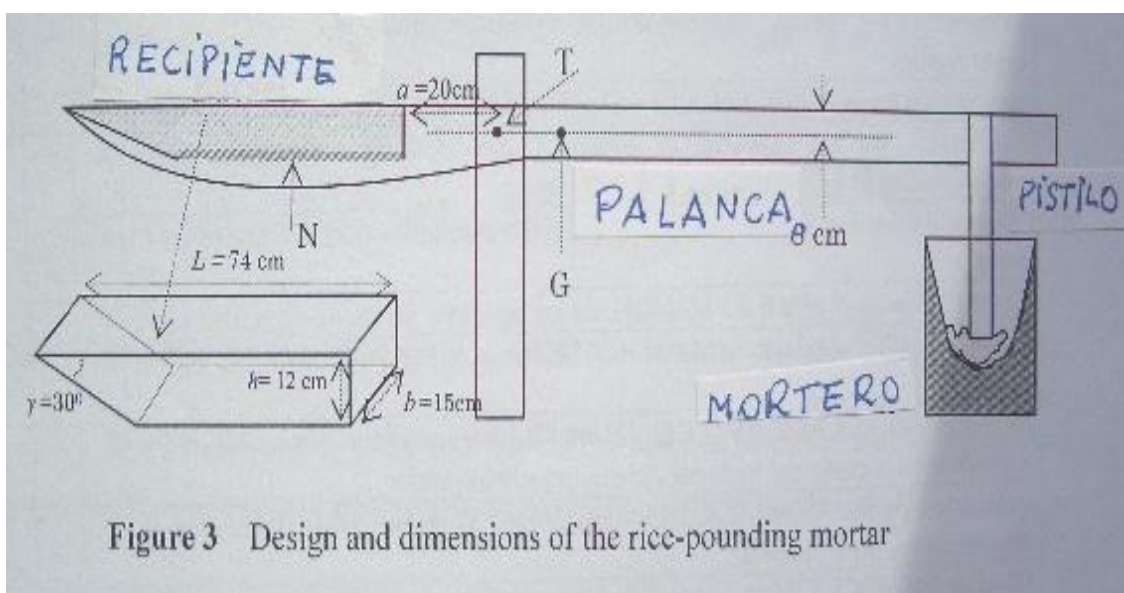
*La masa de la palanca es 30 kg, incluido el pistilo y sin agua en el recipiente,  $M= 30$  kg*

*El centro de masas de la palanca es  $G$ . La palanca gira alrededor del eje  $T$ .*

*El momento de inercia de la palanca alrededor del eje  $T$  es  $I= 12 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Cuando hay agua en el recipiente la masa de ésta se designa con  $m$  y el centro de masas del agua se designa con  $N$ .*

*El ángulo que forma el la palanca con la horizontal se designa con  $\alpha$ . Las medidas están reflejadas en la figura 3.*

*Desprecie la fricción en el eje de rotación y la fuerza debido al agua que cae en el recipiente. La superficie del agua siempre es horizontal.*

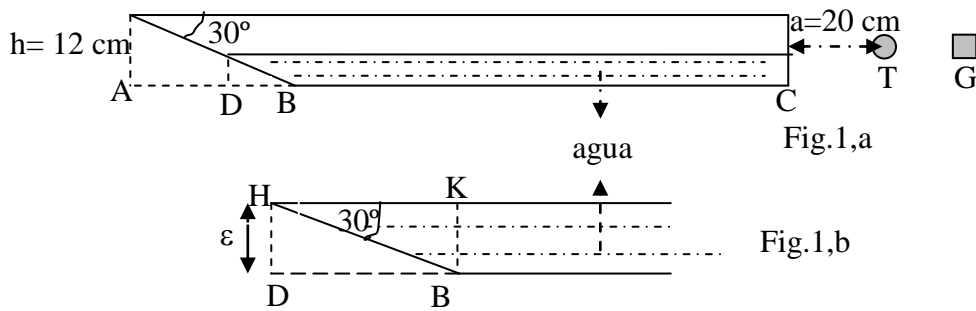


### 1.- La estructura del mortero.

*Al principio el recipiente está vacío y la palanca horizontal. A continuación el agua fluye en el recipiente hasta que la palanca comienza a girar. La cantidad de agua que hay en el recipiente es  $m= 1,0$  kg.*

*1.1.-Calcular la distancia desde el centro de masas  $G$  al eje de rotación  $T$ . Se sabe que la línea  $GT$  es horizontal cuando el recipiente está vacío.*

*a) Al principio no hay agua en el recipiente y el pistilo reposa en el interior del mortero. El agua comienza a fluir al recipiente de modo lento y constante, sin embargo y durante algún tiempo la palanca permanece en posición horizontal*



En la figura 1a se ha esquematizado el recipiente con agua estando la palanca horizontal, la longitud del recipiente es  $AC = L = 74$  cm.

$$\operatorname{tag} 60^\circ = \frac{AB}{12} \Rightarrow AB = 20,78 \text{ cm} \Rightarrow BC = 74 - 20,78 = 53,22 \text{ cm}$$

La altura del agua en el recipiente  $\varepsilon$ , se calcula a partir del volumen de agua que es  $V = 1000 \text{ cm}^3$ .

$$1000 = BC \cdot \varepsilon \cdot b + \frac{BD \cdot e}{2} b = BC \cdot \varepsilon \cdot b + \frac{\varepsilon^2 \cdot b}{2 \cdot \operatorname{tag} 30} = 53,22 \cdot \varepsilon \cdot 15 + \frac{15 \cdot \varepsilon^2}{2 \cdot 0,577} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 \varepsilon^2 + 798,3 \varepsilon - 1000 = 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{-798,3 \pm \sqrt{798,3^2 + 4 \cdot 13 \cdot 1000}}{26} = \frac{-798,3 + 830,2}{26}$$

$$\varepsilon = 1,227 \text{ cm}$$

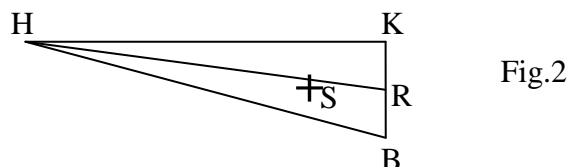
La masa de agua correspondiente a la sección rectangular de base BC y altura  $\alpha$  es:

$$M_R = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot BC \cdot \varepsilon \cdot b = 1 \cdot 53,22 \cdot 1,227 \cdot 15 = 979,5 \text{ g}$$

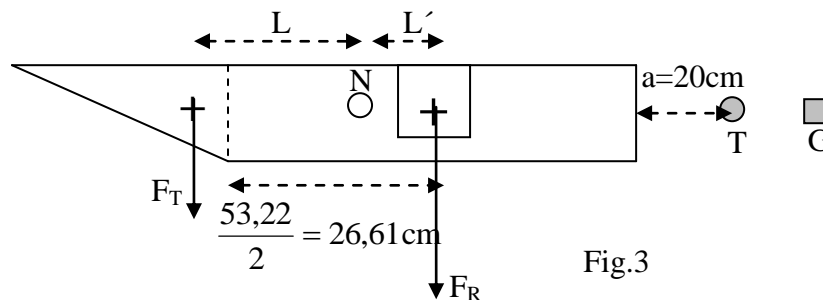
La masa correspondiente a la sección triangular de base DB y altura  $\alpha$  es:

$$M_T = 1000 - 979,5 = 20,5 \text{ g}$$

El centro de masas del agua cuya sección es el triángulo HKB es S( fig.2).



$$HR = \sqrt{HB^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\operatorname{sen} 30}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = 2,37 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1}{3} HR = SR = 0,79 \text{ cm}$$



Aproximadamente la distancia  $L+L'=26,61+0,79=27,4$  cm. N representa el centro de masas del agua contenida en el recipiente y en ese lugar tomamos un sistema de referencia, por lo que su coordenada X será nula y las distancias a su izquierda negativas y a su derecha positivas.  $F_T=20,5 \cdot 10^{-3} \cdot g$  y  $F_R=979,5 \cdot 10^{-3} \cdot g$

$$-F_T \cdot L + F_R \cdot L' = 0 \Rightarrow 20,5 \cdot 10^{-3} g(27,4 - L') + 975,9 \cdot 10^{-3} g \cdot L' \Rightarrow L' = 0,56 \text{ cm}$$

$$NT = 26,61 + 0,56 + 20 = 47,17 \text{ cm}$$

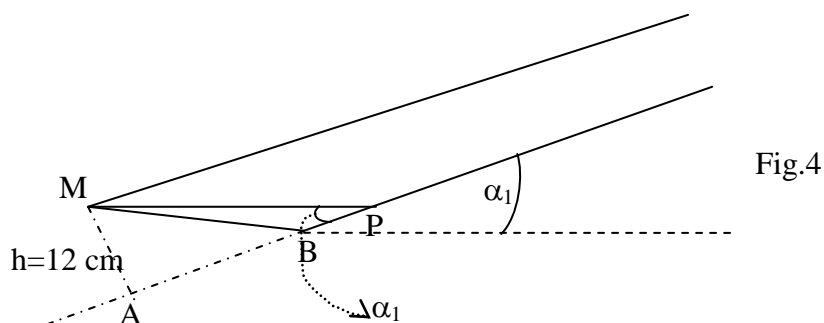
Tomando momentos con respecto a T

$$1 \cdot NT = 30 \cdot GT \Rightarrow GT = \frac{47,17}{30} = 1,57 \text{ cm}$$

**1.2.-El agua comienza a derramarse del recipiente cuando el ángulo entre la palanca y el eje horizontal alcanza el valor  $\alpha_1$ . El recipiente se vacía completamente cuando el ángulo es  $\alpha_2$ . Determinar  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .**

*b) En algún momento la cantidad de agua en el recipiente es suficiente para elevar la palanca. Debido a esta elevación el agua se desplaza hacia un extremo del recipiente y esto determina que la elevación de la palanca se produzca con mayor rapidez.*

*El agua comienza a fluir fuera del recipiente cuando  $\alpha = \alpha_1$*



La sección del agua en el recipiente corresponde al triángulo MPB cuyo ángulo en P es  $\alpha_1$ . El volumen de agua es  $1000 \text{ cm}^3$ . El área del triángulo MPB es:  $\frac{BP \cdot h}{2}$  y el

$$\text{volumen de agua: } V = 1000 = \frac{BP \cdot h}{2} \cdot b \Rightarrow BP = \frac{2000}{hb} = \frac{2000}{12 \cdot 15} = 11,11 \text{ cm}$$

$$AB = h \cdot \tan 60 = 20,78 \text{ cm} \Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{h}{AP} = \frac{h}{AB + BP} = \frac{12}{20,78 + 11,11} = 0,376 \Rightarrow$$

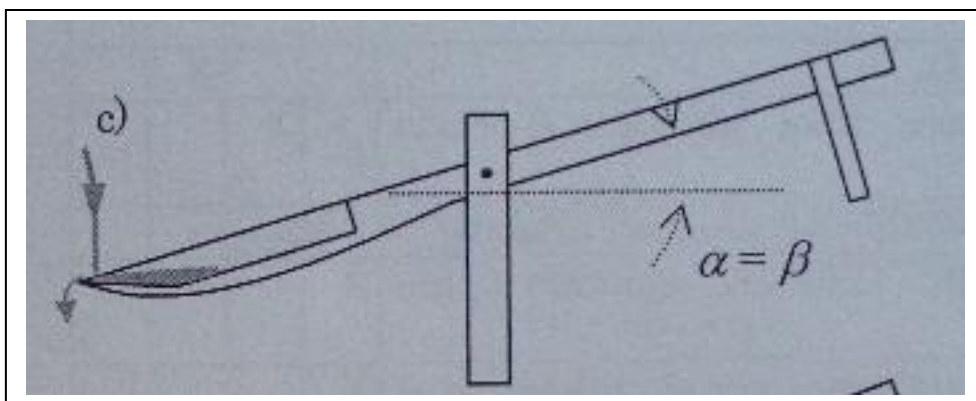
$$\alpha_1 = 20,6^\circ$$

A medida que el agua se derrama el punto P se acerca al B y cuando se haya derramado toda el agua, P coincide con B, por tanto:

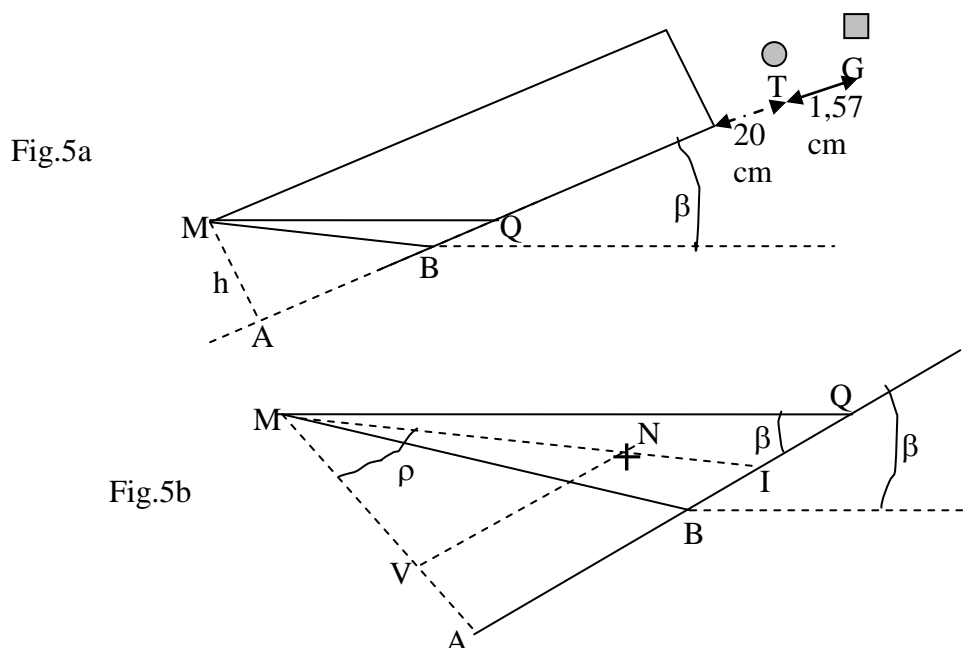
$$\tan \alpha_2 = \frac{h}{AB} = \frac{12}{20,78} \Rightarrow \alpha_2 = 30^\circ$$

**1.3.-El momento total  $\mu(\alpha)$  relativo al eje que pasa por T tiene su origen en el peso de la palanca y en el del agua contenida en el recipiente. Cuando  $\alpha=\beta$  resulta que el momento total  $\mu(\alpha)=0$ . Calcular  $\beta$  y la masa m de agua que en ese momento contiene el recipiente.**

**c) A medida que el ángulo crece, el agua fluye hacia fuera del recipiente. Para un ángulo de elevación  $\alpha=\beta$  el momento de las fuerzas es cero.**



De la figura superior se observa que llega agua al recipiente y parte de ella se derrama, llega un momento en el que los momentos del peso del agua y del peso de la palanca se hacen iguales. La figura 5a es un esquema del nivel del agua y de la posición de la palanca. La figura 5b es una ampliación de la sección triangular del agua.



En la fig.5b se ha trazado la mediana MI en un punto de la misma, en el N, está el centro de masas del triángulo MQB, siendo  $MN = \frac{2}{3} MI$ . El volumen de agua que existe en el recipiente lo designamos con V y la masa por m.

$$V = \frac{BQ \cdot h}{2} b = \frac{BQ \cdot 12 \cdot 15}{2} = 90 \cdot BQ \text{ cm}^3 \Rightarrow m = 90 \cdot BQ \text{ cm}^3 \cdot 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 90 \cdot BQ \text{ g}$$

De la figura 5b se deduce:

$$\text{sen } \rho = \frac{VN}{MN} = \frac{VN}{\frac{2}{3} MI} = \frac{AI}{MI} \Rightarrow VN = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \left( AB + \frac{BQ}{2} \right) \Rightarrow VN = \frac{2}{3} \left( 20,78 + \frac{BQ}{2} \right)$$

La distancia TN vale

$$TN = 74 + 20 - VN = 94 - \frac{2}{3} \left( 20,78 + \frac{BQ}{2} \right) = 80,15 - \frac{1}{3} BQ$$

En N actúa el peso del agua y en G el peso de la palanca. Como el momento total es cero:

$$mg \cdot TN = M \cdot TG \Rightarrow (90 \cdot BQ \cdot 10^{-3}) \cdot g \cdot \left(80,15 - \frac{1}{3} BQ\right) = 30 \cdot g \cdot 1,57 \Rightarrow$$

$$7,21 \cdot BQ - 0,030 \cdot BQ^2 = 47,1 \Rightarrow BQ = \frac{7,21 \pm \sqrt{7,21^2 - 4 \cdot 0,03 \cdot 47,1}}{0,06} = \frac{7,21 - 6,81}{0,06}$$

$$BQ = 6,67 \text{ cm}$$

$$\text{tag } \beta = \frac{h}{AQ} = \frac{h}{AB + BQ} = \frac{12}{20,78 + 6,67} \Rightarrow \beta = 23,6^\circ$$

$$m = 90 \cdot BQ = 90 \cdot 6,67 = 600 \text{ g}$$

## 2.-Parámetros del modo de trabajo

*El agua fluye dentro del recipiente con una velocidad de flujo  $\Phi$  que es constante y pequeña. La cantidad de agua que llega al recipiente cuando la palanca se encuentra en movimiento es despreciable. En esta parte del problema se desprecia el cambio en el momento de inercia durante el ciclo de trabajo.*

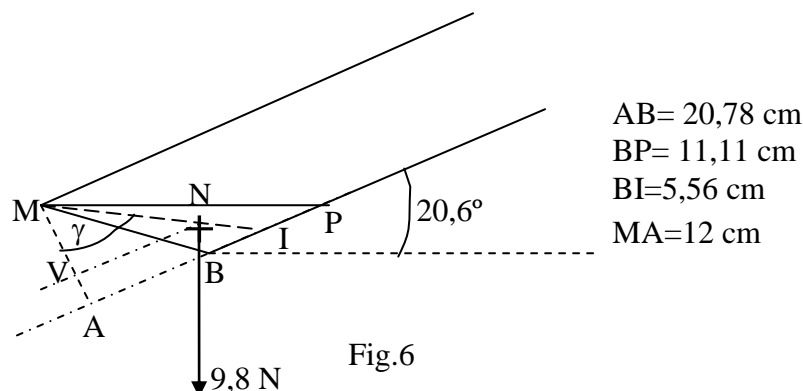
**2.1.- Haga un esquema del momento  $\mu(\alpha)$  en función del ángulo  $\alpha$  durante un ciclo. Calcule los valores numéricos de  $\mu(\alpha)$  para los ángulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha=0$ .**

Cuando  $\alpha=0$ , el peso de la palanca crea un momento con respecto al eje que pasa por T de valor

$$\mu(\alpha = 0) = 30 \cdot 9,8 \cdot 1,57 \cdot 10^{-2} = 4,62 \text{ N m}$$

En esta situación el pistilo está en el mortero sobre el arroz. A medida que llega agua al recipiente se crea un momento de signo contrario al anterior, este momento crece a medida que hay más agua en el recipiente, y llegará un momento en que ambos momentos se igualen y a partir de ahí el momento creado por el agua es superior al momento creado por el peso de la palanca. Al mismo tiempo la palanca comienza a elevarse. El momento resultante será máximo cuando haya la máxima cantidad de agua en el recipiente lo cual ocurre cuando  $m= 1 \text{ kg}$  y en ese momento el ángulo que forma la palanca con la horizontal es  $\alpha_1= 20,6^\circ$ .

Calculamos el momento total cuando  $\alpha_1= 20,6^\circ$ . Supondremos que el momento creado por la peso de la palanca es negativo y el creado por el agua del recipiente positivo.



La figura 6 es la misma que la figura 4, aunque se ha añadido valores numéricos hallados en el apartado 1.2. El procedimiento para calcular el momento originado por el peso de agua cuya masa es 1 kg es el mismo que se ha utilizado en el apartado 1.3

$$MI = \sqrt{h^2 + (AB + BI)^2} = \sqrt{12^2 + (20,78 + 5,56)^2} = 28,94 \text{ cm}$$

$$\text{sen } \gamma = \frac{VN}{\frac{2}{3}MI} = \frac{AI}{MI} \Rightarrow VN = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}(AB + BI) = \frac{2}{3}(20,78 + 5,56) = 17,56 \text{ cm}$$

$$TN = 74 + 20 - VN = 94 - 17,56 = 76,44 \text{ cm}$$

$$\text{Momento creado por el agua} = 9,8 \cdot 76,44 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 20,6^\circ = +7,01 \text{ N m}$$

$$\text{Momento resultante máximo: } \mu(20,6^\circ) = 7,01 - 4,62 \cdot \cos 30^\circ = +2,69 \text{ N m}$$

A partir de este momento la cantidad de agua disminuye en el contenedor y el momento total disminuye, resultando que cuando  $\alpha = \beta = 23,6^\circ$  es nulo y la cantidad de agua que contiene el contenedor es 600 g.

A continuación, cuando se alcanza  $\alpha = 30^\circ$  ya no hay agua en el contenedor y el momento total se deberá al peso de la palanca

$$\mu(30^\circ) = -30 \cdot 9,8 \cdot 1,57 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 30^\circ = -4,00 \text{ N m}$$

Después la palanca alcanza un ángulo máximo que designamos con  $\alpha_0 > 30^\circ$  y cuyo valor desconocemos por ahora, el momento valdrá

$$\mu(\alpha_0) = 30 \cdot 9,8 \cdot 1,57 \cdot 10^{-2} \cdot \cos \alpha_0 = -4,62 \cos \alpha_0$$

Luego la palanca desciende hasta la posición horizontal para la que el  $\alpha = 0$  y el momento vale -4,6 N m.

Dibujamos la gráfica con los momentos calculados y unimos los puntos mediante curvas suaves.

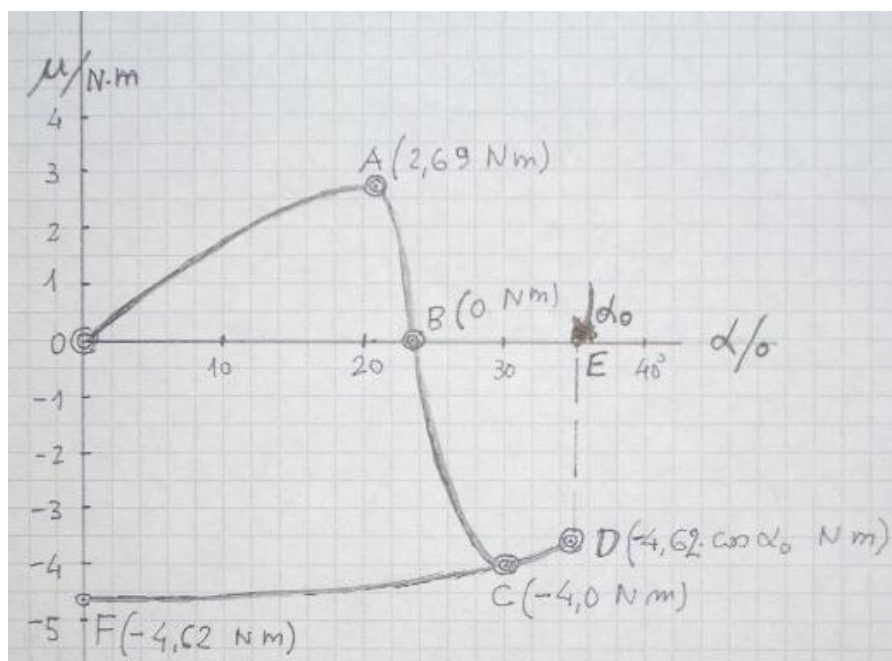


Fig.7

**2.2.- A partir de la gráfica del apartado 2.1, dar la interpretación geométrica de la energía total producida por  $\mu(\alpha)$  y del trabajo de molienda  $W_m$  que se transfiere desde el pistilo al arroz.**

Se define el trabajo realizado por una fuerza como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento. Si en unos ejes cartesianos representamos la fuerza ( con signo positivo o negativo ) en la dirección del desplazamiento en el eje de ordenadas frente al desplazamiento en el eje de abscisas , el área comprendida bajo la gráfica dibujada y el eje X mide el trabajo realizado . Si el área está por encima del eje X es positivo y si por debajo negativo.

Si en la expresión del trabajo se sustituye la fuerza por el momento y el desplazamiento lineal por el angular el área mide el trabajo que puede ser positivo o negativo.

Cuando la palanca forma un ángulo  $\alpha_0$  con la horizontal almacena energía potencial que se puede medir por la altura a la que se eleva su centro de masas G .Cuando la palanca vuelve a la posición horizontal esa energía potencial la transfiere al arroz. Y se emplea en la rotura de los granos y en algo de calor.

**2.3.- A partir de la gráfica de la figura 7 calcular  $\alpha_0$  Y  $W_m$  ( se supone que son despreciables las energías cinéticas del agua de entrada y de salida del recipiente). La gráfica se puede reemplazar por líneas rectas.**

El trabajo  $W_m$  viene medido por el área OEDF de la figura 7. Por otra parte tenemos que la energía potencial almacenada por la palanca cuando el ángulo es  $\alpha_0$  debe ser igual a

$W_m$ . En la figura 8 se ha hecho un esquema del centro de masas G en la posición horizontal y cuando forma un ángulo  $\alpha_o$ .

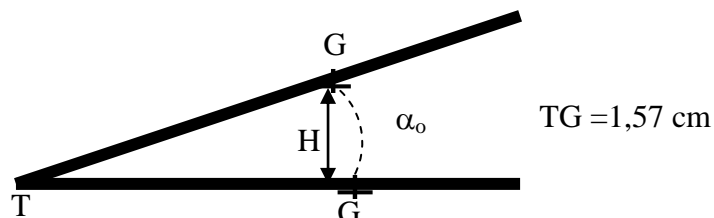


Fig.8

La altura H a la que se eleva el centro de masas G de la palanca vale:  $H = GT \cdot \text{sen } \alpha_o$ .

La energía potencial de la palanca

$$E \text{ potencial} = W_m = 30 \cdot 9,8 \cdot 1,57 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen } \alpha_o = 4,62 \cdot \text{sen } \alpha_o$$

Para calcular  $\alpha_o$  igualamos las áreas OAB y BEDC. Utilizando la aproximación de unir los puntos por líneas rectas. El área OAB es un triángulo

$$\text{Área OAB} = \frac{\left(23,6 \cdot \frac{3,14}{180}\right) \cdot 2,69}{2}$$

El área BEDC es la suma de un triángulo más un rectángulo.

$$\text{Área BEDC} = \frac{\left[(30 - 23,6) \cdot \frac{3,14}{180}\right] \cdot 4}{2} + \left[(\alpha_o - 30) \cdot \frac{3,14}{180}\right] \cdot 4$$

$$\frac{\left(23,6 \cdot \frac{3,14}{180}\right) \cdot 2,69}{2} = \frac{\left[(30 - 23,6) \cdot \frac{3,14}{180}\right] \cdot 4}{2} + \left[(\alpha_o - 30) \cdot \frac{3,14}{180}\right] \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{23,6 \cdot 2,69}{2\alpha} = 2 \cdot 6,4 + 4\alpha_o - 120 \Rightarrow \alpha_o = 34,7^\circ$$

$$W_m = 4,62 \cdot \text{sen } \alpha_o = 4,62 \cdot \text{sen } 34,7^\circ = 2,63 \text{ J}$$

### 3.- El modo reposo

#### 3.1.- Suponiendo que en el recipiente el agua siempre se desborda

##### 3.1.1.- Dibuje un esquema gráfico del momento $\mu$ en función del ángulo $\alpha$ en las proximidades de $\alpha=\beta$ ¿Qué tipo de equilibrio, para la posición $\alpha=\beta$ , tiene la palanca?

Si observamos la figura 7 puede verse que cuando  $\alpha < \beta$  el momento total es positivo y cuando  $\alpha > \beta$  es negativo. En otras palabras cuando  $\alpha < \beta$  el momento debido al peso del agua supera al momento del peso de la palanca y ese momento tiende a llevar a la palanca a la posición de equilibrio, cuando  $\alpha > \beta$  el momento del peso de la palanca supera al del agua y ese momento tiende a llevar a la palanca a su posición, por tanto, el equilibrio es estable.

La figura 8 indica cómo son los momentos antes y después de  $\beta$ . Dado que no existen cálculos numéricos los momentos se han dibujado con una curva arbitraria.

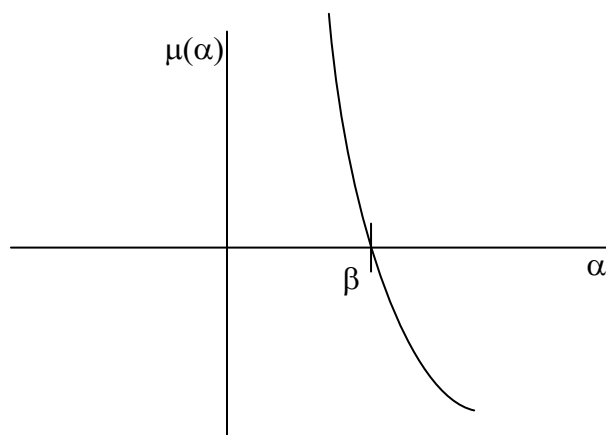


Fig.8

##### 3.1.2.- Encontrar la expresión que relaciona el momento $\mu(\alpha)$ como función de $\Delta\alpha$ cuando $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ y $\Delta\alpha$ es pequeño.

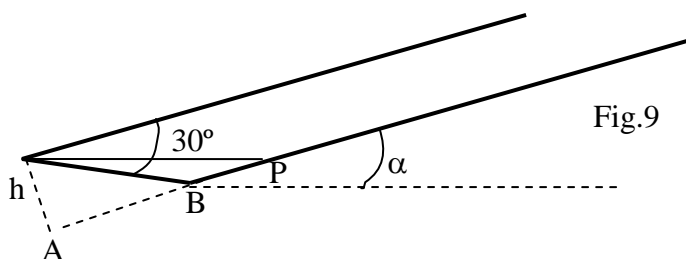


Fig.9

La masa de agua contenida en el recipiente es:

$$m = V \cdot \rho = \frac{BP \cdot h \cdot b \cdot \rho}{2}; \quad \text{tag } \alpha = \frac{h}{AP} = \frac{h}{AB + BP} \Rightarrow BP = \frac{h}{\text{tag } \alpha} - AB = \frac{h}{\text{tag } \alpha} - \frac{h}{\text{tag } 30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{h \cdot b \cdot \rho}{2} h \left( \frac{1}{\text{tag } \alpha} - \frac{1}{\text{tag } 30} \right) = \frac{\rho b h^2}{2} \left( \frac{1}{\text{tag } \alpha} - \frac{1}{\text{tag } 30} \right)$$

Aplicando la ecuación anterior para los ángulos  $\beta$  y  $\beta + \Delta\alpha$  y restando las masas para obtener la variación de masa al pasar de  $\beta$  a  $\beta + \Delta\alpha$

$$\Delta m = \frac{\rho b h^2}{2} \left( \frac{1}{\text{tag}(\beta + \Delta\alpha)} - \frac{1}{\text{tag } \beta} \right) = \frac{\rho b h^2}{2} \left( \frac{\text{tag } \beta - \text{tag}(\beta + \Delta\alpha)}{\text{tag } \beta \cdot \text{tag}(\beta + \Delta\alpha)} \right)$$

Utilizando la relación trigonométrica

$$\text{tag}(\beta + \Delta\alpha) = \frac{\text{tag } \beta + \text{tag } \Delta\alpha}{1 - \text{tag } \beta \cdot \text{tag } \Delta\alpha}$$

$$\Delta m = \frac{\rho b h^2}{2} = \frac{\rho b h^2}{2} \left[ \frac{\text{tag } \beta - \frac{\text{tag } \beta + \text{tag } \Delta\alpha}{1 - \text{tag } \beta \cdot \text{tag } \Delta\alpha}}{\text{tag } \beta \cdot \frac{\text{tag } \beta + \text{tag } \Delta\alpha}{1 - \text{tag } \beta \cdot \text{tag } \Delta\alpha}} \right] = \frac{\rho b h^2}{2} \left[ \frac{-\text{tag}^2 \beta \cdot \text{tag } \Delta\alpha - \text{tag } \Delta\alpha}{1 - \text{tag } \beta \cdot \text{tag } \Delta\alpha} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta m = -\frac{\rho b h^2}{2} \left[ \frac{\text{tag } \Delta\alpha (1 + \text{tag}^2 \beta)}{\text{tag } \beta (\text{tag } \beta + \text{tag } \Delta\alpha)} \right]$$

Hacemos las aproximaciones  $\text{tag } \beta + \text{tag } \Delta\alpha \approx \text{tag } \beta$  ;  $\text{tag } \Delta\alpha = \Delta\alpha$

$$\Delta m = -\frac{\rho b h^2}{2} \left[ \frac{\Delta\alpha \left( 1 + \frac{\text{sen}^2 \beta}{\text{cos}^2 \beta} \right)}{\frac{\text{sen}^2 \beta}{\text{cos}^2 \beta}} \right] = -\frac{\rho b h^2 \cdot \Delta\alpha}{2 \cdot \text{sen}^2 \beta} = -\frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,15 \cdot 0,12^2}{2 \cdot \text{sen}^2 23,6} \Delta\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta m = -6,74 \cdot \Delta\alpha$$

Para el ángulo  $\beta$  la palanca está en equilibrio y los momentos son iguales, para el ángulo  $\alpha = \beta + \Delta\alpha$  el momento del peso es mayor que el momento del agua y la palanca vuelve a su posición de equilibrio. Si hubiésemos hecho el cálculo para  $\alpha = \beta - \Delta\alpha$  el resultado hubiese sido el anterior con signo positivo, ahora el momento del agua es mayor que el creado por el peso de la palanca y tiende a volverla a su posición de equilibrio. Una consecuencia es que la rama superior e inferior de la figura 8 son simétricas, y otra es que el momento creado por  $\Delta m$  es el momento resultante.

Para hallar el momento creado por  $\Delta m$  hemos de calcular la distancia del centro de masas del agua al eje eje de giro situado en T. Dado que en el enunciado nos dice que  $\Delta\alpha$  es pequeño podemos suponer sin mucho error que la distancia TN es la misma que cuando el ángulo vale  $\beta$ .

En el apartado 1.3 vimos que

$$TN = 80,15 - \frac{1}{3}BQ = 80,15 - \frac{6,67}{3} = 77,9 \text{ cm}$$

El momento resultante vale:

$$\mu = -6,74\Delta\alpha \cdot 9,8 \cdot 0,779 \cdot \cos(\beta + \Delta\alpha) \approx -6,74\Delta\alpha \cdot 9,8 \cdot 0,779 \cdot \cos\beta = -47,2 \cdot \Delta\alpha \text{ N} \cdot \text{m}$$

Volviendo a la fig.8 y dado el resultado anterior lo que hemos dibujado como una curva debe ser una línea recta utilizando las aproximaciones que se han hecho para llegar a la ecuación de  $\mu$ .

**3.1.3.- Escribir la ecuación de movimiento de la palanca, la cual se mueve con velocidad inicial cero a partir de la posición  $\alpha = \beta + \Delta\alpha$  ( $\Delta\alpha$  pequeño). Mostrar que el movimiento es, con una aceptable exactitud, una oscilación armónica. Calcular el periodo  $\tau$**

Consideramos como posición central del movimiento  $\beta = 0$ . Por tanto, la separación de esa posición es  $\Delta\alpha$  y el momento es directamente proporcional a esa separación, por tanto se trata de un movimiento armónico, cuyo periodo es:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}, \quad k = 47,2$$

El momento de inercia del sistema es la de la palanca más el del agua. El momento de inercia del agua depende de la masa de agua en el recipiente que a su vez es función del ángulo  $\alpha$ . Dado que  $\Delta\alpha$  es pequeño consideramos que la masa de agua varía poco con  $\alpha$  y por ello escogemos como valor constante de la masa de agua 600 gramos, valor que se ha calculado en el apartado 2.1 y como distancia  $TN = 77,9$  cm.

$$I = 12 + 0,6 \cdot 0,779^2 \approx 12,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{12,4}{47,2}} = 3,2 \text{ s}$$

**3.2.- Para un valor dado de  $\Phi$ , el recipiente se desborda todo el tiempo solamente si la palanca se mueve de forma lenta. Existe un límite superior para la amplitud del movimiento armónico el cual depende de  $\Phi$ . Determinar el valor mínimo de  $\Phi$  (en kg/s) para que la palanca realice un movimiento armónico de amplitud  $1^\circ$ .**

Consideramos que  $t=0$  cuando la palanca pasa por la posición  $\beta=23,6^\circ$  y se dirige hacia abajo,  $\Delta\alpha$  negativo. La ecuación  $\Delta m = -6,74 \Delta\alpha$  nos dice cómo aumenta y disminuye el agua en el recipiente

$$\Delta m = -6,74 \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = 0,118 \text{ kg} = 118 \text{ g} \Rightarrow m_2 = 600 - 118 = 482 \text{ g}$$

El esquema de la figura 10 nos indica los valores de  $m$  en función de  $\Delta\alpha$ .

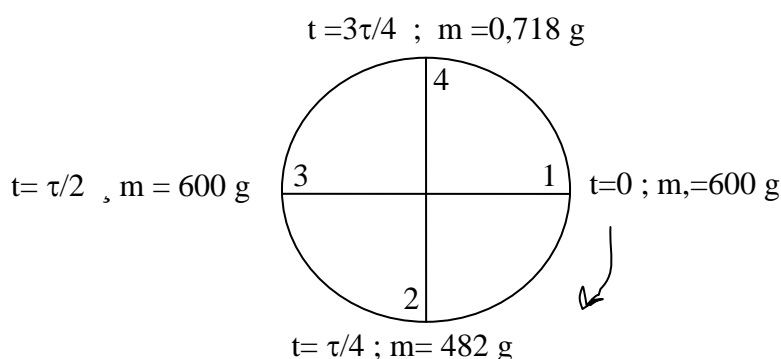


Fig. 10

El análisis de la figura 10 nos dice que cuando la palanca forma un ángulo  $\beta$  con la horizontal tiene una cierta cantidad de agua (concretamente 600 g, ver el apartado 1,3). Al llegar a un ángulo  $\Delta\alpha = -90^\circ$  (posición 2) que corresponde a un tiempo igual a  $\frac{1}{4}$  del periodo el recipiente tiene 482 g de agua, ha perdido agua debido a su posición y durante ese intervalo de tiempo siempre ha estado desbordado. Al volver la palanca a la posición  $\beta$  (posición 3) dirigiéndose hacia arriba ha aumentado la masa de agua y este aumento la ha tenido que suministrar el chorro exterior. Entre  $t = \tau/2$  y  $t=3\tau/4$  de nuevo aumenta la cantidad de agua y de nuevo debe ser suministrada por el chorro exterior para que en todo momento el recipiente desborde. Al bajar la palanca a la posición 1 el agua del recipiente sale al exterior. En resumen desde la posición 2 a la 4 el chorro exterior debe suministrar agua al recipiente para que desborde, entre las posiciones 4 y 2 aun cuando no se suministrase agua desde el exterior el recipiente siempre desbordaría. Teniendo en cuenta que el movimiento de la palanca es armónico.

$$\Delta m = 6,74 \cdot \Delta\alpha_0 \cdot \sin \frac{2\pi}{\tau} t$$

Para asegurarnos que el agua siempre desborda, y el caudal del chorro exterior es constante, dicho caudal debe tener un valor máximo tal que cuando el recipiente demande la máxima cantidad de agua el caudal sea suficiente para ello sin exceder ese valor.

$$d(\Delta m) = 6,74 \cdot \Delta\alpha_0 \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} t \cdot dt \Rightarrow \Phi = 6,74 \cdot \Delta\alpha_0 \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} t$$

El caudal máximo que no debe excederse es:

$$\Phi = 6,74 \cdot \Delta \alpha_o \cdot \frac{2\pi}{\tau} = 6,74 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{2\pi}{3,2} = 0,23 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

**3.3.-Suponer que  $\Phi$  es suficiente para que durante el movimiento libre de la palanca cuando el ángulo decrece desde  $\alpha_2$  a  $\alpha_1$  el recipiente siempre desborde. No obstante si el flujo  $\Phi$  es muy grande el mortero no puede operar. Suponiendo que el movimiento de la palanca es la de un oscilador armónico calcular el flujo mínimo para que el mortero no trabaje.**

Las variaciones de la masa de agua en el recipiente son mayores que en el caso anterior. Cuando la palanca forme un ángulo de  $\alpha_1 = 23,6^\circ$  el recipiente debe contener 1000 gramos de agua y cuando pase por la posición  $\beta = 20,6^\circ$ , 600 gramos. La amplitud de la oscilación es  $23,6 - 20,6 = 3^\circ$

$$\Phi = 6,74 \cdot \Delta \alpha_o \cdot \frac{2\pi}{\tau} = 6,74 \cdot \frac{3\pi}{180} \cdot \frac{2\pi}{3,2} = 0,69 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

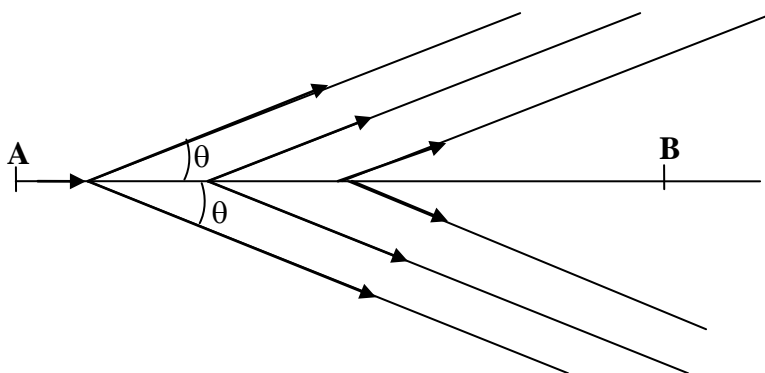
## PROBLEMA 2

### RADIACIÓN CHERENKOV Y CONTADOR DE IMAGEN ANULAR

*La luz se propaga en el vacío a la velocidad  $c$  y ninguna partícula puede alcanzar esta velocidad. No obstante, sí es posible que una partícula se desplace en un medio transparente con una velocidad  $v$  mayor que la de la luz en ese medio, cuyo valor es  $c/n$  ( $n$  es el índice de refracción de ese medio).*

*El experimento (Cherenkov en 1934) y la teoría (Tamm y Frank, 1937) mostraron que una partícula moviéndose a la velocidad  $v$  en un medio transparente con índice de refracción  $n$ , siendo  $v > \frac{c}{n}$ , radia luz, llamada radiación de Cherenkov, en las direcciones que forman con la trayectoria de la partícula un ángulo  $\theta = \arccos \frac{1}{\beta n}$ , siendo  $\beta = \frac{v}{c}$ .*

*1.- Considerar una partícula moviéndose con una velocidad constante  $v > \frac{c}{n}$  en línea recta. La partícula pasa por A en el tiempo  $t=0$  y por B en el tiempo  $t_1$ .*



*Dado que el problema posee simetría respecto del eje AB es suficiente considerar los rayos de luz contenidos en el plano AB.*

*Para cualquier punto C situado entre A y B, la partícula emite una onda de luz esférica, la cual se propaga a la velocidad  $\frac{c}{n}$ . Definimos el frente de onda para un determinado tiempo  $t$  como la envolvente de todas las esferas*

**1.1.- Determinar el frente de onda al tiempo  $t_1$  y dibujar su intersección con el plano que contiene la trayectoria de la partícula.**

En la figura 1 consideramos como origen de tiempos cuando la partícula emite luz en B, por tanto, no ha dado tiempo a propagarse la onda y en la figura 1 aparece como un punto. Cuando la partícula pasó por el punto A emitió una onda esférica que lleva propagándose en el medio un tiempo  $t_1$  con una velocidad  $\frac{c}{n} < v$ .

De la figura 1 se deduce que  $AB = vt_1$  y  $AC = \frac{c}{n}t_1 = c't_1$

$v$  es la velocidad de la partícula y  $c'$  la de la luz cumpliéndose que  $v > c'$ . De las expresiones anteriores se deduce:

$$AC = AB \cdot \frac{c'}{v}$$

Para hacer el dibujo del figura 1 se ha supuesto que  $\frac{c'}{v} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = \frac{1}{2}AB$ . Se traza una circunferencia de radio AC en el plano que contiene ABC. Cuando la partícula se encuentra en  $A_1$  el radio de la circunferencia es la mitad de  $A_1B$  y el mismo razonamiento vale para  $A_2$  y los demás puntos. La envolvente de todas las circunferencias son dos rectas que forma un ángulo  $\phi$  con la línea AB. En el espacio es un cono con vértice en B.

Dado que el triángulo ACB es recto en C se deduce que  $\theta$  y  $\phi$  son ángulos complementarios.

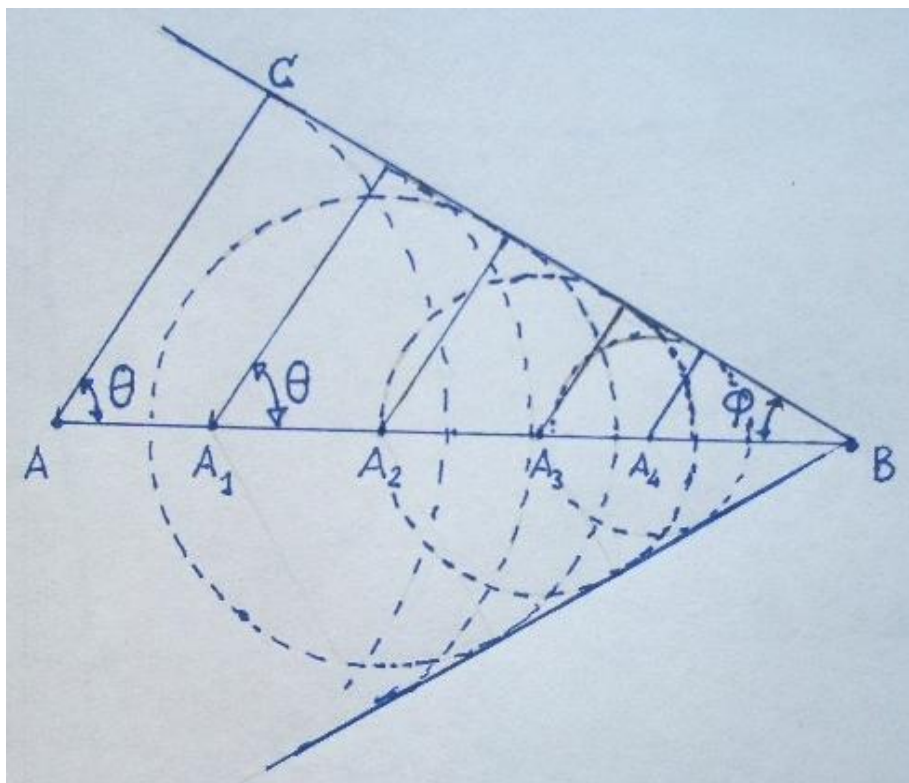


Fig.1

2.- Expresar el ángulo  $\varphi$ , entre esta intersección y la trayectoria de la partícula en función de  $n$  y  $\beta$ .

Puesto que  $\theta$  y  $\varphi$  son complementarios

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n} ; \quad \theta = \arcsen \frac{1}{\beta n}$$

2.- Considerar un haz de partículas que se mueve con velocidad  $v > \frac{c}{n}$  y con un ángulo  $\theta$  pequeño a lo largo de una recta  $IS$ . El haz cruza un espejo esférico, con distancia focal  $f$  y centro de curvatura  $C$ , por el punto  $S$ .  $SC$  forma con  $SI$  un ángulo pequeño  $\alpha$ . El haz de partículas forma una imagen en forma de anillo en el plano focal del espejo.

Explicar con ayuda de un esquema el porqué de este hecho y dar la posición del centro  $O$  y el radio del anillo  $r$ .

Este fenómeno se utiliza en contadores Cherenkov de imagen anular RICH (ring imaging Cherenkov counters) y el medio por el cual viaja la partícula se denomina radiador.

Antes de abordar la pregunta del problema observemos la figura 2. Se trata de un espejo cóncavo que recibe por un lado los rayos  $II_0$  y  $JJ_0$  paralelos entre sí y por otro los rayos  $LL_0$  y  $KK_0$ , también paralelos entre sí. Los ángulos que forman  $II_0$  con el eje óptico del espejo es el mismo en valor absoluto que el que forma  $KK_0$ . A los rayos incidentes  $II_0$ ,  $JJ_0$ ,  $LL_0$  y  $KK_0$  le corresponden los reflejados  $I_0I'$ ,  $J_0J'$ ,  $L_0L'$  y  $K_0K'$ , respectivamente. Si nos imaginamos ahora en el espacio los rayos forman en el plano focal un anillo, siendo el eje óptico del espejo perpendicular al plano que contiene el anillo y el centro del citado anillo se encuentra en la línea  $CF$  y precisamente en el foco del espejo. El radio del anillo es  $FM$

$$\text{radio} \approx \gamma \cdot CF = \gamma \cdot f$$

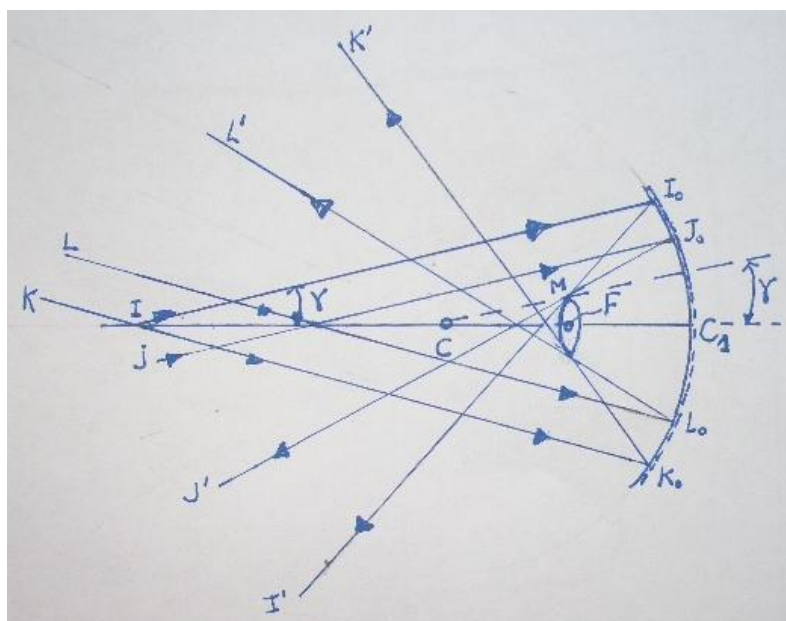


Fig.2

En la figura 3 la línea IS es la seguida por la partícula y las ondas son emitidas con un ángulo  $\theta$ . Siguiendo lo explicado para la figura 1 ahora se formará un anillo pero el eje óptico del espejo (línea CF) no es perpendicular al plano del anillo. O es el centro del anillo. La línea  $CC_1$  dibujada en la figura 3 es paralela a IS. Teniendo en cuenta la relación arco = ángulo\* radio se deduce que

$$FO \approx \alpha \cdot f$$

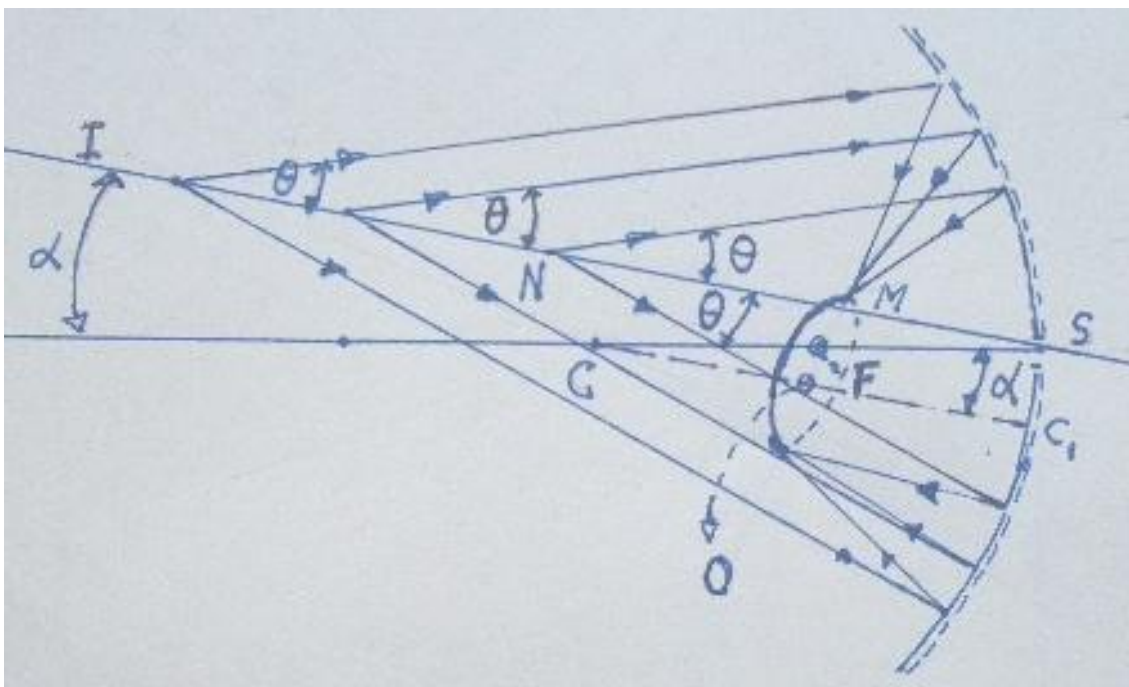


Fig.3

**3.- Un haz de partícula con momento  $p = 10,0 \text{ GeV}/c$ , consiste en tres tipos de partículas, protones, kaones y piones, cuyas masas en reposo son respectivamente  $M_p=0,94 \text{ GeV}/c^2$ ,  $M_k=0,50 \text{ GeV}/c^2$ ,  $M_\pi=0,14 \text{ GeV}/c^2$ .**

**El haz de partículas atraviesa aire a una presión  $P$ , siendo su índice de refracción:  $n=1+\alpha P$ ,  $\alpha = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$ .**

**3.1.- Calcular para cada una de las partículas la presión mínima  $P_{\min}$  del aire para que se produzca la radiación Cherenkov.**

La expresión relativista del momento de una partícula es:  $p = \frac{M}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot v$ , siendo  $\beta = \frac{v}{c}$

Siendo  $M=N \frac{\text{GeV}}{c^2}$ ,  $N=0,94$  para el protón,  $0,50$  para el kaón y  $0,14$  para el pión.

$$\frac{N \frac{\text{GeV}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v = 10,0 \frac{\text{GeV}}{c} \Rightarrow \frac{N^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 100c^2 \Rightarrow N^2 v^2 = 100c^2 - 100v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2(N^2 + 100) = 100c^2 \Rightarrow v = \frac{10c}{\sqrt{N^2 + 100}}$$

La presión mínima se originará cuando:  $v = \frac{c}{n} \Rightarrow n = \frac{c}{v} = 1 + 2,78 \cdot 10^{-4} P_{\min}$

Para el protón:  $1 + 2,78 \cdot 10^{-4} P_{\min} = \frac{c}{\frac{10c}{\sqrt{0,94^2 + 100}}} = 1,0044 \Rightarrow P_{\min} = 15,9 \text{ atm}$

Para el kaón:  $1 + 2,78 \cdot 10^{-4} P_{\min} = \frac{c}{\frac{10c}{\sqrt{0,50^2 + 100}}} = 1,00125 \Rightarrow P_{\min} = 4,5 \text{ atm}$

Para el pión:  $1 + 2,78 \cdot 10^{-4} P_{\min} = \frac{c}{\frac{10c}{\sqrt{0,14^2 + 100}}} = 1,000098 \Rightarrow P_{\min} = 0,35 \text{ atm}$

**3.2.- Calcular la presión del aire  $P_{1/2}$  para la cual el radio del anillo de imagen que producen los kaones sea la mitad del que producen los piones. Calcular los valores de  $\theta_k$  y  $\theta_\pi$  en este caso.**

**¿Es posible que para esa presión se observe un anillo de imagen de los protones?**

De acuerdo con el enunciado

$$r_{\text{kaón}} = \frac{1}{2} r_{\text{pión}} \Rightarrow f\theta_{\text{kaón}} = \frac{1}{2} f\theta_{\text{pión}} \Rightarrow \theta_{\text{pión}} = 2\theta_{\text{kaón}}$$

Del enunciado del problema

$$\theta_{\text{pión}} = \arccos \frac{1}{\beta n} = \arccos \frac{c}{v_{\text{pión}} n} = \arccos \frac{c}{\frac{10c}{\sqrt{0,14^2 + 100}} (1 + 2,7 \cdot 10^{-4} P)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{\text{pión}} = \arccos \frac{1,000098}{1 + 2,7 \cdot 10^{-4} P} \quad (1)$$

Para el kaón

$$\theta_{\text{kaón}} = \arccos \frac{c}{\frac{10c}{\sqrt{0,50^2 + 100}} (1 + 2,7 \cdot 10^{-4} P)} = \arccos \frac{1,001249}{1 + 2,7 \cdot 10^{-4} P} \quad (2)$$

En las ecuaciones (1) y (2) damos valores a P. Como la presión para producir luz Cherenkov comienza para el kaón a 4,5 atmósferas, damos valores a P a partir de 5 atmósferas

Presión/atm	$\theta_{\text{pión}}$	$\theta_{\text{kaón}}$	$\theta_{\text{pión}}/\theta_{\text{kaón}}$
5,0	2,865	0,814	3,5
5,5	3,016	1,244	2,4
6,0	3,159	1,559	2,0
6,5	3,296	1,821	1,8

De la tabla se deduce que  $P_{\frac{1}{2}} \approx 6 \text{ atm}$  y  $\theta_{\pi} = 3,2^{\circ}$  y  $\theta_k = 1,6^{\circ}$

A esta presión el protón no da radiación Cherenkov ya que su presión mínima es 15,9 atm.

**4.- Suponer que el haz de partículas no es exactamente monocromático sino que sus momentos están centrados en 10 GeV/c. La mitad de la anchura a la mitad de la altura de dicha distribución es  $\Delta p$ . Esto determina que el anillo de imagen esté expandido y que la correspondiente distribución en  $\theta$  tenga mitad de la anchura a la mitad de la altura igual a  $\Delta \theta$ . La presión del medio (radiador) es  $P_{1/2}$  calculada en el apartado 3.2.**

**4.1.-Calcular  $\frac{\Delta \theta_k}{\Delta P}$  y  $\frac{\Delta \theta_{\pi}}{\Delta P}$  para los kaones y piones.**

Partimos de la ecuación

$$p = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v, = \frac{Mcv}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Rightarrow p^2 c^2 = M^2 c^2 v^2 + p^2 v^2 \Rightarrow v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + M^2 c^2}}$$

Diferenciado en la anterior ecuación

$$dv = \frac{\sqrt{p^2 + M^2 c^2} \cdot c - pc \cdot \frac{2p}{2\sqrt{p^2 + M^2 c^2}} dp}{p^2 + M^2 c^2} \Rightarrow \frac{dv}{dp} = \frac{M^2 c^3}{(p^2 + M^2 c^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dv = dp \frac{M^2 c^3}{(p^2 + M^2 c^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ como } d\beta = \frac{dv}{c} \Rightarrow d\beta = dp \frac{M^2 c^2}{(p^2 + M^2 c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Del enunciado se deduce

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1}{\beta n} \Rightarrow -\operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{-1 \cdot n}{\beta^2 n^2} d\beta \Rightarrow \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{1}{\beta n} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \cdot \frac{1}{\beta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{1}{\operatorname{tag} \theta \cdot \beta} \approx \frac{1}{\theta \beta}\end{aligned}$$

A partir de las dos últimas relaciones

$$\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{d\theta}{dp \cdot \frac{M^2 c^2}{(p^2 + M^2 c^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{\theta \beta} \Rightarrow \frac{\Delta \theta}{\Delta p} = \frac{M^2 c^2}{(p^2 + M^2 c^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\theta \beta}$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior para el kaón:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{10c}{\sqrt{N_k^2 + 100}} = \frac{10}{\sqrt{0,50^2 + 100}} = 0,998752$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \theta_k}{\Delta p} &= \frac{0,50^2 \frac{\text{GeV}^2}{c^4} \cdot c^2}{\left(100 \frac{\text{GeV}^2}{c^2} + 0,50^2 \frac{\text{GeV}^2}{c^4} \cdot c^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\frac{1,6\pi}{180} \cdot 0,998752} = 8,93 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\frac{\text{GeV}}{c}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Delta \theta_k}{\Delta p} = 8,93 \cdot 10^{-3} \frac{180}{\pi} \frac{\circ}{\frac{\text{GeV}}{c}} = 0,51 \frac{\circ}{\frac{\text{GeV}}{c}}\end{aligned}$$

Sustituyendo valores para el pión

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{10c}{\sqrt{N_k^2 + 100}} = \frac{10}{\sqrt{0,14^2 + 100}} = 0,999902$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \theta_\pi}{\Delta p} &= \frac{0,14^2 \frac{\text{GeV}^2}{c^4} \cdot c^2}{\left(100 \frac{\text{GeV}^2}{c^2} + 0,14^2 \frac{\text{GeV}^2}{c^4} \cdot c^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\frac{3,2\pi}{180} \cdot 0,999902} = 3,51 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\frac{\text{GeV}}{c}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Delta \theta_k}{\Delta p} = 3,51 \cdot 10^{-4} \frac{180}{\pi} \frac{\circ}{\frac{\text{GeV}}{c}} = 0,020 \frac{\circ}{\frac{\text{GeV}}{c}}\end{aligned}$$

**4.2.-Cuando la separación entre las dos imágenes de los anillos cumple la relación  $\theta_\pi - \theta_k > 10 \Delta \theta$ , entonces es posible distinguir las dos**

*imágenes. Calcular el máximo valor de  $\Delta p$  que permite distinguir ambas imágenes.*

$$\frac{\theta_{\pi} - \theta_k}{10} > \Delta\theta \Rightarrow \frac{3,2 - 1,6}{10} > \Delta\theta \Rightarrow 0,16 > \Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta p} = 0,51 + 0,02 = 0,53 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{\Delta\theta}{0,53} < \frac{0,16}{0,53} < 0,30 \frac{\text{GeV}}{c}$$

**5.-Cherenkov descubrió el efecto que lleva su nombre cuando observó que una botella de agua colocada cerca de una fuente radiactiva emitía luz..**

**5.1.- Encontrar la energía cinética mínima  $T_{\min}$  de una partícula, cuya masa en reposo es  $M$ , que desplazándose por el agua produzca radiación Cherenkov. El índice de refracción del agua es  $n=1,33$ .**

Para que se produzca luz Cherenkov se debe cumplir que  $v \geq \frac{c}{n}$ , es decir, el valor mínimo lo marca la igualdad anterior, como  $\beta = \frac{v}{c}$ , resulta  $\beta = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,33}$ .

Según la teoría de la relatividad

$$T = E - Mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - Mc^2 = Mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \Rightarrow T_{\min} = Mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1,33}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$T_{\min} = 0,517 Mc^2$$

**5.2.- La fuente radiactiva que estaba próxima a la botella emitía partículas  $\alpha$  cuya masa en reposo es  $M_{\alpha}=3,8 \text{ GeV}/c^2$  y electrones de masa en reposo  $M_e=0,51 \text{ MeV}/c^2$ . Calcular las energías cinéticas mínimas para ambas partículas.**

**Sabiendo que la energía de las partículas emitidas por las fuentes radiactiva no sobrepasa unos pocos de MeV, indicar cuál de las partículas es responsable de la radiación Cherenkov.**

Para la partícula alfa  $T(\alpha)_{\min} = 0,517 \cdot 3,8 \frac{\text{GeV}}{c^2} \cdot c^2 = 1,96 \text{ GeV}$

Para los electrones  $T(e)_{\min} = 0,517 \cdot 0,51 \frac{\text{MeV}}{c^2} \cdot c^2 = 0,26 \text{ MeV}$

Se deduce que la fuente responsable son los electrones.

**6.- En los anteriores apartados del problema, la dependencia de la radiación Cherenkov respecto de la longitud de onda no se ha tenido en cuenta. Si tenemos este hecho presente la radiación Cherenkov producida por una partícula tiene un espectro continuo en el que se incluye el intervalo visible (longitudes de onda desde  $0,4 \mu\text{m}$  a  $0,8 \mu\text{m}$ ). Se sabe que el índice de refracción del radiador decrece linealmente un 2% de  $(n-1)$  cuando  $\lambda$  aumenta por encima de este rango.**

**6.1.- Considera un haz de piones con momento  $10,0 \text{ GeV}/c$  moviéndose por el aire que se encuentra a la presión de 6 atm. Encontrar la diferencia angular  $\Delta\theta$  asociada con los dos extremos de la luz visible ( $\lambda=0,4 \mu\text{m}$  y  $\lambda=0,8 \mu\text{m}$ )**

El índice de refracción del aire (radiador) vale  $n = 1 + 2,7 \cdot 10^{-4} \cdot 6 = 1,00162$ . Al pasar del violeta ( $0,4 \mu\text{m}$ ) al rojo ( $0,8 \mu\text{m}$ ) la longitud de onda aumenta y el índice de refracción disminuye en un 2% de  $(n-1)$ . Si  $n_v$  y  $n_r$  representan los índices de refracción

$$n_v - n_r = \Delta n = 0,02(n-1)$$

De la ecuación

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{\beta n} \Rightarrow -\text{sen}\theta \cdot d\theta = \frac{-1 \cdot dn}{\beta n^2} \Rightarrow \text{sen}\theta \cdot d\theta = \frac{1}{\beta n} \cdot \frac{dn}{n} = \cos\theta \cdot \frac{dn}{n} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta n} &= \frac{1}{n \text{tag}\theta} \approx \frac{1}{n\theta} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta n}{n\theta} = \frac{0,02(n-1)}{n\theta} = \frac{0,002(1,00162-1)}{1,00162 \cdot \frac{3,2\pi}{180}} = 5,79 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned}$$

Si lo expresamos en grados:  $5,79 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,033^\circ$

**6.2.- Sobre esta base, estudiar cualitativamente el efecto de la dispersión de la imagen del anillo de los piones con un momento distribuido sobre un intervalo centrado en  $p=10,0 \text{ GeV}/c^2$  cuya mitad de anchura a la mitad de altura es  $\Delta p=0,3 \text{ GeV}/c$ .**

**Calcular el ensanchamiento debido a la variación del índice de refracción y el debido a la variación del momento del haz.**

En el apartado 4.1 hemos deducido que

$$\Delta\theta = 0,02 \frac{\circ}{\text{GeV}} \cdot \Delta p = 0,02 \frac{\circ}{\text{GeV}} \cdot 0,3 \frac{\circ}{\text{GeV}} = 0,006^\circ$$

El debido a la variación del índice de refracción es:  $\frac{0,033^\circ}{2} = 0,017^\circ$

### PROBLEMA 3

#### CAMBIO DE LA TEMPERATURA DEL AIRE CON LA ALTURA, ESTABILIDAD ATMOSFÉRICA Y CONTAMINACIÓN DEL AIRE

*El movimiento vertical del aire gobierna muchos procesos atmosféricos, tales como la formación de nubes y la precipitación y la dispersión de contaminantes del aire. Si la atmósfera es estable, el movimiento vertical está restringido y los contaminantes del aire tienden a acumularse en el lugar de la emisión en lugar de dispersarse y diluirse. Sin embargo en una atmósfera inestable el movimiento vertical del aire fomenta la dispersión de los contaminantes del aire. Por lo tanto, la concentración de contaminantes en el aire no depende solamente de la cantidad emitida por las fuentes de emisión sino también de la estabilidad de la atmósfera.*

*Determinaremos la estabilidad atmosférica utilizando el concepto de parcela de aire de meteorología y compararemos la temperatura de la parcela de aire elevándose y hundiéndose adiabáticamente en la atmósfera del aire que la rodea. Veremos que en muchos casos una parcela de aire conteniendo contaminantes y elevándose desde el suelo llegará al reposo al alcanzar una cierta altura llamada altura de mezcla. Cuanto mayor es la altura de mezcla menor es la concentración de contaminantes. Evaluaremos la altura de mezcla y la concentración de monóxido de carbono emitido por las motocicletas en el área metropolitana de Hanoi en horas punta de la mañana, durante las cuales la mezcla vertical se debe a la inversión de la temperatura (la temperatura del aire aumenta con la altura) a alturas superiores a 119 m.*

*Se considera al aire como un gas ideal que obedece a la ecuación  $PV^\gamma = \text{Constante}$ , donde  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ . Si es necesario pueden utilizarse los*

*siguientes datos:*

*$R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol K})$  ; presión atmosférica en el suelo  $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$ ;  
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  ;  $C_p = 7/2 R$  ,  $C_v = 5/2 R$*

*Ayudas matemáticas*

$$a) \int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B} \ln(A+Bx)$$

b) La solución de la ecuación diferencial  $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ , siendo  $A$  y  $B$  constantes es:  $x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$  en la que  $x_1(t)$  es la solución de la ecuación diferencial  $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

## 1.- Variación de la presión con la altura

1.1.- Suponer que la temperatura de la atmósfera es uniforme e igual a  $T_0$ . Escribir la expresión que relaciona la presión  $p$  con la altura  $z$ .

La variación de la presión con la altura es:  $dp = -\rho g dz$ , siendo  $\rho$  la densidad del aire. Considerando a éste como un gas perfecto.

$$pV = \frac{g}{\mu} RT_0 \Rightarrow p = \frac{\rho}{\mu} RT_0 \Rightarrow dp = -\frac{p\mu}{RT_0} g dz \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} \int dz \Rightarrow \ln p(z) = -\frac{\mu g}{RT_0} z + Cte ; \text{ cuando } z = 0 \Rightarrow Cte = \ln p(0) \Rightarrow$$

$$p(z) = p(0) e^{-\frac{\mu g z}{RT_0}}$$

1.2.- Suponer que la temperatura de la atmósfera varía con la altura de acuerdo con la ecuación  $T(z) = T(0) - \Lambda z$ , donde  $\Lambda$  es una constante llamada tasa de retraso de la temperatura de la atmósfera (el gradiente vertical de la temperatura es  $-\Lambda$ ).

1.2.1.- Encontrar la ecuación que relacione la presión atmosférica con la altura  $z$ .

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R \cdot T(z)} dz = -\frac{\mu g}{R(T(0) - \Lambda z)} dz \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \int \frac{1}{T(0) - \Lambda z}$$

Para resolver la segunda integral recurrimos a la ayuda matemática del enunciado

$$\int \frac{dx}{A + Bx} = \frac{1}{B} \ln(A + Bx) \Rightarrow A = T(0) \text{ y } B = -\Lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln p(z) = -\frac{\mu g}{R} \left[ \frac{1}{-\Lambda} \cdot \ln(T(0) - \Lambda z) \right] + Cte = \frac{\mu g}{R \Lambda} \cdot \ln(T(0) - \Lambda z) + Cte$$

En la última ecuación cuando  $z = 0$  la  $Cte = \ln p(0) - \frac{\mu g}{R \Lambda} \ln(0)$

$$\ln p(z) = \frac{\mu g}{R \Lambda} \cdot \ln(T(0) - \Lambda z) + \ln p(0) - \frac{\mu g}{R \Lambda} \cdot \ln T(0) \Rightarrow \ln \frac{p(z)}{p(0)} = \frac{\mu g}{R \Lambda} \cdot \ln \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(z) = p(0) \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R \Lambda}} \quad (1)$$

**1.2.2.- Un proceso denominado convección libre ocurre cuando la densidad del aire aumenta con la altura. ¿Para qué valores de  $\Lambda$  ocurre la convección libre?**

La convección libre ocurre cuando  $\frac{\rho(z)}{\rho(0)} > 1$ . Hacemos uso de la ecuación (1), la de los gases perfectos  $p(0) = \frac{\rho(0)}{\mu} R T(0)$  y  $T(z) = T(0) - \Lambda z$ .

$$\frac{p(z) \frac{\mu}{R T(z)}}{p(0) \frac{\mu}{R T(0)}} > 1 \Rightarrow \frac{p(z) \cdot T(0)}{p(0) \cdot T(z)} > 1 \Rightarrow \frac{\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R \Lambda}} T(0)}{T(z)} > 1 \Rightarrow \frac{\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R \Lambda}} \cdot T(0)}{T(0) - \Lambda z} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R \Lambda} - 1} > 1 \Rightarrow \left(\frac{\mu g}{R \Lambda} - 1\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right) > 0$$

El término  $\ln\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)$  es negativo, ya que la expresión situada en el paréntesis es menor que la unidad, por tanto, para que se cumpla la desigualdad anterior

$$\frac{\mu g}{R \Lambda} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{\mu g}{R \Lambda} < 1 \Rightarrow \mu g < R \Lambda \Rightarrow \Lambda > \frac{\mu g}{R} \quad (2)$$

Sustituyendo valores en (2)

$$\Lambda > \frac{29 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{8,31 \frac{\text{J}}{\text{molK}}} = 0,034 \frac{\text{K}}{\text{m}}$$

## 2.- Cambio de la temperatura de una parcela de aire en movimiento vertical

*Considerar una parcela de aire moviéndose arriba y abajo en la atmósfera. Una parcela de aire es un volumen de aire, por ejemplo un cubo con dimensión de arista de varios metros, el cual se considera como una entidad termodinámicamente independiente, pero lo suficientemente pequeña para que su temperatura sea uniforme. El movimiento vertical*

de una parcela de aire se puede considerar como un proceso cuasiadiabático, esto es, el intercambio de calor con los alrededores se considera despreciable. Si la parcela de aire se eleva en la atmósfera, se expande y se enfría, por el contrario si se desplaza hacia abajo la presión exterior comprime al aire de la parcela y su temperatura aumenta.

Si el tamaño de la parcela no es grande la presión exterior en los diferentes puntos de la parcela se considera igual con el valor  $p(z)$ , siendo  $z$  el centro de la parcela de aire. La temperatura de la parcela de aire es uniforme y vale  $T_{par}(z)$  y en general es diferente de la temperatura  $T(z)$  del aire exterior. En los apartados 2.1 y 2.2 no se hace ninguna suposición acerca de la forma de  $T(z)$ .

2.1.- El cambio en la temperatura de la parcela  $T_{par}$  con la altura está definida por  $\frac{dT_{par}}{dz} = -G$ . Obtenga la expresión de  $G(T, T_{par})$ .

$$\frac{dT_{par}}{dz} = \frac{dT_{par}}{dp} \cdot \frac{dp}{dz}$$

Hallamos el primer término de la ecuación anterior:

De acuerdo con el enunciado  $pV^\gamma = \text{Cte}$  y con la ecuación de los gases perfectos

$$pV = \frac{g}{\mu} RT_{par}$$

$$p \left( \frac{gR T_{par}}{p\mu} \right)^\gamma = \text{Cte} \Rightarrow p^{1-\gamma} \cdot T_{par}^\gamma = \text{Cte} \Rightarrow T_{par} \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{Cte}$$

Diferenciando la última ecuación.

$$T_{par} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-1} dp + p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} dT_{par} = 0 \Rightarrow dT_{par} + \frac{T_{par} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \cdot p^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} dp}{p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dT_{par}}{dp} + \frac{T_{par} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)}{p} = 0 \Rightarrow \frac{dT_{par}}{dp} = -\frac{1}{p} T_{par} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)$$

Hallamos el segundo término recurriendo a una de las ecuaciones que aparece en el apartado 1.1.

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g p}{RT}$$

$$\frac{dT_{par}}{dz} = \frac{dT_{par}}{dp} \cdot \frac{dp}{dz} = -\frac{1}{p} T_{par} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \cdot \frac{\mu g p}{RT} = -\left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{\mu g T_{par}}{RT} = -G$$

**2.2.- Considerar que en la atmósfera se dan unas condiciones especiales para las que  $T_{par}(z)=T(z)$ . Utilizamos  $\Gamma$  para indicar el valor de  $G$  cuando se cumple la relación anterior.  $\Gamma$  se denomina tasa de retraso adiabático seca.**

**2.2.1.- Obtener la expresión de  $\Gamma$  y 2.2.2.- Su valor numérico**

Incluimos en la ecuación obtenida para  $G$  la condición del enunciado.

$$\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\mu g}{R} = \Gamma = \frac{\mu g}{(C_p - C_v)} \left(1 - \frac{1}{\frac{C_p}{C_v}}\right) = \frac{\mu g}{(C_p - C_v)} \frac{C_p - C_v}{C_p} = \frac{\mu g}{C_p}$$

$$\Gamma = \frac{29,10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{7}{2} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = 9,77 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}$$

**2.2.3.- Obtener la expresión de la temperatura de la atmósfera  $T(z)$  en función de la altura.**

$$\frac{dT_{par}}{dz} = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\mu g T_{par}}{R T} = -G \Rightarrow \frac{dT(z)}{dz} = -\Gamma \Rightarrow T(z) = -\Gamma z + \text{Cte}; \text{ cuando } z = 0$$

$$\text{Cte} = T(0) \Rightarrow T(z) = T(0) - \Gamma z$$

**2.3.- Suponer que la temperatura de la atmósfera depende de la altura según la ecuación  $T(z) = T(0) - \Lambda z$ , en la que  $\Lambda$  es una constante.**

**Encontrar la dependencia de la temperatura de la parcela  $T_{par}$  con la altura  $z$ .**

En el apartado 2.1 hemos encontrado la siguiente ecuación

$$\frac{dT_{par}}{dz} = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\mu g T_{par}}{R T}$$

En ella sustituimos el valor de la temperatura exterior.

$$\begin{aligned} \frac{dT_{\text{par}}}{dz} &= -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\mu g T_{\text{par}}}{R [T(0) - \Lambda z]} \Rightarrow \frac{dT_{\text{par}}}{T_{\text{par}}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{1}{T(0) - \Lambda z} dz \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{dT_{\text{par}}}{T_{\text{par}}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \int \frac{dz}{T(0) - \Lambda z} \Rightarrow \ln T_{\text{par}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \int \frac{dz}{T(0) - \Lambda z} \end{aligned}$$

En el apartado 1.2.1 se ha resuelto la integral  $\int \frac{dz}{T(0) - \Lambda z} = -\frac{1}{\Lambda} \ln [T(0) - \Lambda z]$

Sustituyendo la integral:

$$\begin{aligned} \ln T_{\text{par}}(z) &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \left[ \frac{1}{\Lambda} \ln (T(0) - \Lambda z) \right] + \text{Cte} \Rightarrow \text{cuando } z = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Cte} = \ln T_{\text{par}}(0) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R \Lambda} \ln T(0) \Rightarrow \\ \ln T_{\text{par}}(z) &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \left[ \frac{1}{\Lambda} \ln (T(0) - \Lambda z) \right] + \ln T_{\text{par}}(0) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R \Lambda} \ln T(0) \Rightarrow \\ \ln T_{\text{par}}(z) - \ln T_{\text{par}}(0) &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R \Lambda} [\ln (T(0) - \Lambda z) - \ln T(0)] \\ &\Rightarrow \ln \frac{T_{\text{par}}(z)}{T_{\text{par}}(0)} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R \Lambda} \ln \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} \end{aligned}$$

En el apartado 2.2.1 hemos visto que  $\Gamma = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R}$ , sustituyendo en la anterior ecuación

$$\ln \frac{T_{\text{par}}(z)}{T_{\text{par}}(0)} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \ln \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} \Rightarrow \frac{T_{\text{par}}(z)}{T_{\text{par}}(0)} = \left[ \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} \right]^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

**2.4.- Escribir la expresión aproximada de  $T_{\text{par}}(z)$  cuando  $|\Lambda z| \ll T(0)$  y  $T(0) = T_{\text{par}}(0)$ .**

$$\ln \frac{T_{\text{par}}(z)}{T_{\text{par}}(0)} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \ln \left( 1 - \frac{\Lambda z}{T(0)} \right)$$

Hacemos uso de la relación matemática  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$ ;  $-1 < x \leq 1$

siendo  $x = -\frac{\Lambda z}{T(0)}$  y como el valor absoluto de  $x$  es muy pequeño el desarrollo lo limitamos al primer término

$$\ln \frac{T_{\text{par}}(z)}{T_{\text{par}}(0)} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \left( -\frac{\Lambda z}{T(0)} \right) = -\frac{\Gamma z}{T(0)} \Rightarrow \frac{T_{\text{par}}(z)}{T_{\text{par}}(0)} = e^{-\frac{\Gamma z}{T(0)}}$$

Haciendo uso de  $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \dots$

$$T_{\text{par}}(z) = T_{\text{par}}(0) \left( 1 - \frac{\Lambda z}{T(0)} \right) \approx T_{\text{par}}(0) - \Gamma z$$

### 3.- Estabilidad atmosférica

*En este apartado suponemos que T cambia linealmente con la altura.*

**3.1.- Considerar una parcela de aire que inicialmente se encuentra en equilibrio con el aire de sus alrededores a una altura  $z_0$ , esto es, tiene la misma temperatura  $T(z_0)$  que la del aire de los alrededores. Si la parcela se mueve ligeramente hacia arriba o hacia abajo (por la turbulencia atmosférica) ocurre uno de los tres siguientes casos:**

**1) La parcela de aire retrocede a su posición original  $z_0$ , el equilibrio de la parcela es estable. La atmósfera es estable.**

**2) La parcela de aire mantiene su movimiento en la dirección original, el equilibrio es inestable. La atmósfera es inestable.**

**3) La parcela de aire permanece en la nueva posición, el equilibrio es indiferente. La atmósfera es neutra.**

**¿Cuál es la condición de  $\Lambda$  para que la atmósfera sea estable, inestable o neutra?**

Designamos con  $\rho$  la densidad del aire de la parcela y con  $\rho'$  la del aire que la rodea. En el apartado 2.2 daban las mismas condiciones que en este  $T_{\text{par}}(z)=T(z)$  y allí se obtuvo la ecuación  $T(z)=T(0)-\Gamma z$ , que es válida para  $z$  aproximadamente igual a  $z_0$ .

Supongamos que la parcela de aire se eleva una distancia  $d$  respecto a  $z_0$ . Aplicamos la ecuación anterior y obtenemos

$$T_{\text{par}}(z_0 + d) = T_{\text{par}}(z_0) - \Gamma d ; T(z_0 + d) = T(z_0) - \Lambda d$$

Supongamos que  $\Lambda > \Gamma$ , entonces:

$$T_{\text{par}}(z_0 + d) > T(z_0 + d)$$

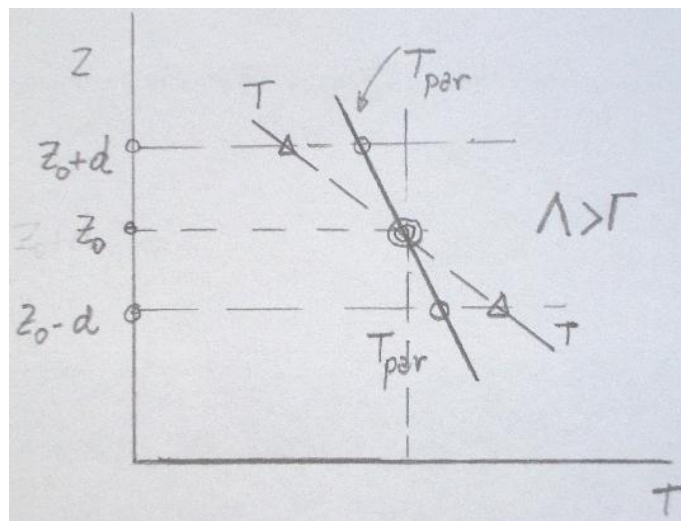
Aplicamos la ecuación de los gases perfectos  $p = \frac{\rho}{\mu} RT$ , a la parcela de aire y al aire de los alrededores, la presión es la misma, por tanto:

$$\frac{\rho}{\mu} RT_{\text{par}}(z_0 + d) = \frac{\rho'}{\mu} RT(z_0 + d) \Rightarrow \rho < \rho'$$

La densidad del aire que rodea a la parcela es mayor y a consecuencia de ello el empuje es mayor que el peso de la parcela, y por ello, ésta se alejará de la posición  $z_0+d$ .

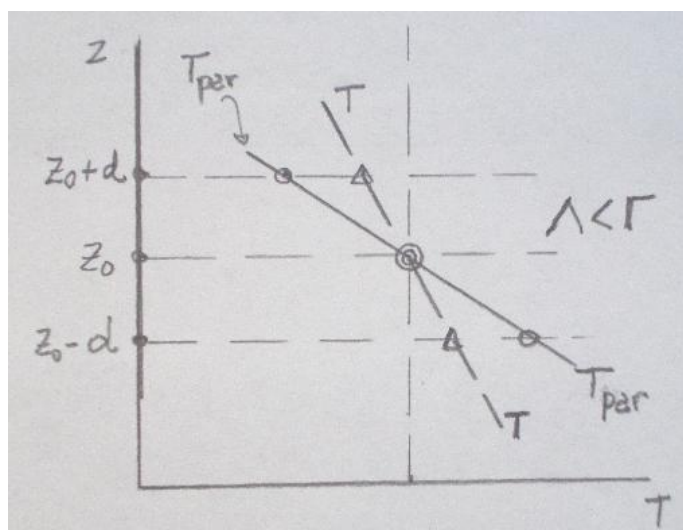
Si la parcela de aire pasa a la posición  $z_0 - d$  resulta que  $\rho > \rho'$ , veamos por qué. En la gráfica se representa en el eje de abscisas la temperatura y en el de ordenadas la altura. Cuando la altura es  $z_0$ , la temperatura de la parcela y del aire de los alrededores es la misma, pero, como acabamos de ver, cuando aumenta la altura a  $z_0 + d$  resulta que la temperatura de la parcela es mayor que la del aire y ambas temperaturas varían linealmente.

En la gráfica se observa que cuando la altura es  $z_0 - d$ ,  $T_{par} < T$  y en consecuencia  $\rho > \rho'$ . El peso de la parcela de aire es superior al empuje del aire de los alrededores, la parcela se aleja hacia abajo. La atmósfera es inestable.



Gráfica 1

Si  $\Lambda < \Gamma$  la situación que da reflejada en la gráfica 2.



Gráfica 2

Para  $z_0+d$ ,  $T_{par}<T$ , por tanto,  $\rho>\rho'$ . El peso de la parcela es mayor que el empuje y tenderá a volver a  $z_0$ .

Cuando  $z_0-d$ ,  $T_{par}>T$ ,  $\rho<\rho'$ . El empuje es mayor que el peso de la parcela, ésta tenderá a volver a la posición  $z_0$ . La atmósfera es estable

Cuando  $\Lambda=\Gamma$ , las rectas de las gráficas 1 o 2 coinciden y,  $\rho=\rho'$ , en cualquier posición. Por tanto el empuje y el peso son iguales en cualquier posición. El equilibrio es indiferente, la atmósfera es neutral.

**3.2.- Una parcela de aire tiene una temperatura en la superficie de la tierra  $T_{par}(0)$  mayor que la temperatura  $T(0)$  del aire que la rodea. El empuje del aire exterior a la parcela es mayor que el peso de la parcela y ésta se elevará. Calcule la máxima altura que puede alcanzar en el caso de una atmósfera estable, en función de  $\Lambda$  y  $\Gamma$ .**

Al ser la atmósfera estable  $\Lambda<\Gamma$  la parcela al elevarse disminuye su temperatura y lo mismo le ocurre al aire exterior, pero según la relación anterior la parcela de aire disminuye su temperatura más deprisa que el aire exterior por lo que a cierta altura las temperaturas se igualan,  $T_{par}(h)=T(h)$ , siendo  $h$  la altura máxima.

En el apartado 2.3.- hermosa encontrado la ecuación que relaciona la temperatura de la parcela con la altura:

$$T_{par}(h) = T_{par}(0) \left[ 1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} \right]^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

Por otra parte tenemos:  $T(h) = T(0) - \Lambda h$

$$\begin{aligned} T_{par}(0) \left[ 1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} \right]^{\frac{\Gamma}{\Lambda}} &= T(0) - \Lambda h \Rightarrow \frac{T_{par}(0)}{T(0)} \left[ 1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} \right]^{\frac{\Gamma}{\Lambda}} = 1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{T_{par}(0)}{T(0)} &= \left[ 1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} \right]^{1 - \frac{\Gamma}{\Lambda}} = \left[ 1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} \right]^{\frac{\Lambda - \Gamma}{\Lambda}} \Rightarrow \left[ \frac{T_{par}(0)}{T(0)} \right]^{\frac{\Lambda}{\Lambda - \Gamma}} = 1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\Lambda h}{T(0)} &= 1 - \left[ \frac{T_{par}(0)}{T(0)} \right]^{\frac{\Lambda}{\Lambda - \Gamma}} \Rightarrow h = \frac{T(0)}{\Lambda} - \frac{T(0)}{\Lambda} \left[ \frac{T_{par}(0)}{T(0)} \right]^{\frac{\Lambda}{\Lambda - \Gamma}} = \\ &= \frac{T(0)}{\Lambda} - \frac{T(0)}{\Lambda} \left[ \frac{T_{par}(0)^\Lambda}{T(0)^\Lambda} \right]^{\frac{1}{\Lambda - \Gamma}} \Rightarrow h = \frac{1}{\Lambda} \left[ T(0) - \left( \frac{T_{par}(0)^\Lambda \cdot T(0)^{\Lambda - \Gamma}}{T(0)^\Lambda} \right)^{\frac{1}{\Lambda - \Gamma}} \right] = \\ h &= \frac{1}{\Lambda} \left[ T(0) - \left( \frac{T_{par}(0)^\Lambda}{T(0)^\Gamma} \right)^{\frac{1}{\Lambda - \Gamma}} \right] = \frac{1}{\Lambda} \left[ T(0) - \left( \frac{T(0)^\Gamma}{T_{par}(0)^\Lambda} \right)^{\frac{1}{\Gamma - \Lambda}} \right] \end{aligned}$$

#### 4.-La altura de mezcla

4.1.- La tabla 1 muestra las temperaturas registradas mediante un globo sonda a las siete de la mañana de un día de Noviembre en Hanoi. El cambio de temperatura con la altura puede describirse aproximadamente por la ecuación  $T(z) = T(0) - \Lambda z$  con diferentes valores de  $\Lambda$  en las tres capas  $0 < z < 96 \text{ m}$  ,  $96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$  y  $119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$

Tabla 1

Altura/m	5	60	64	69	75	81	90	96	102	109	113	119
Temperatura/°C	21,5	20,6	20,5	20,5	20,4	20,3	20,2	20,1	20,1	20,1	20,1	20,1

Altura/m	128	136	145	153	159	168	178	189	202	215	225	234
Temperatura/°C	20,2	20,3	20,4	20,5	20,6	20,8	21,0	21,5	21,8	22,0	22,1	22,2

Altura/m	246	257
Temperatura/°C	22,3	22,3

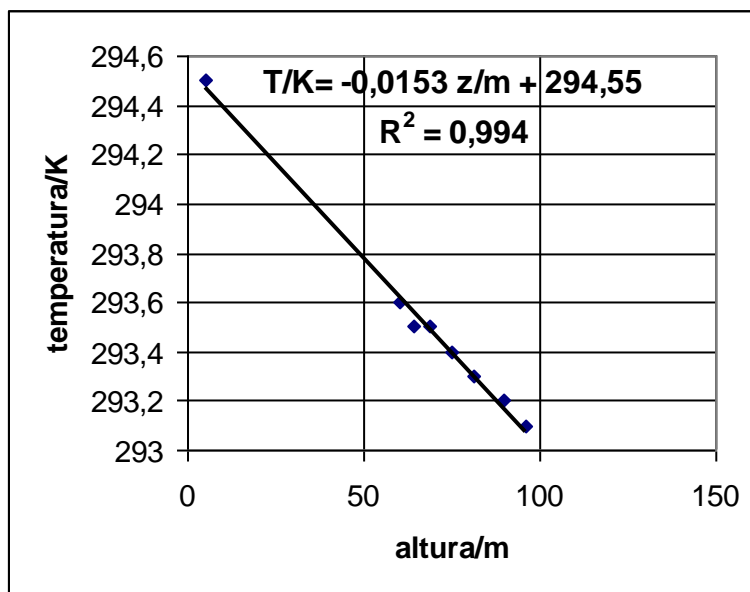
Considerar una parcela de aire con temperatura  $T_{par}(0) = 22^\circ\text{C}$  ascendiendo desde el suelo. A partir de los datos de la tabla 1 y utilizando aproximaciones lineales, calcular la temperatura de la parcela de aire a 96 m de altura y a 119 m.

En el apartado 2.3 hemos encontrado la siguiente ecuación:

$$\frac{T_{par}(z)}{T_{par}(0)} = \left[ \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} \right]^{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \Rightarrow T_{par}(96\text{m}) = (273 + 22) \left[ 1 - \frac{\Lambda 96}{T(0)} \right]^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

Para calcular la temperatura nos falta el valor de  $\Lambda$ , el de  $\Gamma$  y  $T(0)$ . En el apartado 2.2.2. encontramos que  $\Gamma = 9,97 \cdot 10^{-3} \text{ K/m}$ .

Con los datos de la tabla representamos la altura en el eje de abscisas y la temperatura en el eje de ordenadas.



Como  $T(z)=T(0)-\Lambda z$ , comparando con la pendiente de la gráfica se deduce que  $\Lambda=1,53 \cdot 10^{-2} \text{ K/m}$ .  $\frac{\Gamma}{\Lambda} = \frac{9,77 \cdot 10^{-3}}{1,53 \cdot 10^{-2}} = 0,639$  y  $T(0)=294,55 \text{ K}$ .

$$T_{\text{par}}(96\text{m}) = (273 + 22) \left[ 1 - \frac{\Lambda \cdot 96}{294,55} \right]^{0,639} = 295 \left( 1 - \frac{1,53 \cdot 10^{-2} \cdot 96}{294,55} \right)^{0,639} = 294\text{K}$$

De la tabla se observa que entre 96 m y 116 m la temperatura se mantiene constante, esto significa que  $T(z)=T(0)$ .

En el apartado 2.1 encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{dT_{\text{par}}}{dz} &= -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\mu g T_{\text{par}}}{R T} \Rightarrow \frac{dT_{\text{par}}}{dz} = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\mu g T_{\text{par}}}{R T(0)} dz \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{T_{\text{par}}(96)}^{T_{\text{par}}(119)} \frac{dT_{\text{par}}}{T_{\text{par}}} &= -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\mu g}{R T(0)} \int_{96}^{119} dz \Rightarrow \ln \frac{T_{\text{par}}(119)}{T_{\text{par}}(96)} = -\frac{0,4}{1,4} \cdot \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{8,31 \cdot 294,55} \cdot 23 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{T_{\text{par}}(119)}{T_{\text{par}}(96)} &= -7,63 \cdot 10^{-4} \Rightarrow T_{\text{par}}(119) = 294 \cdot e^{-7,63 \cdot 10^{-4}} = 293,8 \text{ K} \end{aligned}$$

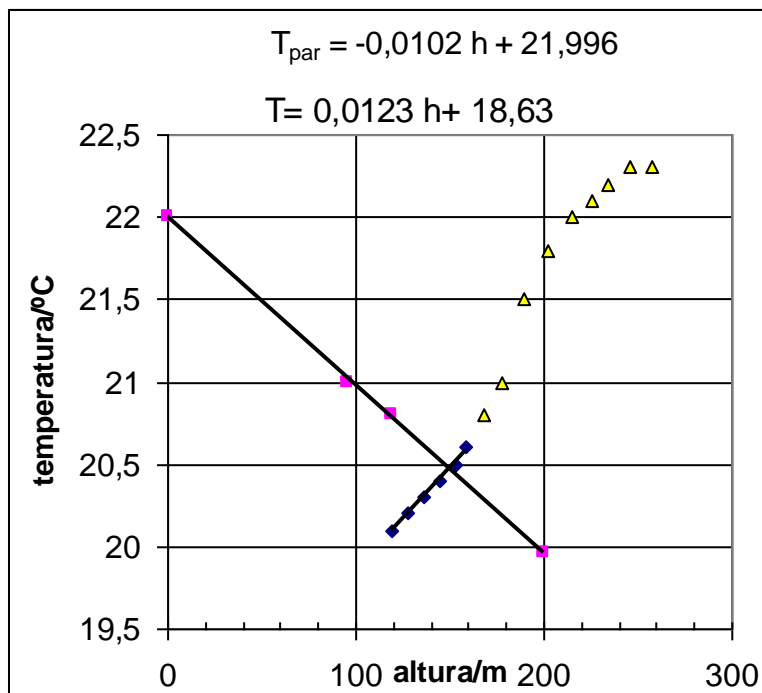
**4.2.- Determinar la máxima altura  $H$  que la parcela de aire puede alcanzar y su temperatura  $T_{\text{par}}(H)$ .**

**$H$  es la llamada altura de mezcla, en ella los contaminantes procedentes del suelo se mezclan con el aire de la atmósfera (por viento, turbulencia y dispersión) y se diluyen dentro de esta capa.**

La altura  $H$  se alcanza cuando la temperatura de la parcela se iguala con la del aire circundante. Tenemos tres datos de la temperatura de la parcela el del enunciado  $T_{\text{par}}(0 \text{ m}) = 22^\circ\text{C}$ , y los calculados en el aparato anterior  $T_{\text{par}}(96 \text{ m}) = 294 - 273 = 21^\circ\text{C}$  y  $T_{\text{par}}(119 \text{ m}) = 293,8 - 273 = 20,8^\circ\text{C}$ .

En una gráfica represemos los datos de la tabla de temperaturas y en la misma gráfica los tres valores anteriores y suponemos que  $T_{\text{par}}$  es lineal.

Respecto a los datos de  $T$  escogemos los puntos que están alineados cerca de la intersección de la recta  $T_{\text{par}}$  con los datos de la tabla 1.

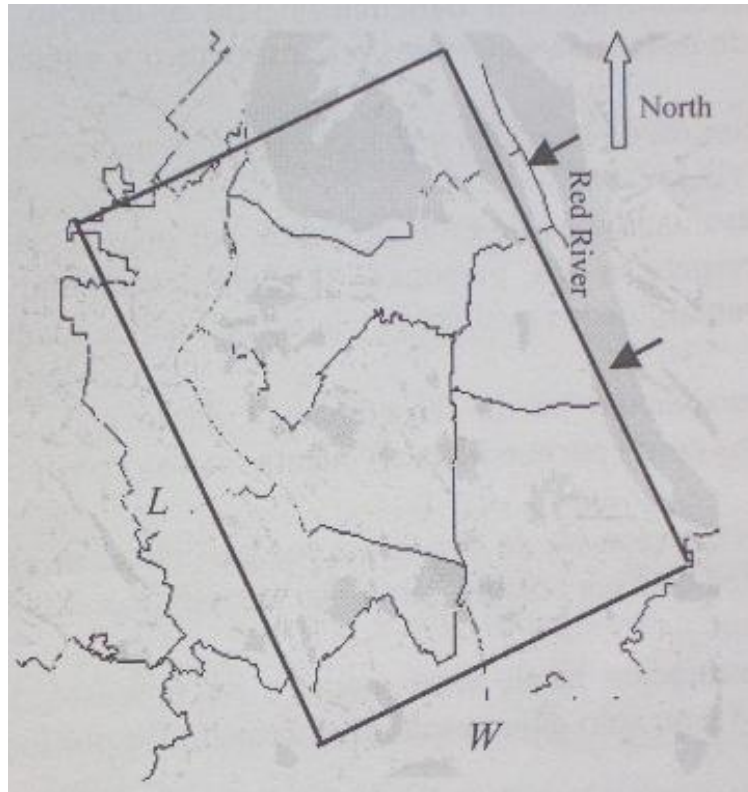


Igualando las temperaturas  $-0,0102 H + 21,996 = 0,0123 H + 18,63$  y resolviendo

$$H = 148 \text{ m y } t(H) = 20,5^\circ$$

## 5.-Estimación del contaminante CO producido por las motocicletas en la hora punta en la ciudad de Hanoi.

*La ciudad de Hanoi tiene un área que puede considerarse como un rectángulo de dimensiones  $L$  y  $W$  tal como indica la figura, con uno de los lados paralelo a la ribera del Red River.*



*Se estima que durante la hora punta de la mañana, entre las siete y las ocho, están en las calles de la ciudad  $8 \cdot 10^5$  motocicletas, cada una recorre un promedio de 5 km emitiendo 12 g de CO por cada kilómetro recorrido. Se supone que el CO se emite de forma constante en el tiempo con una tasa  $M$  durante la hora punta. Al mismo tiempo un aire, libre de contaminantes, sopla perpendicular al Red River, esto es, perpendicular a los lados  $L$  del rectángulo de la figura, con una velocidad  $u$  que se mantiene constante dentro de los límites de la ciudad y que se lleva parte del CO fuera de la ciudad.*

*Consideramos el siguiente modelo aproximado:*

*\*El CO se dispersa rápidamente a través del volumen entero de la capa de mezcla que está encima de la ciudad de Hanoi, es decir, la concentración de CO en el tiempo  $(t)$ ,  $C(t)$ , se supone que es constante dentro de la caja rectangular de dimensiones  $L, W, H$ .*

*\*El aire que penetra por el Red River no contiene contaminante y se admite que no hay pérdida de CO a través de los lados paralelos al viento.*

*\*Antes de las siete de la mañana la concentración de CO en el aire de la ciudad es despreciable.*

**5.1.- Obtenga la ecuación diferencial que determina  $C(t)$  en función del tiempo.**

En primer lugar vamos a calcular el valor de M

$$M = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 12}{3600} = 1,33 \cdot 10^4 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

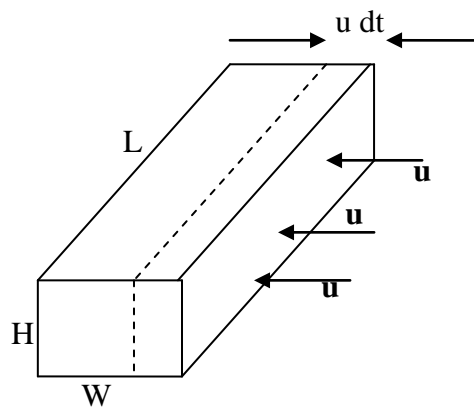
Designamos con C la concentración de CO que existe en el cubo de dimensiones LHW en un tiempo t. Cuando transcurra un tiempo t+dt la masa de contaminantes ha aumentado en Mdt debido a las emisiones de las motocicletas.

En ese mismo tiempo, el aire limpio que penetra perpendicularmente a la cara LH del cubo (ver la figura inferior) avanza una distancia udt y elimina todos los contaminantes que ocupan el volumen LH u dt. Como la concentración de contaminantes es C la masa de contaminantes eliminada por el aire limpio es LH u dt C.

El valor neto de aumento de contaminantes es.

$$Mdt - LHuCdt$$

Este aumento de contaminantes provoca un aumento de la concentración



$$\frac{Mdt - LHuCdt}{LHW} = dC \Rightarrow \frac{dC}{dt} = \frac{M - LHuC}{LHW} \Rightarrow \frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C = \frac{M}{LHW}$$

Para resolver la ecuación diferencial recurrimos a la ayuda matemática del enunciado

$$\frac{dx}{dt} + Ax = B \Rightarrow A = \frac{u}{W} \text{ y } B = \frac{M}{LHW}$$

La solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} + Ax = 0 \text{ es } x_1 = k \cdot e^{-At}$$

Ya que al derivar  $\frac{dx_1}{dt} = kA \cdot e^{-At}$  y sustituir en la ecuación diferencial resulta:

$$-kA \cdot e^{-At} + Ak \cdot e^{-At} = 0$$

L solución de la ecuación  $\frac{dx}{dt} + Ax = B$  es:  $x = kA \cdot e^{-At} + \frac{B}{A}$

Sustituyendo los valores de A y B

$$C = k e^{-\frac{u}{W}t} + \frac{M}{LHu}$$

Para eliminar la constante k recurrimos al hecho de que cuando  $t=0$  la concentración es cero

$$0 = k + \frac{M}{LHu} \Rightarrow k = -\frac{M}{LHu}$$

Finalmente la ecuación que nos da el valor de la concentración en función del tiempo es:

$$C = \frac{M}{LHu} \left( 1 - e^{-\frac{u}{W}t} \right)$$

**5.2.- Calcule el valor numérico de la concentración de CO a las ocho de la mañana,  $L = 15 \text{ km}$ ,  $W = 8 \text{ km}$  y  $u = 1 \text{ m/s}$**

En el apartado 4,2 hemos deducido que  $H = 148$  metros.

$$C = \frac{1,33 \cdot 10^4}{15 \cdot 10^3 \cdot 148 \cdot 1} \left( 1 - e^{-\frac{1}{8 \cdot 10^3} \cdot 3600} \right) = 2,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$$