

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

Madrid 2011

XLII.- OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. TAILANDIA. 2011

PROBLEMA 1

**Un problema de tres cuerpos y LISA**

*1.1.- Dos masas gravitacionales  $M$  y  $m$  (figura1), se desplazan describiendo cada una de ellas una órbita circular de radios  $R$  y  $r$  alrededor del centro de masas. Encontrar la velocidad angular  $\omega_0$  de la recta de unión  $Mm$  en función de  $R$ ,  $r$ ,  $M$ ,  $m$  y la constante de gravitación universal  $G$ .*

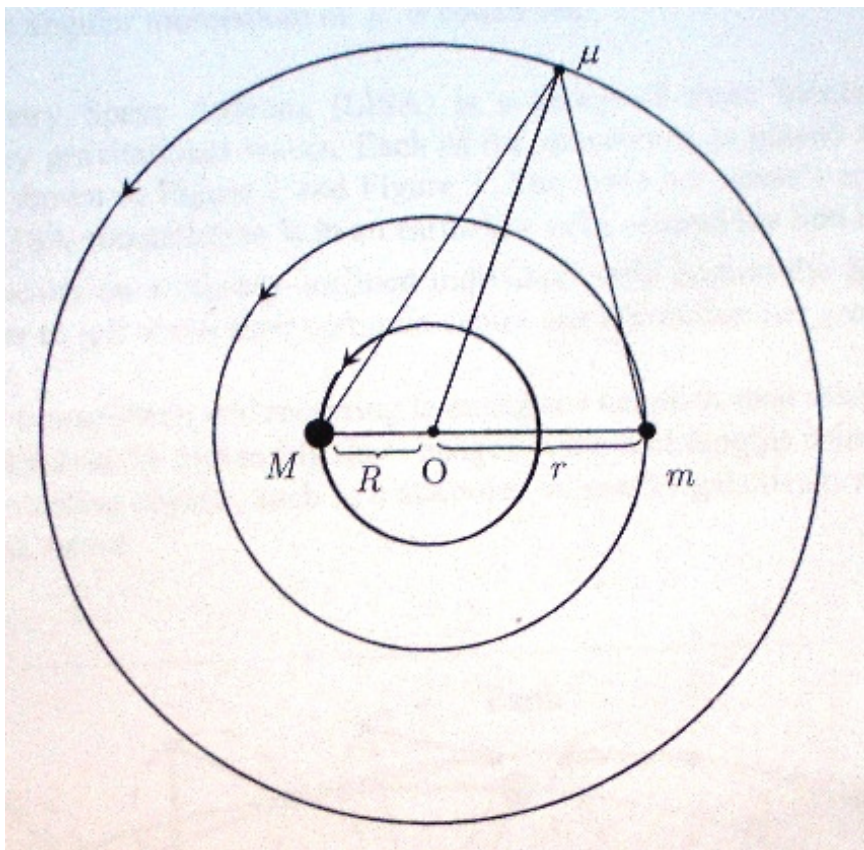


FIGURA 1.- Órbitas coplanarias de tres cuerpos

Sobre cada una de las masas actúa la fuerza de interacción gravitatoria que proporciona la fuerza centrípeta necesaria para poder describir las órbitas circulares alrededor del centro de masas.

$$G \frac{Mm}{(R+r)^2} = M\omega_0^2 R \ ; \Rightarrow \ \omega_0^2 R = \frac{Gm}{(R+r)^2}$$

$$G \frac{Mm}{(R+r)^2} = m\omega_0^2 r \ ; \Rightarrow \ \omega_0^2 r = \frac{GM}{(R+r)^2}$$

Sumando las dos últimas ecuaciones resulta:

$$\omega_0^2(R+r) = \frac{G(M+m)}{(R+r)^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{G(M+m)}{(R+r)^3}$$

**1.2.- Un tercer cuerpo de masa infinitesimal  $\mu$  se coloca en una órbita circular coplanar con  $M$  y  $m$  de modo que  $\mu$  permanece estacionario relativo a ambas masas  $M$  y  $m$ , tal como se muestra en la figura 1. Se supone que  $\mu$  no está alineada en la recta  $Mm$ . Calcular los siguientes valores**

**1.2.1.- Distancia de  $\mu$  a  $M$  ; 1.2.2.- Distancia de  $\mu$  a  $m$ ; 1.2.3.- Distancia de  $\mu$  al centro de masas  $O$ .**

**Expresarlas en función de  $R$  y  $r$ .**

En la figura 2 se indican los ángulos y las distancias así como el sistema de referencia ligado a la masa  $\mu$ .

Con  $F_1$  designamos a la fuerza de atracción entre  $M$  y  $\mu$ , aplicada en  $\mu$  y cuya componente sobre el eje  $Y$  positivo vale:

$$F_1 = G \frac{M\mu}{r_1^2} \cos\theta_1 \quad (1)$$

Con  $F_2$  designamos a la fuerza de atracción entre  $m$  y  $\mu$ , aplicada en  $\mu$  y cuya componente sobre el eje  $Y$  positivo vale:

$$F_2 = G \frac{m\mu}{r_2^2} \cos\theta_2 \quad (2)$$

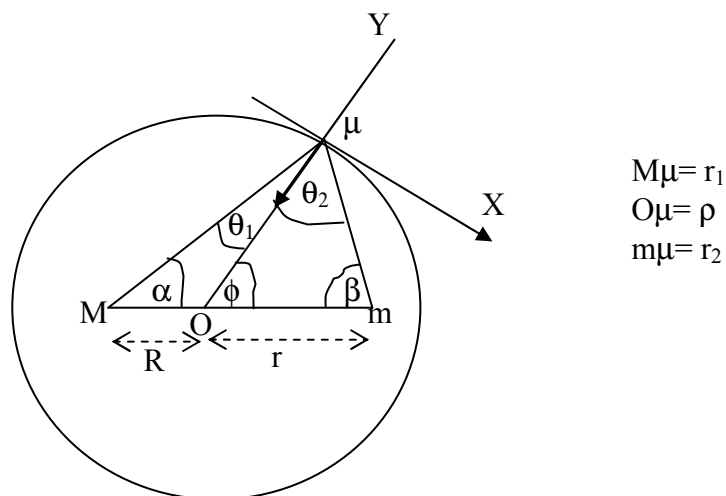


Fig 2

Las componentes de  $F_1$  y  $F_2$ , ecuaciones (1) Y (2), apuntan a O y proporcionan la fuerza centrípeta necesaria a la masa m.

$$G \frac{M\mu}{r_1^2} \cos\theta_1 + G \frac{m\mu}{r_2^2} \cos\theta_2 = \mu \omega_0^2 \rho \Rightarrow G \frac{M}{r_1^2} \cos\theta_1 + G \frac{m}{r_2^2} \cos\theta_2 = \omega_0^2 \rho \quad (3)$$

Dado que la masa  $\mu$  es estacionaria respecto de M y m, las componentes de  $F_1$  y  $F_2$  sobre el eje X deben ser iguales y de sentido contrario.

$$G \frac{M\mu}{r_1^2} \sin\theta_1 = G \frac{m\mu}{r_2^2} \sin\theta_2 \Rightarrow \frac{M}{r_1^2} \sin\theta_1 = \frac{m}{r_2^2} \sin\theta_2 \quad (4)$$

Aplicamos el teorema de los senos en los triángulos MO $\mu$  y Om $\mu$ .

$$\frac{\sin\theta_1}{R} = \frac{\sin(180-\phi)}{r_1} ; \frac{\sin\theta_2}{r} = \frac{\sin\phi}{r_2}$$

Puesto que  $\sin(180-\phi) = \sin\phi$

$$\frac{r_1 \sin\theta_1}{R} = \frac{r_2 \sin\theta_2}{r} \quad (5)$$

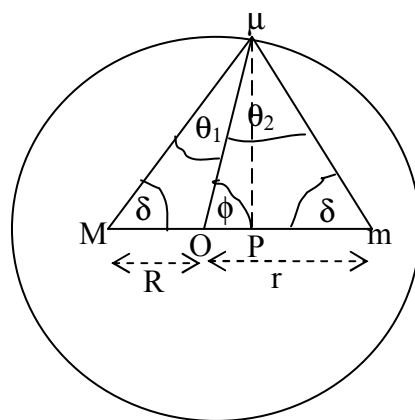
Dividimos miembro a miembro las ecuaciones (4) y (5)

$$\frac{M \sin\theta_1 R}{r_1 \sin\theta_1 r_1^2} = \frac{m \sin\theta_2 r}{r_2 \sin\theta_2 r_2^2} \Rightarrow \frac{MR}{r_1^3} = \frac{mr}{r_2^3} \quad (6)$$

Teniendo en cuenta que O es el centro de masas,  $MR = mr$ , por tanto, en (6) se cumple que

$$r_1^3 = r_2^3 \Rightarrow r_1 = r_2$$

En consecuencia el triángulo Mm $\mu$  es isósceles, en consecuencia,  $\alpha = \beta = \delta$ .



$$\begin{aligned} M\mu &= m\mu = r_1 = r_2 = \lambda \\ O\mu &= \rho_0 \\ P\mu &= h \\ \alpha &= \beta = \delta \end{aligned}$$

Fig.3

Volvemos a escribir las ecuaciones anteriores pero con la salvedad que ahora sabemos que el triángulo es isósceles.

$$G \frac{M\mu}{\lambda^2} \cos\theta_1 + G \frac{m\mu}{\lambda^2} \cos\theta_2 = \mu \omega_o^2 \rho_o = \mu \rho_o \frac{G(M+m)}{(R+r)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{M}{\lambda^2} \cos\theta_1 + \frac{m}{\lambda^2} \cos\theta_2 = \rho_o \frac{M+m}{(R+r)^3} \quad (7)$$

$$G \frac{M\mu}{\lambda^2} \sin\theta_1 = G \frac{m\mu}{r^2} \sin\theta_2 \Rightarrow M \sin\theta_1 = m \sin\theta_2 \quad (8)$$

Despejamos M en la ecuación (8) y la sustituimos en la (7).

$$\frac{m \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \cos\theta_1 + \frac{m}{\lambda^2} \cos\theta_2 = \rho_o \frac{M+m}{(R+r)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m \sin\theta_2 \cos\theta_1}{\lambda^2} + \frac{m \sin\theta_1 \cos\theta_2}{\lambda^2} = \rho_o \frac{\frac{m r}{R} + m}{(R+r)^3} \sin\theta_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\theta_1 + \theta_2) = \rho_o \frac{R+r}{(R+r)^3} \sin\theta_1 = \lambda^2 \frac{\rho_o \sin\theta_1}{R(R+r)^2} \quad (9)$$

Aplicamos el teorema de los senos en los triángulos MO $\mu$  y Om $\mu$ .(figura 3)

$$\frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{R+r} = \frac{\sin\delta}{\lambda} \quad ; \quad \frac{\sin\theta_1}{R} = \frac{\sin\delta}{\rho_o} \quad (10)$$

De (10) y (9) se deduce:

$$\frac{(R+r)\sin\delta}{\lambda} = \lambda^2 \frac{\rho_o \frac{R \sin\delta}{\rho_o}}{R(R+r)^2} \Rightarrow \lambda^3 = (R+r)^3 \Rightarrow \lambda = R+r$$

Este resultado nos indica que el triángulo Mm $\mu$  es equilátero, por tanto,  $\delta=60^\circ$ .

En el triángulo Mm $\mu$  de la figura 3, P $\mu$  es la altura de ese triángulo de valor h y

$$MP = MO + OP = \frac{r+R}{2} \Rightarrow OP = \frac{r+R}{2} - R = \frac{r-R}{2}.$$

$$h^2 = \lambda^2 - MP^2 = \lambda^2 - \left(\frac{r+R}{2}\right)^2 = \rho_0^2 - OP^2 = \rho_0^2 - \left(\frac{r-R}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_0^2 = \lambda^2 - \left(\frac{r+R}{2}\right)^2 + \left(\frac{r-R}{2}\right)^2 = (R+r)^2 - \frac{r^2 + R^2 + 2rR}{4} + \frac{r^2 + R^2 - 2rR}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_0^2 = R^2 + r^2 + 2rR - rR \Rightarrow \rho_0 = \sqrt{R^2 + r^2 + rR}$$

**1.3.- Considerar ahora que  $M=m$ . Si a  $\mu$  se le da una pequeña perturbación radial (a lo largo de  $O\mu$ ). ¿Cuál es la frecuencia angular de oscilación de  $\mu$ , respecto de la posición no perturbada en función de  $\omega_0$ ? Suponer que el momento angular de  $\mu$  se conserva.**

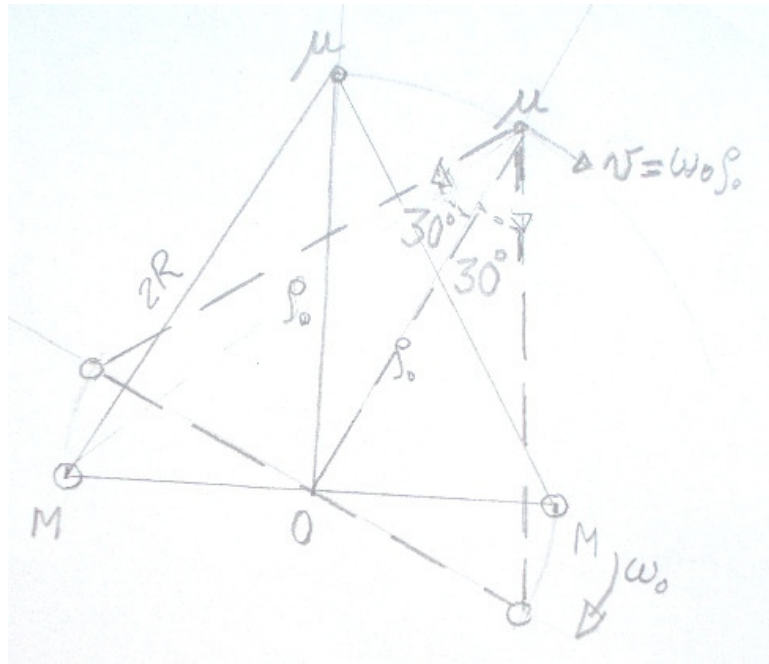


Fig.4

En la figura 4 se representan dos instantes del movimiento de las masas antes de que se haya producido la perturbación. La masa  $\mu$  tiene una velocidad que es tangente a la trayectoria, ésta es una circunferencia de radio  $\rho_0$  y el momento angular de  $\mu$  vale:

$$L = \mu v \rho_0 = \mu \omega_0 \rho_0^2 \quad (11)$$

$$\text{Como } OM = R ; \quad \rho_0 = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3}R \quad (12)$$

La fuerza de atracción gravitatoria que actúa sobre  $\mu$  proporciona la fuerza centrípeta que  $\mu$  necesita para girar.

$$\frac{2GM\mu}{4R^2} \cos 30^\circ = \mu \omega_0^2 \rho_0 \Rightarrow GM = \frac{2R^2 \omega_0^2 \rho_0}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}R^3 \omega_0^2}{\sqrt{3}} = 4R^3 \omega_0^2 \quad (13)$$

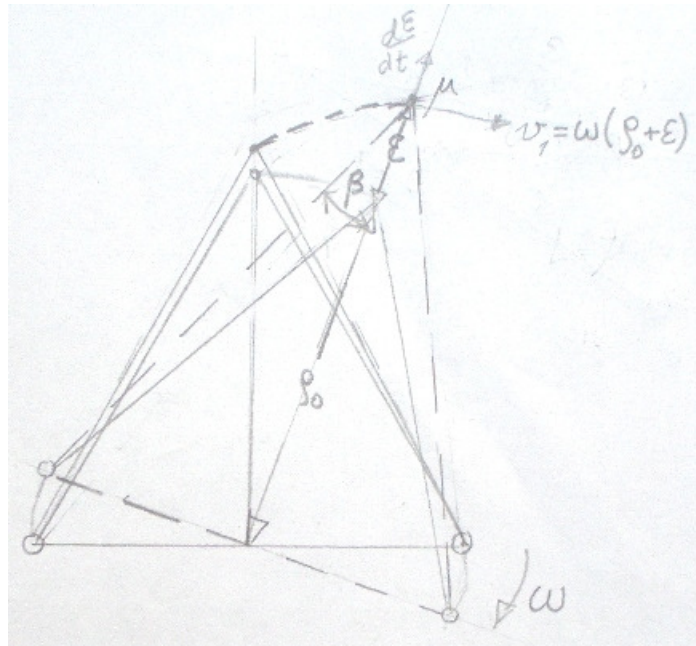


Fig.5

En la figura 5 ya se ha producido la perturbación. Ahora la masa  $\mu$  tiene una velocidad  $v_1$  debido al giro del sistema que se desplaza con velocidad angular  $\omega$  y además un movimiento de oscilación. Si en el instante representado, la distancia desde la posición no perturbada a la que se encuentra  $\mu$  la representamos por  $\epsilon$ , en ese instante esa velocidad vale  $v_R = \frac{d\epsilon}{dt}$

El momento angular de  $\mu$  vale ahora

$$L' = \mu v_1 (\rho_0 + \epsilon) = \mu \omega (\rho_0 + \epsilon)^2 \quad (14)$$

Según el enunciado  $L=L'$ .

$$\mu \omega_0 \rho_0^2 = \mu \omega (\rho_0 + \epsilon)^2 \Rightarrow \omega = \omega_0 \frac{\rho_0^2}{(\rho_0 + \epsilon)^2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \frac{(R\sqrt{3})^4}{(R\sqrt{3} + \epsilon)^4} = \frac{9R^4}{(R\sqrt{3} + \epsilon)^4} \quad (15)$$

Aplicamos la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned}
\frac{2GM\mu}{(\sqrt{3R+\varepsilon})^2+R^2} \cos\beta &= \mu\omega^2(\sqrt{3R+\varepsilon}) - \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{2 \cdot 4 \cdot R^3 \omega_0^2}{(\sqrt{3R+\varepsilon})^2+R^2} \cdot \frac{\sqrt{3R+\varepsilon}}{\left[(\sqrt{3R+\varepsilon})^2+R^2\right]^{\frac{1}{2}}} &= \omega^2(\sqrt{3R+\varepsilon}) - \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{8R^3\omega_0^2(\sqrt{3R+\varepsilon})}{\left[(\sqrt{3R+\varepsilon})^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}} &= \omega_0^2 \frac{9R^4}{(\sqrt{3R+\varepsilon})^3} - \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{9R^4}{(\sqrt{3R+\varepsilon})^3} - \frac{8R^3\omega_0^2(\sqrt{3R+\varepsilon})}{\left[(\sqrt{3R+\varepsilon})^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Teniendo presente que  $\varepsilon \ll \sqrt{3R}$ , podemos descartar los términos en que aparece esa potencia de  $\varepsilon$  o superior.

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3R+\varepsilon})^3 &\approx 3\sqrt{3}R^3 + 9\varepsilon R^2 \quad ; \quad \left[(\sqrt{3R+\varepsilon})^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}} \approx \left[3R^2 + 2\sqrt{3}\varepsilon R + R^2\right]^{\frac{3}{2}} = \\
&= (4R^2 + 2\sqrt{3}\varepsilon R)^{\frac{3}{2}} = \left[R(4R + 2\sqrt{3}\varepsilon)\right]^{\frac{3}{2}} = R^{\frac{3}{2}}(4R + 2\sqrt{3}\varepsilon)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} &= \omega_0^2 \frac{9R^4}{3\sqrt{3}R^3 + 9\varepsilon R^2} - \omega_0^2 \frac{8R^3(\sqrt{3R+\varepsilon})}{R^{\frac{3}{2}}(4R + 2\sqrt{3}\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = \omega_0^2 \frac{9R^2}{3\sqrt{3}R + 9\varepsilon} - \omega_0^2 \frac{8R^{\frac{3}{2}}(\sqrt{3R+\varepsilon})}{(4R + 2\sqrt{3}\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \omega_0^2 \frac{9R^2}{3\sqrt{3}R + 9\varepsilon} - \omega_0^2 \frac{8R^{\frac{3}{2}}(\sqrt{3R+\varepsilon})}{\left[\left(1 + \frac{2\sqrt{3}\varepsilon}{4R}\right) \cdot (4R)\right]^{\frac{3}{2}}} = \omega_0^2 \frac{3R^2}{\sqrt{3}R + 3\varepsilon} - \omega_0^2 \frac{8R^{\frac{3}{2}}(\sqrt{3R+\varepsilon})}{\left(1 + \frac{2\sqrt{3}\varepsilon}{4R}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 8R^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \\
\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} &= \omega_0^2 \frac{3R^2}{\sqrt{3}R + 3\varepsilon} - \omega_0^2 \frac{\sqrt{3}R + \varepsilon}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}\varepsilon}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \omega_0^2 \left[ \frac{3R^2(\sqrt{3}R - 3\varepsilon)}{3R^2} - \frac{\sqrt{3}R + \varepsilon}{1 + \frac{3\sqrt{3}\varepsilon}{4R}} \right] =
\end{aligned}$$

$$= \omega_0^2 \left[ (\sqrt{3}R - 3\varepsilon) - (\sqrt{3}R + \varepsilon) \left( 1 - \frac{3\sqrt{3}\varepsilon}{4R} \right) \right] = \omega_0^2 \left[ (\sqrt{3}R - 3\varepsilon) - \left( \sqrt{3}R - \frac{9\varepsilon}{4} + \varepsilon \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\left( \frac{7}{4}\omega_0^2 \right) \varepsilon$$

*La Antena Espacial de Interferometría con Láser (abreviatura en inglés LISA) la forman tres vehículos espaciales idénticos destinados a la detección de ondas gravitatorias con baja frecuencia. Cada uno de los vehículos está colocado en los vértices de un triángulo equilátero, tal como se observa en las figuras 2 y 3. Los lados o brazos están a una distancia aproximada de cinco millones de kilómetros. La agrupación LISA sigue una órbita, al igual que la Tierra, alrededor del Sol siguiendo la senda terrestre con un ángulo de 20°. Cada uno de los vehículos se desplaza describiendo una órbita circular ligeramente inclinada alrededor del Sol. Los tres giran alrededor de su centro de masa con un periodo de un año. Entre ellos están constantemente recibiendo y emitiendo señales de láser. En conjunto detectan las ondas gravitacionales midiendo pequeños cambios en la longitud de los brazos utilizando medidas interferométricas. Una colisión entre objetos masivos, como pueden ser agujeros negros en galaxias próximas, es un ejemplo de fuentes de ondas gravitatorias.*

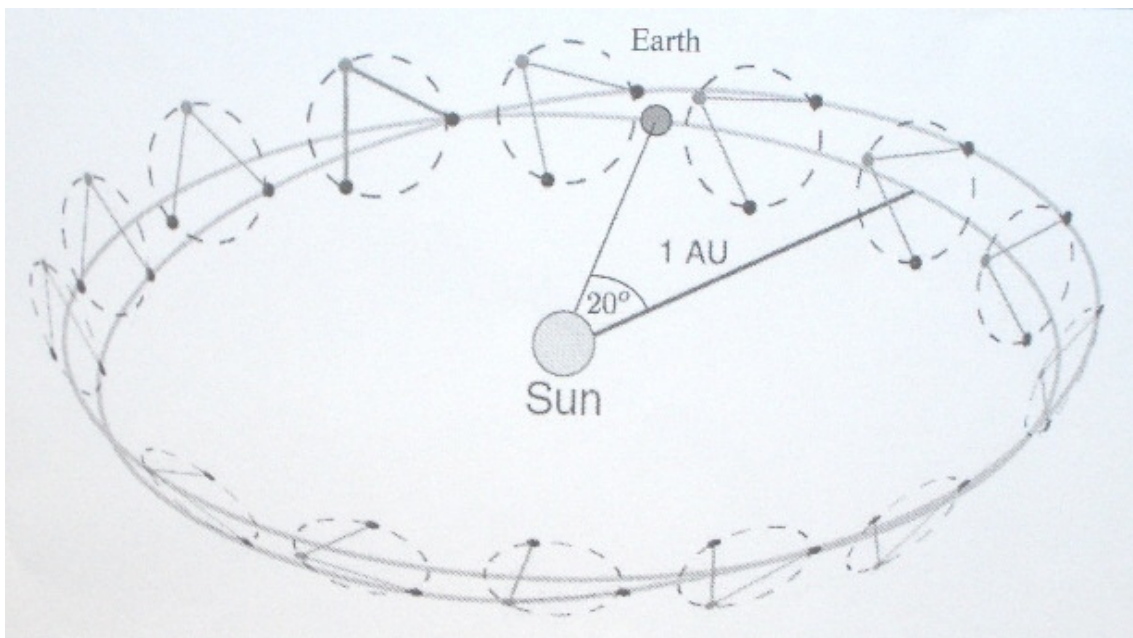


FIGURA 2.- Ilustración de la órbita descrita por LISA. Los tres vehículos espaciales giran alrededor de su centro de masas con un periodo de un año. Siguen la senda terrestre con un ángulo de 20°. (Dibujo de D.A. Shaddock. "An Overview of the Laser Interferometer Space Antenna", *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 2009, 26, pp. 128-132.)

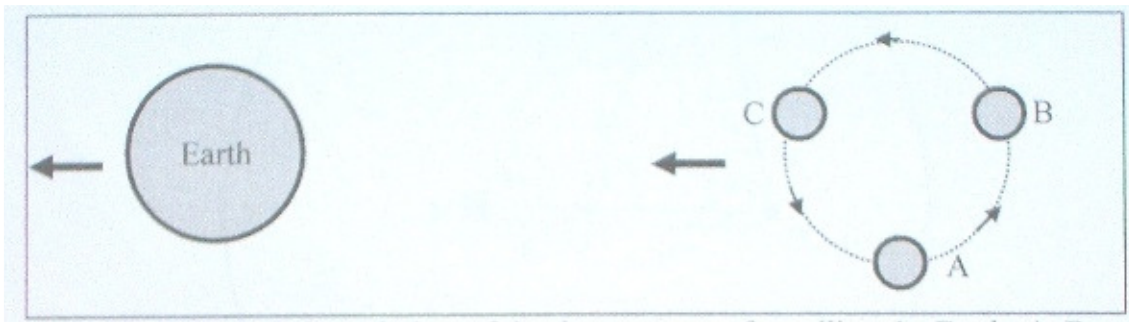


FIGURA 3.- Vista ampliada de los tres vehículos espaciales desde la órbita de la Tierra. A,B y C son los tres vehículos situados en los vértices de un triángulo equilátero.

**1.4.- En el plano que contiene a los tres vehículos espaciales, determinar cuál es la velocidad de un vehículo respecto de otro.**

La relación entre las velocidades de dos móviles respecto de un sistema de referencia inercial y la velocidad relativa de uno de ellos con respecto al otro, se ilustra en la figura 6.

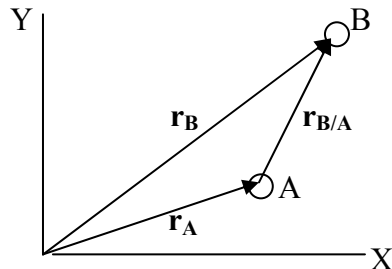


Fig.6

De la figura 6 se deduce:

$$\vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Para calcular la velocidad del vehículo B respecto del A hemos de calcular las velocidades de A y B respecto del sistema inercial.

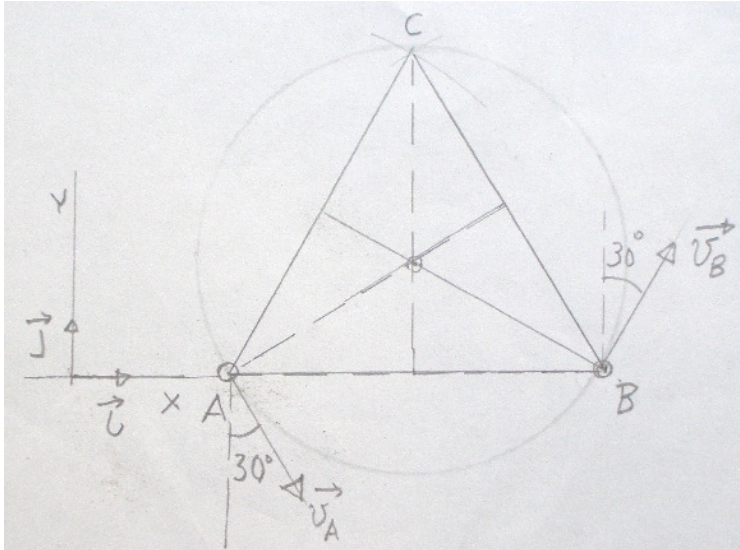


Fig.7

De la figura 7 se infiere que.

$$\vec{v}_A = v_A \sin 30^\circ \vec{i} - v_A \cos 30^\circ \vec{j} ; \vec{v}_B = -v_B \sin 30^\circ \vec{i} + v_B \cos 30^\circ \vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{B/A} = v_B \sin 30^\circ \vec{i} + v_B \cos 30^\circ \vec{j} - (v_A \sin 30^\circ \vec{i} - v_A \cos 30^\circ \vec{j}) = 2v \cos 30^\circ \vec{j}$$

En la ecuación anterior:

$$v_A = v_B = v = \frac{2\pi R}{T}$$

Como el centro de masas se encuentra a  $2/3$  del vértice:

$$R = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}L}{3} \Rightarrow v = \frac{2\pi\sqrt{3} \cdot 5 \cdot 10^9}{3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 575 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{B/A} = -2 \cdot 575 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \approx -996 \vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## PROBLEMA 2

### Una burbuja de jabón electrizada

Una burbuja de jabón de radio  $R_o$ , contiene en su interior aire de densidad  $\rho_i$ , a la temperatura  $T_i$ , y está rodeada por aire de densidad  $\rho_a$ , presión  $P_a$  y temperatura  $T_a$ . La tensión superficial de la película de jabón es  $\gamma$  y su densidad  $\rho_s$  y su espesor  $t$ . La masa y la tensión superficial no cambian al variar la temperatura y  $R_o \gg t$ .

El aumento de energía,  $dE$ , que se necesita para aumentar el área de la superficie de la burbuja en  $dA$ , es:  $dE = \gamma dA$ .

2.1.- Calcular la relación  $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$  en función de  $\gamma$ ,  $P_a$  y  $R_o$ .

La presión en el interior de la burbuja debe equilibrar la presión exterior y a la presión de la curvatura de la disolución jabonosa, que está formada por dos superficies:

$$P_i = P_a + 2 \cdot \frac{2\gamma}{R_o} \quad (1)$$

Relacionamos las presiones con sus densidades y temperaturas mediante la ecuación de los gases perfectos:

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\rho_i}{M} RT_i ; \Rightarrow \rho_i T_i = \frac{P_i M}{R} ; P_a = \frac{\rho_a}{M} RT_a \Rightarrow \rho_a T_a = \frac{P_a M}{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} \quad (2) \end{aligned}$$

Sustituimos  $P_i$  de la ecuación (1) en (2)

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_a + \frac{4\gamma}{R_o}}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_a R_o} \quad (1)$$

2.2.- Encontrar el valor numérico de  $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ , si  $\gamma = 0,0250 \text{ Nm}^{-1}$ ,

$R_o = 1,00 \text{ cm}$  y  $P_o = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = \frac{4 \cdot 0,0250}{1,013 \cdot 10^5 \cdot 1,00 \cdot 10^{-2}} = 9,9 \cdot 10^{-5} \quad (2)$$

**2.3.- La burbuja inicialmente tiene en su interior aire más caliente. Encontrar el valor mínimo de  $T_i$  de modo que la burbuja flote en el seno del aire en reposo. Utilice  $T_a = 300 \text{ K}$ ,  $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_a = 1,30 \text{ kg/m}^3$  y  $t = 100 \text{ nm}$ ,  $g = 9,80 \text{ m/s}^2$ .**

Si la burbuja flota en el aire es porque el peso total de ella, la del aire interior más el peso de la disolución de jabón, debe igualar a la fuerza de empuje del aire exterior.

Peso de la burbuja = peso del aire interior + peso de la película jabonosa.

$$\text{Peso del aire interior} = \rho_i V g = \rho_i \frac{4}{3} \pi R_o^3 g$$

Volumen de la película jabonosa (se desprecian los términos de  $t$ , elevados al cuadrado o a la tercera potencia)

$$V_t = \frac{4}{3} \pi (R_o + t)^3 - \frac{4}{3} \pi R_o^3 = \frac{4}{3} \pi (R_o^3 + 3R_o^2 t - R_o^3) = 4 \pi R_o^2 t$$

$$\text{Peso de la película jabonosa} = 4 \pi R_o^2 t \rho_s g$$

$$\text{Peso de la burbuja} = \rho_i \frac{4}{3} \pi R_o^3 g + 4 \pi R_o^2 t \rho_s g = 4 \pi R_o^2 g \left( \frac{\rho_i R_o}{3} + \rho_s t \right) \quad (3)$$

$$\text{Empuje del aire exterior} = V \rho_a g = \frac{4}{3} \pi R_o^3 \rho_a g \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \pi R_o^3 \rho_a g = 4 \pi R_o^2 g \left( \frac{\rho_i R_o}{3} + \rho_s t \right) \Rightarrow \frac{R_o \rho_a}{3} = \frac{\rho_i R_o}{3} + \rho_s t$$

De la ecuación (1) despejamos  $\rho_i$  y lo sustituimos en la ecuación inmediata anterior, siendo la presión exterior  $P_a$ .

$$\begin{aligned} \frac{R_o \rho_a}{3} &= \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left( 1 + \frac{4\gamma}{R_o P_a} \right) R_o + \rho_s t \Rightarrow R_o \rho_a - 3\rho_s t = \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left( 1 + \frac{4\gamma}{R_o P_a} \right) R_o \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_i = \frac{\rho_a T_a \left( 1 + \frac{4\gamma}{R_o P_a} \right)}{\rho_a - \frac{3\rho_s t}{R_o}} \quad (5) \end{aligned}$$

Para realizar el cálculo nos fijamos en las ecuaciones (1) y (2); se deduce que

$$1 + \frac{4\gamma}{R_o P_a} \approx 1$$

$$T_i = \frac{\rho_a T_a}{\rho_a - \frac{3\rho_s t}{R_o}} = \frac{1,30 \cdot 300}{1,30 - \frac{3 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-9}}{1,00 \cdot 10^{-2}}} = 307,1 \text{ K}$$

**Transcurrido un tiempo desde la formación de la burbuja, ésta alcanzará el equilibrio térmico con los alrededores y al estar el aire en calma, caerá de forma natural al suelo.**

**2.4.- Encontrar la velocidad mínima de una corriente de aire ascendente que consiga mantener a flote a la burbuja aun cuando haya alcanzado el equilibrio térmico. Dar la respuesta en función de  $\rho_s$ ,  $R_o$ ,  $g$  y el coeficiente de viscosidad del aire  $\eta$ . Se supone que la velocidad es pequeña y por tanto aplicable la ley de Stokes, además se desprecia la variación del radio al disminuir la temperatura hasta alcanzar la de equilibrio. La ley de Stokes es  $F=6 \pi \eta R_o u$ .**

La fuerza de arrastre de Stokes más el empuje deben equilibrar al peso de la burbuja para que flote en la corriente ascendente.

$$6 \pi \eta R_o u + \text{Ecuación(4)} = \text{Ecuac.(3)} \Rightarrow 6 \pi \eta R_o u + \frac{4}{3} \pi R_o^3 \rho_a g = 4 \pi R_o^2 g \left( \frac{\rho_i R_o}{3} + \rho_s t \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \eta u + \frac{2}{3} R_o^2 \rho_a g = 2 R_o g \left( \frac{\rho_i R_o}{3} + \rho_s t \right)$$

Al alcanzar la burbuja la temperatura exterior, la ecuación (1) queda así:

$$\frac{\rho_i}{\rho_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_o R_o} \Rightarrow \rho_i = \rho_a \left( 1 + \frac{4\gamma}{P_o R_o} \right)$$

Sustituyendo

$$3 \eta u = 2 R_o g \left[ \frac{\rho_a R_o \left( 1 + \frac{4\gamma}{P_o R_o} \right)}{3} + \rho_s t \right] - \frac{2}{3} R_o^2 \rho_a g = 2 R_o g \left[ \frac{\rho_a R_o \left( 1 + \frac{4\gamma}{P_o R_o} \right)}{3} + \rho_s t - \frac{R_o \rho_a}{3} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{2 R_o g \left[ \frac{\rho_a R_o \left( 1 + \frac{4\gamma}{P_o R_o} \right)}{3} + \rho_s t - \frac{R_o \rho_a}{3} \right]}{3 \eta}$$

**2.5.- Calcular el valor numérico de  $u$  utilizando que  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$**

Para realizar el calculo numérico de  $u$ , recordemos que  $1 + \frac{4\gamma}{R_o P_a} \approx 1$

$$u = \frac{2 \cdot (1,00 \cdot 10^{-2}) \cdot 9,8 (1000 \cdot 100 \cdot 10^{-9})}{3 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5}} = 0,36 \text{ m/s}$$

**Los cálculos anteriores nos indican que los términos en que interviene la tensión superficial y no influyen en el resultado. En las cuestiones que siguen se desprecian los términos en que intervenga la tensión superficial.**

**2.6.-La burbuja esférica se electriza uniformemente con una carga total  $q$ . Encontrar la ecuación que describa al nuevo radio  $R_1$  en función de  $R_o$ ,  $P_a$  y la permitividad del vacío  $\epsilon_o$ .**

Cuando la burbuja recibe la carga eléctrica  $q$  tiende a aumentar su radio debido a que la carga implantada uniformemente sobre su superficie, al ser toda del mismo signo, da lugar a fuerzas repulsivas. Pero al aumentar el radio la presión del aire que hay en su interior disminuye, y si se mantiene el equilibrio de la temperatura, como el aire exterior sigue a la presión constante  $P_a$ , resulta que sobre cada elemento de superficie de la burbuja aparecen fuerzas opuestas, la debida a la diferencia de presión entre la presión exterior e interior que actúa impidiendo que la burbuja aumente de tamaño y la debida al campo eléctrico que tiene a aumentar el tamaño de ella, en consecuencia se debe alcanzar un equilibrio cuando las fuerzas sean iguales.

Para calcular la fuerza eléctrica determinamos el campo eléctrico en la superficie de la burbuja.

En la figura 1 se considera un elemento de superficie  $dS$  el cual posee una carga eléctrica  $dq = \sigma dS$ , siendo  $\sigma$  la densidad superficial de carga sobre la burbuja.

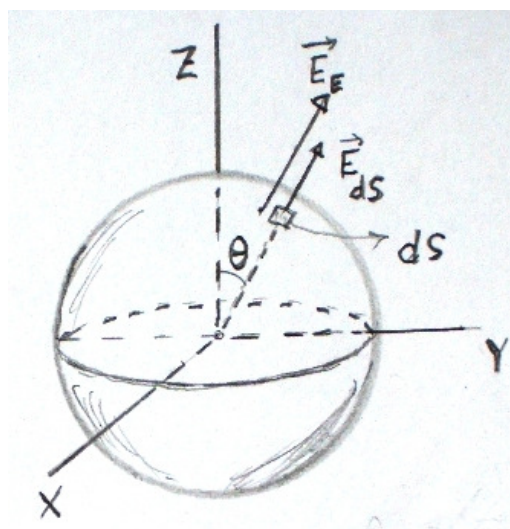


Fig.1

El campo eléctrico que crea esta carga y que designamos como  $\vec{E}_{ds}$ , lo evaluamos con ayuda del teorema de Gauss. Rodeando a  $dS$ , consideramos un tubo de forma cilíndrica cuyas bases están muy próximas a  $dS$ . Esas dos bases están atravesadas por el mismo flujo eléctrico (por la cara lateral del cilindro no hay flujo) y de acuerdo con el teorema de Gauss (ver figura 2).

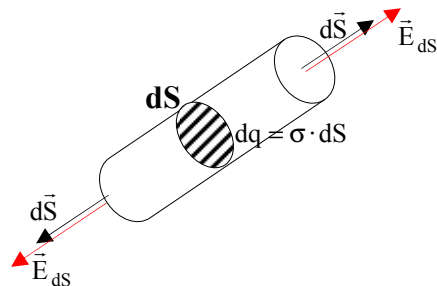


Fig.2

$$2 E_{ds} \cdot dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{ds} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

El campo  $E_E$  debido a la carga que tiene la esfera vale:

$$E_E = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

De la figura 1 se deduce que el campo debido a la esfera menos la del elemento  $dq = \sigma dS$  vale:

$$E = E_E - E_{ds} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

La fuerza que recibe la carga  $dq$  es:

$$dF = E \cdot dq = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \cdot \sigma dS = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} dS$$

Esta fuerza actúa sobre el elemento  $dS$  hacia fuera.

La diferencia de presión entre el aire exterior y el interior de la burbuja origina una fuerza hacia dentro; cuando se alcance el equilibrio de fuerzas:

$$\frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} dS = (P_a - P_i) dS \Rightarrow \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} = (P_a - P_i) \quad (4)$$

Aplicamos la ley de los gases perfectos, admitiendo que la temperatura interior del aire de la burbuja y la exterior están en equilibrio.

$$P_a \cdot \frac{4}{3} \pi R_o^3 = P_i \cdot \frac{4}{3} \pi R_i^3 \Rightarrow P_i = \frac{P_a R_o^3}{R_i^3}$$

Llevando esta ecuación a (4) resulta:

$$\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = P_a - \frac{P_a R_o^3}{R_i^3}$$

La densidad superficial de carga es:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{q}{4\pi R_i^2} &\Rightarrow \frac{\frac{q^2}{16\pi^2 R_i^4}}{2\epsilon_0} = P_a - \frac{P_a R_o^3}{R_i^3} \Rightarrow \frac{q^2}{32\pi^2 P_a \epsilon_0} = R_i^4 - R_o^3 R_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{q^2}{32\pi^2 P_a R_o^4 \epsilon_0} = \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^4 - \frac{R_i}{R_o} \quad (5) \end{aligned}$$

**2.7.-Suponer que la carga  $q$  es pequeña, esto es,  $\frac{q^2}{\epsilon_0 R_o^4} \ll P_a$ , y el aumento del radio de la burbuja  $\Delta R$  es pequeño ( $R_i = R_o + \Delta R$ ). Calcular el valor de  $\Delta R$ .**

A partir de la ecuación (5)

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{32\pi^2 P_a R_o^4 \epsilon_0} &= \left(\frac{R_o + \Delta R}{R_o}\right)^4 - \frac{R_o + \Delta R}{R_o} = \left(1 + \frac{\Delta R}{R_o}\right)^4 - 1 - \frac{\Delta R}{R_o} \approx 1 + 4\frac{\Delta R}{R_o} - 1 - \frac{\Delta R}{R_o} = 3\frac{\Delta R}{R_o} \\ &\Rightarrow \Delta R = \frac{q^2}{96\pi^2 P_a R_o^3 \epsilon_0} \end{aligned}$$

**2.8.-¿Cuál es el valor de  $q$  en función de  $t$ ,  $\rho_w$ ,  $\rho_s$ ,  $\epsilon_0$ ,  $R_o$  y  $P_a$  si la burbuja flota sin movimiento en el seno del aire en reposo?. Calcular el valor numérico de  $q$ , si la permitividad del vacío es  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  faradios /m**

Cuando la burbuja flota en el seno del aire en reposo se cumple que el empuje y el peso han de ser iguales. El peso de la burbuja es el mismo que antes de recibir la carga  $q$ , pero no el empuje que ahora es mayor pues el radio de la burbuja es  $R_i > R_o$

$$\text{Peso de la burbuja} = \rho_i \frac{4}{3} \pi R_o^3 g + 4\pi R_o^2 t \rho_s g = 4\pi R_o^2 g \left( \frac{\rho_i R_o}{3} + \rho_s t \right) \quad (3)$$

$$\text{Empuje} = \frac{4}{3} \pi R_i^3 \rho_i g$$

$$\frac{\rho_i}{\rho_a} = 1 + \frac{4\gamma}{P_o R_o} \Rightarrow \rho_i = \rho_a \left( 1 + \frac{4\gamma}{P_o R_o} \right)$$

Como los términos que se refieren a la tensión superficial se desprecian  $\rho_i = \rho_a$

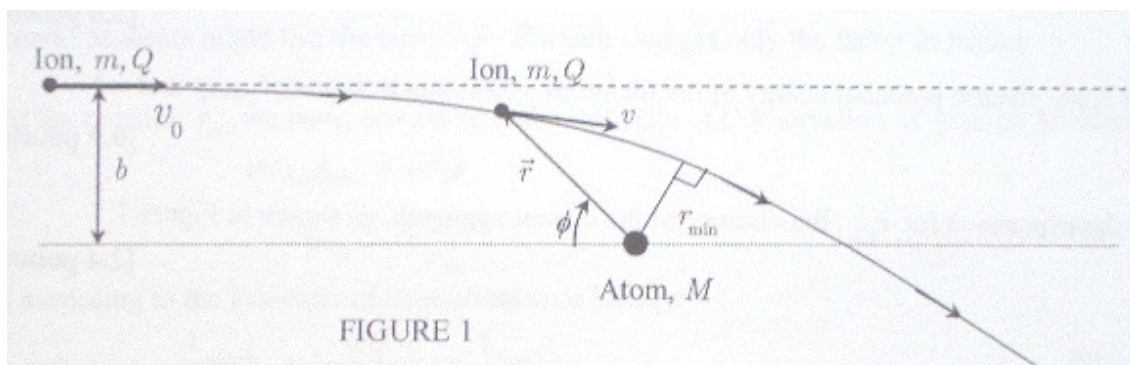
$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho_a g &= 4 \pi R_o^2 g \left( \frac{\rho_a R_o}{3} + \rho_s t \right) \Rightarrow \frac{R_1^3 \rho_a}{3} = \frac{R_o^3 \rho_a}{3} + R_o^2 \rho_s t \Rightarrow \rho_a (R_1^3 - R_o^3) = 3 R_o^2 \rho_s t \\ \Rightarrow \frac{(R_o + \Delta R)^3 - R_o^3}{R_o^2} &= \frac{3 \rho_s t}{\rho_a} \Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{\Delta R}{R_o}\right)^3 R_o^3}{R_o^2} - R_o = \frac{3 \rho_s t}{\rho_a} \Rightarrow \left(1 + 3 \frac{\Delta R}{R_o}\right) R_o - R_o = \frac{3 \rho_s t}{\rho_a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta R &= \frac{\rho_s t}{\rho_a} \Rightarrow \frac{q^2}{96 \pi^2 P_a R_o^3 \epsilon_o} = \frac{\rho_s t}{\rho_a} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{96 \pi^2 P_a R_o^3 \epsilon_o \rho_s t}{\rho_a}} \end{aligned}$$

El valor numérico de q es:

$$q = \sqrt{\frac{96 \cdot \pi^2 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot (1,00 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-9}}{1,3}} = 2,56 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

## PROBLEMA 3

### Conmemoración del Centenario del átomo nuclear de Rutherford. La dispersión de un ión por un átomo neutro



Un ión de masa  $m$ , carga  $Q$ , que inicialmente se encuentra muy alejado de un átomo neutro de masa  $M \gg m$  y polarizabilidad eléctrica  $\alpha$  se desplaza con velocidad no relativista  $v_0$ . El parámetro de impacto se designa en la figura 1 con  $b$ .

El átomo es instantáneamente polarizado por el campo eléctrico  $\vec{E}$  originado por el ión que se acerca al átomo.

El momento dipolar eléctrico del átomo resultante es  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ . No se considera en el problema las posibles pérdidas por radiación.

3.1.- Calcular la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}_p$  de un dipolo ideal  $\vec{p}$ , a la distancia  $r$  contada desde el origen  $O$  y en la dirección y sentido de  $\vec{p}$ . Figura 2.

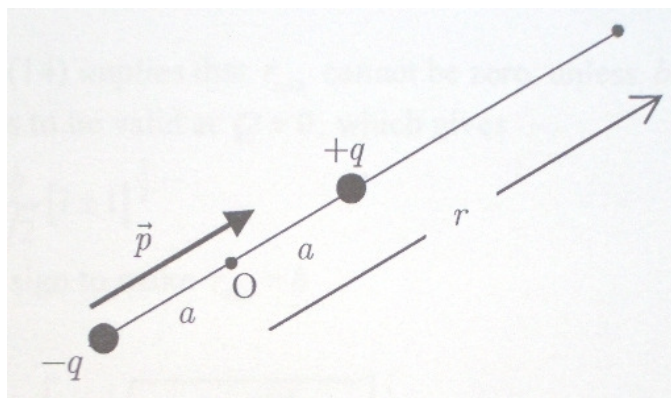


FIGURA 2

Aplicamos la ley de Coulomb para cada una de las cargas que forman el dipolo. Hacemos la aproximación de que  $a \ll r$ .

$$E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{(r+a)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \cdot r^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{a}{r}\right)^2 \cdot r^2} \right] \Rightarrow$$

$$E_p \approx \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \left[ \frac{1}{1-\frac{2a}{r}} - \frac{1}{1+\frac{2a}{r}} \right] = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \left[ \frac{1+\frac{2a}{r}}{1-\frac{4a^2}{r^2}} - \frac{1-\frac{2a}{r}}{1-\frac{4a^2}{r^2}} \right] \approx \frac{aq}{\pi r^3 \epsilon_0} = \frac{p}{2\pi \epsilon_0 r^3}$$

**3.2.- Encontrar la ecuación de la fuerza  $\vec{f}$  que actúa sobre el ión debido a la acción del átomo polarizado. Mostrar que esta fuerza es atractiva independientemente del signo de la carga del ión.**

El módulo del campo creado por el ión a una distancia  $r$  del átomo vale

$$E_{\text{ión}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

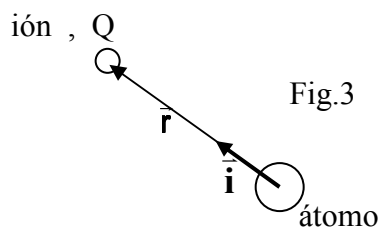
El módulo del momento dipolar inducido en el átomo  $M$  es:

$$p = \alpha E_{\text{ión}} = \frac{\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

El módulo del campo eléctrico creado por el dipolo inducido en la posición que ocupa el ión es:

$$E_p = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\alpha Q}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5}$$

La figura 3 hace referencia a la figura 1 del enunciado



Utilizando la notación vectorial

$$\vec{E}_{\text{ión}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{i} \quad ; \quad \vec{p} = -\frac{\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{i} \quad ; \quad \vec{E}_p = -\frac{\alpha Q}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \vec{i}$$

La fuerza que actúa sobre el ión es.

$$\vec{f} = Q\vec{E}_p = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \vec{i} \quad (1)$$

Según la ecuación (1) el vector  $\vec{f}$  tiene la dirección del vector  $\vec{i}$  pero de sentido contrario, esto es, dirigiéndose desde el ión al átomo, por tanto, es una fuerza atractiva, ya que  $Q^2$  es siempre positivo.

### 3.3.-¿Cuál es la energía potencial de la interacción ión-átomo, expresada en función de $\alpha$ , $Q$ y $r$ ?

El trabajo que desde fuera del sistema habría que hacer para llevar el ión a una distancia infinita del átomo, es un trabajo que se le comunica al sistema, el cual al sumarlo a la energía potencial del mismo nos da un resultado nulo, que es la energía de referencia en el infinito. Nos basta evaluar el trabajo para saber la energía potencial.

$$W = \int_r^\infty \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \vec{i} \cdot (-idr) = \frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{4r^4} = \frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}$$

$$W + E_{\text{potencial}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{potencial}} = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}$$

### 3.4.-Determinar la distancia mínima de aproximación $r_{\min}$ del ión al átomo. Ver la figura 1.

Aplicamos el principio de conservación de la energía entre la posición inicial del ión (muy lejos del átomo) y la distancia mínima. Designamos con  $v_m$  la velocidad a la distancia mínima.

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m v_m^2 - \frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r_{\min}^4} \quad (2)$$

Aplicamos el principio de conservación del momento angular

$$m v_o b = m v_m r_{\min} \quad \Rightarrow \quad v_m = \frac{v_o b}{r_{\min}} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2)

$$\begin{aligned} v_o^2 &= \left( \frac{v_o b}{r_{\min}} \right)^2 - \frac{\alpha Q^2}{16m\pi^2 \epsilon_0^2 r_{\min}^4} \quad \Rightarrow \quad v_o^2 r_{\min}^4 = v_o^2 b^2 r_{\min}^2 - \frac{\alpha Q^2}{16m\pi^2 \epsilon_0^2} \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad r_{\min}^4 - b^2 r_{\min}^2 + \frac{\alpha Q^2}{16m v_o^2 \pi^2 \epsilon_0^2} = 0 \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación hacemos  $p = r_{\min}^2$

$$p^2 - b^2 p + \frac{\alpha Q^2}{16 m v_0^2 \pi^2 \epsilon_0^2} = 0 \Rightarrow p = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - \frac{\alpha Q^2}{4 m v_0^2 \pi^2 \epsilon_0^2}}}{2} = r_{\min}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{\min} = \left[ \frac{b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{b^4}{4} - \frac{\alpha Q^2}{16 m v_0^2 \pi^2 \epsilon_0^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Supongamos que la partícula  $m$  no tiene carga, entonces al pasar por delante del átomo  $M$  no sufre desviación (no se acerca a  $M$ ), conserva la distancia  $b$ . La solución válida de (4) para este caso es que la raíz cuadrada vaya precedida del signo  $+$ .

$$r_{\min} = \left[ \frac{b^2}{2} + \sqrt{\frac{b^4}{4} - \frac{\alpha Q^2}{16 m v_0^2 \pi^2 \epsilon_0^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

**3.5.-Si el parámetro de impacto  $b$  es menor que un valor crítico  $b_0$ , el ión describirá una espiral hacia el átomo. En este caso el ión neutraliza su carga y la adquiere el átomo. Este proceso de interacción se conoce como intercambio de cargas. ¿Cuánto vale el área de la sección transversal  $A = \pi b_0^2$  de esta colisión de intercambio de carga tal como lo ve el ión?**

Si en la ecuación (5) se cumple que

$$\frac{b^2}{4} > \frac{\alpha Q^2}{16 \pi^2 m v_0^2 \epsilon_0^2} \Rightarrow b > \left( \frac{\alpha Q^2}{4 \pi^2 m v_0^2 \epsilon_0^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Existe un valor para  $r_{\min}$ . Si

$$\frac{b^4}{4} < \frac{\alpha Q^2}{16 \pi^2 m v_0^2 \epsilon_0^2} \Rightarrow b < \left( \frac{\alpha Q^2}{4 \pi^2 m v_0^2 \epsilon_0^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

No existe un valor real para  $r_{\min}$ . El ión se precipita hacia el átomo  
Cuando  $b=b_0$

$$\frac{b^4}{4} = \frac{\alpha Q^2}{16 \pi^2 m v_0^2 \epsilon_0^2} \Rightarrow b = b_0 = \left( \frac{\alpha Q^2}{4 \pi^2 m v_0^2 \epsilon_0^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Entonces

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{b_0^2}{2}} = \frac{b_0 \sqrt{2}}{2}$$

$$A = \pi b_0^2 = \pi \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{4 \pi^2 m v_0^2 \epsilon_0^2}} = \frac{Q}{2 v_0 \epsilon_0} \sqrt{\frac{\pi \alpha}{m}}$$